島根大農研報（Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.）**26**：9－13，1992

混合マルコフ過程を応用した択伐林直径分布モデル*

稲　田　充　男**

The Diameter Distribution Model for Selection Forests Applied the Markov Chain Theories.

Mitsuo INADA

Abstract The auther proposed a new diameter distribution model for selection forests, and examined its applicability.

Applying the Markov Chain theories, the auther derived the diameter distribution model for selection forest stands. The assumptions for this derivation are that a forest tree will be cutted when the cumulative cutting condition for the tree counts k times, and that each tree of the stand will increases its condition M times in average for a unit diameter increasing interval. Under these assumptions, the auther derived the probability functions

$$f_k(x)=\frac{(Mx)^k}{k!}\cdot\exp[-Mx]$$

$$F_k(x)=\frac{M(Mx)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mx]$$

where $f_k(x)$ is the probability function which the cutting condition for a tree counts k times across during its diameter becoming x. $F_k(x)$ is the probability function which the cutting condition for a tree counts k times at exactly its diameter being x. This $F_k(x)$ gives the tree-cutting distribution. According to this tree-cutting distribution, the auther derived the probability function

$$r(d)=\int_d^\infty \frac{M(Mx)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mx]\,dx,$$

where $r(d)$ is the probability which a tree will remain its diameter is over d.

The applicability of this model was examined by appled it to six observed diameter distributions of Ate (*Thujopsis dolabrata* SIEB. et ZUCC var. *hondai* MAKINO) at Noto district, Ishikawa. This model shown good fits and reliablity and could be recognized as the diameter distribution model in addition to the following ordinary eqution, MEYER equation

$$g(d)=\alpha\exp(-bd),$$

where $g(d)$ is a number of trees, d is a diameter, a, b are constants.

はじめに

森林の内部構造の把握は，森林施業の研究にとって基礎的なものである．この林分構造の指標として一般によく用いられているのは胸高直径の頻度分布，すなわち直径分布である．一般に十分に保育され安定した択伐林である場合，その林分の直径分布は逆J字型分布を示し，その分布型をMEYER型直径分布曲線モデル$g(d)$は

$$g(d)=\alpha\exp(-kd)$$

で，dは胸高直径，a，bは定数である．しかし，択伐林の林分構造はその施業体系に深くかかわり，施業が異れば林分構造も異り，直径分布も当然異ってくる．よって，上記のMEYER型直径分布曲線モデルのみで種々の択伐林が示す直径分布を表現することはできない．本論では，この択伐林の直径分布に対して，混合マルコフ過程を応

＊本研究の一部は平成3，4年度文部省科学研究費補助金一般研究B（課題番号03454076）によった．

＊＊森林環境学講座

用し，新たな直径分布曲線モデルを誘導した．それは，樹木が伐採されるまでの待ち時間をその直径で示し，択伐林内の樹木の直径に対する伐採確率分布を誘導し，さらに，それよりある直径以上まで林分内にとどまる確率分布，すなわち直径分布曲線モデルを誘導したものである．以下，この誘導ならびにその曲線モデルの有効性について検討する．

択伐林内の樹木の伐採確率分布の誘導

択伐林内の樹木の伐採確率分布は，鈴木（1961, 1963）[3),4)] ならびに著者（山本，1981, 1982）[5),6)] が林分の寿命分布を導いた方法および著者（稲田，1990）[1)] が一斉同齢林分内の樹木の寿命分布を導いた方法に倣い，誘導した．

択伐林内のある樹木について考える．その樹木が択伐林内に植栽されてから伐採されるまでを次のようなモデルで考える．すなわち，「択伐林内の樹木は成長とともに伐採されるための条件を積み重ねていき，それがある基準に達したときに伐採される。」という構造モデルである．ここで，伐採されるための条件を積み重ねるとは，次のようなことが考えられる．

1．択伐林内のある樹木が成長し伐採に適した大きさになり伐採される．
2．択伐林内のある樹木の成長が他の樹木の成長より徐々に遅れ，除間伐または枯死し伐採される．
3．択伐林内のある樹木の成長が良過ぎて他の樹木の成長を阻害する危険があり，その樹木が伐採される．
4．その他の理由で伐採される．

