Two－Samples Problem について

田　村　亮　二

§1. 序

Distribution-free test といわれる統計的推測理論の一つの型である two－samples problem について exceedence number を利用した検定の方法を論ずる。此の問題に対して rank を使つた Wilcoxen〔1〕, Mann and Whitney〔2〕の test 及び exceedence number による Rosenbaum〔3〕〔4〕, Epstein〔5〕がある。又 Mood〔6〕は large sample で median test を提唱している。

今二つの分布函数 $F(x)$，$G(x)$ からの random sample を夫々 x_1，x_2，…，x_n；y_1，y_2，…．y_m とし帰無仮説 H_0：$F(x)=G(x)$ を適当な対立仮説に対して上記 Sample に基いて検定するといふ問題で $F(x)$，$G(x)$ の型は未知である。さて x_i の小さい方から大きさの順に並びかえ夫々 r 番目から s 番目を改めて x_r，x_s で表す（$r<s$ とす）。そして (x_r, x_s) に含まれる y の個数を U とするとき，この random variable U が検定基準として採用されるものである。分布函数を連続型と仮定すれば $P_r(y_i=x_r)=0$, $P_r(y_i=x_s)=0$ であるから確率１で x_r，x_s に等しくなる y はないと考えてよい。上の U による検定を便宜上 U－test と名付ける。正整数 r，s（$<n$）は一般に任意であるが n が余り小さくない時（例えば $n>5$ 又は6）は $r=1$，$s=n$ の如き両端をとらないのが妥当と考えられる。殊に寿命試験等の如く Sample 全部の検査が終了するまで待たず中途打切をする場合は時間に応じて適宜 r 及び s を定めればよい。普通両端の一つ又は二つの outlying observations を除いたもの即 $r=2$，$s=n-1$ 又は $r=3$，$s=n-2$ 等を用ふるのが安全と考えられる。

§2. で U-statistics の確率分布，moment 等 U の性質をしらべ，§3 で U-test の constistency を証明し，§4 で検定方法及び表を与える。

§2. Uの確率分布

仮説 H_0 の下で x_r，x_s の確率密度は

$$\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\,!F(x_r)^{r-1}\{F(x_s)-F(x_r)\}^{s-r-1}\{1-F(x_s)\}^{n-s}dF(x_s)\,dF(x\,)$$

で表わされる。故に

$$P(x)=P_r(U=\lambda)=C\iint\limits_{-\infty<x_r<x_s<\infty}F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s}(F_2-F_1)^{\lambda}(1-F_2+F_1)^{m-\lambda}dF_1dF_2$$

但　$F_1=F(x_r)$,　$F_2=F(x_s)$

$$C = \binom{m}{\lambda} \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$$

$F_1 = t_1$, $F_2 = t_2$ から

$$P(\lambda) = C \iint\limits_{o<t_1<t_2<1} t_2^{r-1} (t_2-t_1)^{\lambda+s-r-1} (1-t_2)^{n-s} (1-t_2+{}_1t)^{m-\lambda} dt_1\, dt_2$$

之は Dirichlet integral の一種で $t_1 - t_1 = u$ $t_1 = v$ で

$$= c \int_0^1 \int_0^{1-u} v^{r-1} u^{\lambda+s-r-} (1-u)^{m-\lambda} (1-u-v)^{n-s} dudv$$

$$\int_0^{1-u} v^{r-1} (1-u-v)^{n-s} dv = \frac{(r-1)!}{(n-s+1)(n-s+2)\cdots(n-s+r)} (1-u)^{n-s+r}$$

を利用すれば

$$P(\lambda) = c. \frac{(r-1)!(n-s)!}{(n-s+r)!} B(\lambda+s-r,\ m+n-\lambda-s+r+1) = \frac{\binom{m}{\lambda}\binom{n}{s-r}\frac{s-r}{\lambda+s-r}}{\binom{m+n}{\lambda+s-r}}$$