伐られるための条件の積み重ねを条件加算回数 k で表わす．この条件加算回数 k は離散量

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

とする．さらに，胸高直径を x で表わし，連続量

$$x \geqq 0$$

とする．胸高直径が x から $x+dx$ になる間に条件加算回数が k のの樹木が $k+1$ 以上になる確率を

$$p_k(x)dx+0(dx)$$

とする．$0(dx)$ は $k+2$ 以上になる確率であり，その大きさは dx より小さいオーダーである．ここで，$f_k(x)$ を胸高直径が x で条件加算回数が k である確率とすると，

$$f_k(x+dx)=\{1-p_k(x)dx\}\cdot f_k(x)+p_{k-1}(x)dx\cdot f_{k-1}(x)+0(dx)$$

となる．よって，

$$\frac{f_k(x+dx)-f_k(x)}{dx}=-p_k(x)\cdot f_k(x)+p_{k-1}(x)\cdot f_{k-1}(x)+\frac{0(dx)}{dx}$$

となる．$dx\to 0$ とすれば，

$$f'_k(x)=-p_k(x)\cdot f_k(x)+p_{k-1}(x)\cdot f_{k-1}(x) \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる．初期条件を

$$f_0(0)=1,\ f_k(0)=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とすれば，$k=0$ のとき第2項がなくなり，

$$f_0(x)=-p_0(x)\cdot f_0(x)$$

となる．これが伐採条件加算回数分布 $f_k(x)$ を決める方程式である．この方程式は $p_k(x)$ を与えれば，$k=0,1,2,\cdots$ と順次解いていくことができる．

伐られるための条件加算回数分布 $f_k(x)$ は胸高直径が x になるまでに加算回数が k 以上になる確率である．次に，胸高直径が x から $x+dx$ の間に加算回数がちょうど k になる確率 $F_k(x)$ を求める．加算回数の増え方を排反なふたつの場合に分けて，

① $(0,x)$ に $k-1$ になっていて，$(x,x+dx)$ に k になる場合．

② i を2より大きな任意の値として，$(0,x)$ に $k-i$ になっていて，$(x,x+dx)$ に k になる場合．

とすると，①の場合の確率は，

$$f_{k-1}(x)\{p_{k-1}(x)dx+0(dx)\}$$

に等しく，また，②の場合の確率は，

$$\sum_{i=2}^{\infty} f_{k-i}(x)\{p_{k-i}(x)+0(dx)\}^i$$

となり，後の値は dx が限りなく小さなときには，無視することができるから，

$$F_k(x)=f_{k-1}(x)\cdot p_{k-1}(x)$$

となる．ここで，$p_k(x)$ は胸高直径 x の樹木の条件加算回数 k の増加率を表していると考えられる．択伐林内の樹木は条件の違いによりいろいろな大きさで伐られる．これら多数の樹木の伐採過程には統一的な考えというものは認め難い．このような場合，伐られるための条件加算の増加率 $p_k(x)$ は逆に多数のものの平均として，また，一種の平衡状態にあると考えられる．それゆえ，ここでは増加率 $p_k(x)$ は胸高直径 x，条件加算回数 k とは無関係で一定で

$$p_k(x)=M$$

であると仮定する．このように仮定すると，$f_k(x)$ の方程式は，

$$f'_k(x)=-M\cdot f_k(x)+M\cdot f_{k-1}(x) \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$f'_0(x)=-M\cdot f_0(x)$$

$$f_0(0)=1,\quad f_k(0)=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

となる．これを解くと，

$$f_k(x)=\frac{(Mx)^k}{k!}\cdot\exp[-Mx]$$

$$F_k(x)=\frac{M(Mx)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mx]$$

となる．ここで求めた $F_k(x)$ は，択伐林内の樹木の伐採される確率分布そのものである．

択伐林の直径分布の誘導

択伐林の樹木の伐採確率分布 $F_k(x)$ より，ある樹木が胸高直径が d から $d+1$ で伐られる確率 $q(d)$ は，

$$q(d)=\int_d^{d+1} F_k(x)dx$$

となる．これより，択伐林内の樹木が胸高直径 d 以上になっても存続する確率 $\gamma(d)$ を求めると，

$$\gamma(d)=1-q(1)-q(2)-\cdots-q(d-1)=\int_d^{\infty}F_k(x)dx$$

となる．択伐林内の樹木の胸高直径が d 以上になっても存続するということは，成長した樹木が胸高直径が d になるまでには伐られずに残っているということである．これを択伐林全体の本数に置き換えてやれば，択伐林の直径分布曲線が得られる．すなわち，択伐林の直径最小階の本数を N_0 とすると，その林分の直径 d の本数 $N(d)$ は

$$N(d)=N_0\cdot r(d)=N_0\int_d^{\infty} F_k(x)dx$$

として求めることができる．

択伐林の樹木の伐採確率分布 $F_k(x)$ として前節で導いた関数を代入すると，

$$r(d)=\int_d^{\infty}\frac{M(Mx)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mx]\,dx$$