こゝに注意すべきは $P(\lambda)$ は r,s の各々に依存せず $s-r$ ($=t$とおく) にのみ関係してゐることである。

次に U の moment を求めるため先ず $\sum_{\lambda=o}^{m} P(\lambda) = 1$ を証明する。

$$\sum_{\lambda=o}^{m} P(\lambda) = t\binom{n}{t} \Sigma \frac{\binom{m}{\lambda}}{(t+\lambda)\binom{m+n}{\lambda+t}} = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \Sigma \binom{\lambda+t-1}{t-1} \binom{m+n-\lambda-t}{n-t}$$

さて等式 $(1-x)^{-(n-t)-1}(1-x)^{-(t-1)-1} = (1-x)^{-n-1}$ で x^m の係数を比較して

$$\sum_{\lambda=o}^{m} \binom{-n+t-1}{m-\lambda} \binom{-t}{\lambda} = \binom{-n-1}{m}$$

即ち $\Sigma \binom{m+n-\lambda-t}{m-\lambda} \binom{t+\lambda-1}{\lambda} = \binom{m+n}{m}$ これを代入することにより $\Sigma P(\lambda) = 1$ をうる。

後で使ふため上式を次のやうにかきかえる。

$$\sum_{\lambda=o}^{m} \frac{\binom{m}{\lambda}}{\binom{m+n-1}{\lambda+t-1}} = \frac{m+n}{t\binom{n}{t}} \qquad (*)$$

a 次の factorial moment E{U (U−1) … (U−a+1)} を $\alpha_{(a)}$ で表すと

$$\alpha_{(a)} = \sum_{\lambda=o}^{m} \lambda^{(a)} P(\lambda) = \frac{m^{(a)}}{m+n} t\binom{n}{t} \sum_{\lambda=a}^{m} \frac{\binom{m-a}{\lambda-a}}{\binom{m+n-1}{\lambda+t-1}}$$

(*) を利用して

$$\alpha_{(a)} = \frac{(m)^{(a)}(t+a-1)^{(a)}}{(u+a)^{(a)}} \qquad (**)$$

$(**)$ より U の平均及び分散は次式で求められる。

$$E(U) = \frac{m}{n+1}t, \quad V(U) = \sigma^2 = \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)}t(t+1) + \frac{m}{n+1}t - \left(\frac{m}{n+1}t\right)^2$$

特に m, n が大きくて $m \doteqdot n$ と考えてもよいとき（又は m, $n \to \infty$ の極限に於いて）

$E(U) = t$, $\sigma^2 = 2t$

となり U の確率分布は自由度 t の X^2 － 分布と見做してもよい。

§ 3. U－test の一致性

U－test の棄却域は対立仮説によつて変つてくるが例えば $H_1 : F(x) > G(x)$ (*for every* x) に対する H_0 の *test* では有意水準 ε をきめた時 $U \leqq U_\varepsilon$ である。U_ε は次節の表から求められる。或は棄却域は $U \leqq \frac{m}{n+1}t - \beta(n, m)\sigma$ （$\beta(n, m)$ は n, m の値に応じて定まり $\lim_{n,m\leftarrow\infty} \beta(n, m) = \beta(const)$）と考えてもよし。U－test の power は他の distribution － free test の場合と同様計算できないが一致性については次のやうに証明できる。

H_1 の下での expectation を E_{H1} で表すものとし確率変数 Z_i を $Z_i = 1$, *for* $x_r < y_i < x_s$

$Z_i = o$, *for* $y_i > x$ 又は $y_i < x_r$. で定義すれば $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ は independent. 且 $\sum_{i=1}^{m} Z_i = U$