であり，

$$N(d)=N_0\int_d^{\infty}\frac{M(Mx)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mx]\,dx$$

となる．

択伐林観測分布へのあてはめ

本論で用いた資料は，故安井鈞博士が設定した「能登地方のアテ択伐林」試験地の１つである二俣試験地（輪島市二俣町字堂ノ下５，中谷一雄氏所有）の６回の調査結果である．それぞれ1967年，1972年，1977年，1982年，1985年および1991年に調査されたものである．二俣試験地の概要を安井他の報告順に示すと，1967年当時は「中谷一雄氏の経営する林分で長材の柱材生産を主な目標にしている．林齢は36.6年である．立木密度は４cm 以上2,933本あり，胸高断面積は45.6m^{2}である．施業の関係からよくうっ閉し地上附近の相対照度は６％内外の小さな値で稚樹の生長はその影響で悪い。」（成田・安井，1969）[2]とのことである．また，1972年には「輪島市二俣町５に所在する西北西に面した傾斜15度の林分に設定した．ほぼ５年回帰でha当り150本程度の択伐が繰返され，また枝打も５年ごとに実施してきたといわれている．試験地設定の際に樹幹解析のため18本を伐採したが，３林分中で最も密度が高い試験地である．1970年秋には一部の枝打と４本が択伐収穫された。」（安井・藤江，1976）[7]となっている．さらに，1977年では「西北西に面した傾斜14度のマアテ林分内に面積0.03ha設定した．従来，回帰年５年程度でha当り150本程度の択伐と枝打をしてきた．６m柱材生産を目標とする林分である．試験地設定時に18本を樹幹解析したが，その後1970年には５本が択伐され，１本の雪害木が生じた．なお試験地内にはスギ６本が現在混交している。」（安井・藤江，1979）[8]とのことである．

表－１に調査年別に直径階別の本数，すなわち直径分布の観測値を示す．ただし，直径分布の括約幅は４cmとした．直径の測定は樹高２m以上の立木について輪尺により行われている．

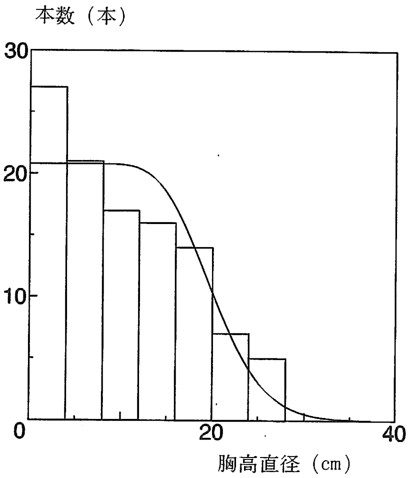
本試験地は，試験地設定当時から十分な管理のもと，小直径階から大直径階へと徐々に本数が逓減するいわゆる択伐林型を呈していた．ただ，表からもわかるように，近年は大直径階の樹木の本数が増え，分布型がやや乱れ

表－１　二俣試験地における調査年別直径階別観測本数

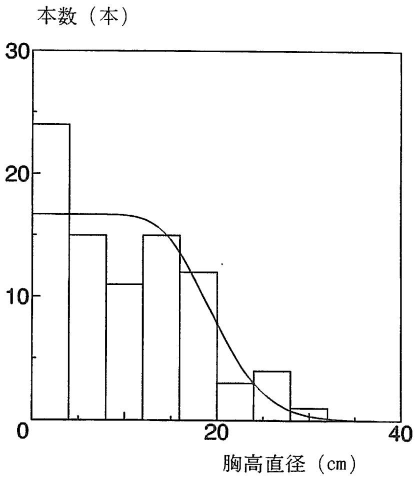
直径階中央値 (cm)	調査年別本数（本）					
	1967	1972	1977	1982	1985	1991
2	27	24	15	18	13	9
6	21	15	15	19	18	18
10	17	11	12	13	13	12
14	16	15	14	8	10	10
18	14	12	11	13	12	7
22	7	3	7	9	8	10
26	5	4	2	3	4	5
30	－	1	3	3	2	3
34	－	－	1	1	3	1
38	－	－	－	－	1	4
平均直径(cm)	10.4	10.3	12.1	11.8	13.1	14.4
標準偏差(cm)	7.2	7.4	8.0	8.3	9.0	9.8