又 $E_{H1}(Z_i) = \mathrm{P}_r(x_r < y_i < x_s) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \iiint_{x_r<y_i<x_s} F(x_r)^{r-1} \{F(x_s) - F(x_r)\}^{s-r-1}$

$$\times \{1-F(x_s)\}^{n-s} dF(x_r)\ dF(x_s)\ dG(y_i)$$

$$= c_1 \iint_{x_r<x_s} F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s}(G_2-G_1)\ dF_1\ dF_2$$

H_1 の仮定から

$$< c_1 \iint_{x_r<x_s} F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s} F_2\ dF_1\ dF_2$$

§ 2の momenf の計算と同様にして

$$E_{H1}(Z_i) < \frac{t}{n+1} + \frac{r}{n+1} \qquad \text{をうる。}$$

同様にして $E_{H1}(Z_i^2) = P_r(x < y_i < x_s) = E_{H1}(Z_i)$

今 $E_{H1}(Z_i) = \frac{t}{n+1} + \frac{r}{n+1} - \lambda \quad (\lambda > o)$ とおくと

$$E_{H1}(U) = \frac{mt}{n+1} + \frac{mr}{n+1} - m\lambda, \quad V_{H1}(U) = m\{\frac{t}{n+1} + \frac{r}{n+1} - \lambda - (\frac{t}{n+1} + \frac{r}{n+1} - t)^2\}$$

一方 power function $P(H_1) = P_r(U < \frac{mt}{n+1} - \beta(n, m)\sigma | H_1)$ は

$$P(H_1) = P_r\{U - (\frac{mt}{n+1} + \frac{mr}{n+1} - m\lambda) < m\lambda - \frac{mr}{n+1} - \beta(n, m)\sigma \mid H_1\}$$

$$= P_r(U - E_{H1}(U) < k\sigma_{H1}) \quad 但 \ k = \frac{m\lambda - \frac{mr}{n+1} - \beta(n, m)\sigma}{\sigma_{H1}}$$

と変形され，更に Tchebycheff の定理を利用すれば

$$P(H_1) \geqq 1 - \frac{\{m\frac{t}{n+1} - \lambda - (\frac{t}{n+1} - \lambda)^2\}}{\{n\lambda - \frac{mr}{n+1} - \beta(n, m)\sigma\}^2} \qquad (\sigma は §2. 参照)$$

こゝで $n, m \to \infty$ とすれば右辺の第二項は 0 に収斂し $\lim_{n, m \to \infty} P(H_1) = 1$ をうる。

§ 4. 検定方法及び表

対立仮説として考えられるものは location に関しては (i) $F(x) > G(x)$ (ii) $F(x) < G(x)$ であり dispersion については (iii) $d(F(x)) > d(G(x))$ (iv) $d(F(x)) < d(G(x))$ である。$d(F(x))$ は $F(x)$ の dispersion measure とする。

上の型の検定は実際上屢々出会ふもので例えば在来の結果に対してある処置をした時の効果を問題にするとき dispersion に変化は余りないといふ apriori information があるとき location の増減についての検査は (i), (ii), であり逆の場合は (iii), (iv), である。(i) 及 (ii) の型に対しては適当な r, s を定めUを勘定して表から得られる U_ε より小さいならば H_0 を棄却する。(iii), (iv) の型の対立仮説に関しては sample から勘定された U が表より得られた $U_{\varepsilon 1}$ より小さいか $U_{\varepsilon 2}$ より大きいならば H_0 を棄却するといふ立場に立てばよい。

Table m=m のとき Uの probahility distribution

t	λ \ m	5	6	7	8	9	10
1	0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
	1	0.277	0.272	0.269	0.266	0.264	0 263
	2	0.138	0.135	0.134	0.133	0.136	0.198
	3	0.059	0.060	0.061	0.061	0.061	0.061
	4	0.019	0.022	0.024	0.011	0.026	0.027
	5	0.004	0.006	0.008	0.009	0.009	0.010
	6		0.001	0.001	0.002	0.003	0.003
	7			0.000	0.000	0.000	0.001
	8						0.000
2	0	0.222	0.227	0.230	0.233	0.235	0.236
	1	0.277	0.272	0.269	0.266	0.264	0.263
	2	0.238	0.227	0.220	0.218	0.211	0.208
	3	0.158	0.151	0.146	0.143	0.141	0.139
	4	0.079	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081
	5	0.023	0.032	0.036	0.039	0.040	0.041
	6		0.007	0.012	0.015	0.017	0.018
	7			0.002	0.004	0.005	0.007
	8				0.000	0.001	0.002
	9					0.000	0.000
3	0	0.083	0.090	0.096	0.100	0.102	0.105
	1	0.178	0.181	0.183	0.184	0.185	0.185
	2	0.238	0.113	0.220	0.215	0.211	0.208
	3	0.238	0.211	0.203	0.195	0.190	0.180
	4	0.178	0.162	0.152	0.146	0.142	0.139
	5	0.083	0.090	0.091	0.090	0.090	0.090
	6		0.030	0.040	0.045	0.048	0.050
	7			0.010	0.016	0.020	0.022
	8				0.003	0.006	0.008
	9					0.001	0.002
	10						0.000

t	λ \ m	5	6	7	8	9	10
4	0		0.030	0.034	0.036	0.041	0.043
	1		0.090	0.097	0.102	0.105	0.108
	2		0.102	0.163	0.163	0.162	0.162
	3		0.211	0.203	0.195	0.190	0.185
	4		0.227	0.203	0.190	0.181	0.175
	5		0.181	0.163	0.152	0.145	0.140
	6		0.090	0.097	0.097	0.120	0.095
	7			0.034	0.046	0.081	0.054
	8				0.012	0.040	0.025
	9					0.011	0.008
	10						0.001
5	0			0.010	0.012	0.014	0.015
	1			0.040	0.046	0.050	0.054
	2			0.091	0.097	0.101	0.104
	3			0.151	0.152	0.151	0.150
	4			0.203	0.190	0.181	0.175
	5			0.220	0.195	0.181	0.171
	6			0.183	0.162	0.151	0.143
	7			0.096	0.102	0.101	0.100
	8				0.038	0.050	0.056
	9					0.014	0.023
	10						0.005
6	0				0.003	0.004	0.005
	1				0.016	0.020	0.023
	2				0.045	0.051	0.056
	3				0.090	0.096	0.100
	4				0.146	0.145	0.143
	5				0.195	0.181	0.171
	6				0.215	0.190	0.175
	7				0.184	0.162	0.150
	8				0.100	0.105	0.104
	9					0.041	0.054
	10						0.015

t	λ \ m	8	9	10	t	9	10
	0		0.001	0.001			0.000
	1		0.006	0.008			0.002
	2		0.020	0.025			0.008
	3		0.048	0.054			0.023
	4		0.090	0.095			0.050
7	5		0.142	0.140	8		0.090
	6		0.190	0.175			0.139
	7		0.211	0.185			0.185
	8		0.185	0.162			0.208
	9		0.102	0.108			0.185
	10			0.043			0.105

文　　献

〔1〕 F. Wilcoxen : Individual comparisons by ranking methods.
Biometrics Bull. Vol. 1 (1945)

〔2〕 H. B. Mann and D. R. whitney : On a test of whether one of two randon variables is stochastically larger than the other.
Ann. Math. Statis. Vol 18 (1947)

〔3〕 S. Rosenbaum : Tables for a nonparsmetric test of dispersion
Ann. Math. Statis. Vol 24 (1953)

〔4〕 S. Rosenbeum : Tables for a nonparametric test of location.
Ann. Math. statis. Vol 25 (1954)

〔5〕 B. Epstein : Tables for the distribution of the number of exceedances.
Ann. Matq. Statis. Vol 25 (1954)

〔6〕 A. M. Mood : Introduction to the theory of statistics. (1950)