表－２　各観測分布に対するパラメータ推定値および推定平均・標準偏差

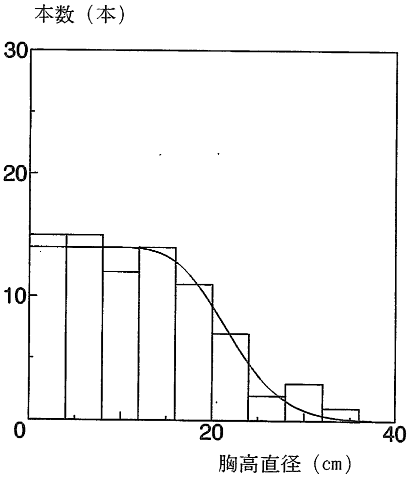
調査年	パラメータ推定値			平均	標準偏差
	No.	M	K	(cm)	(cm)
1967	20.7	1	20.3	10.7	6.7
1972	16.7	1	20.0	10.5	6.6
1977	14.0	1	22.2	11.6	7.2
1982	14.7	1	23.2	12.1	7.5
1985	13.5	1	23.7	12.4	7.6
1991	11.5	1	26.1	13.6	8.3



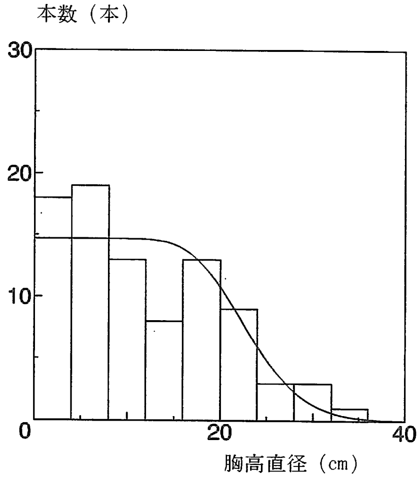
図－１　1967年調査の観測分布に対するあてはめ結果



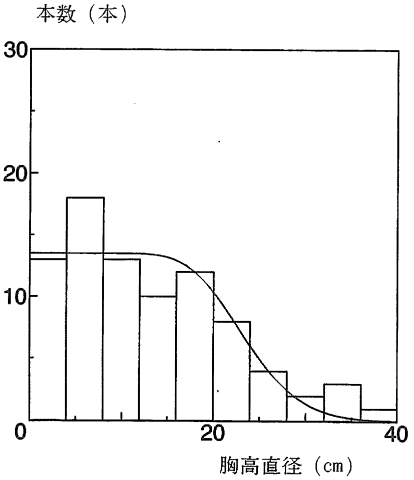
図－２　1972年調査の観測分布に対するあてはめ結果



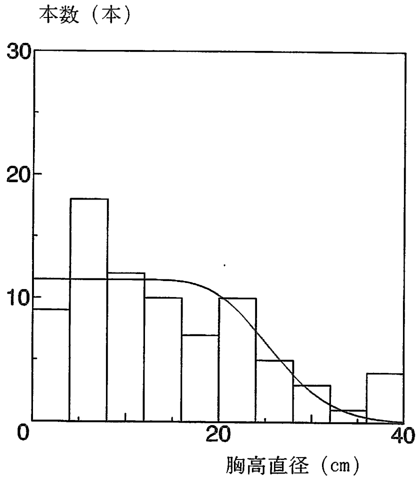
図－３　1977年調査の観測分布に対するあてはめ結果



図－４　1982年調査の観測分布に対するあてはめ結果



図－５　1985年調査の観測分布に対するあてはめ結果



図－６　1991年調査の観測分布に対するあてはめ結果

ている．

上記資料に対して分布曲線モデルを最小二乗法によりあてはめる．最小二乗法としてシンプレックス法を用いた．シンプレックス法は，直接探索に基づく方法であり，計算が簡単で効率も比較的良いことが知られている．

シンプレックス法による最適化法では，まずできる限り真値に近いパラメータの初期値が必要となる．これが結果を左右するといっても過言ではない．本論では以下のようにして各パラメータの初期値を決定した．

N_0 はその定義からも明かのように，直径最小階の本数であるので観測分布の最小階の本数をその初期値とした．次に，M, k については，択伐林の樹木の伐採確率分布モデルの伐採直径平均 $E(d)$ を計算すると，

$$E(d)=\frac{d}{M}$$

となる．ここでは，M は直径の値，条件加算回数には無関係で一定であるので，計算の簡便化を図り一律に $M=1$ とした．よって，k は観測分布の平均値をもって初期値とした．

各観測分布に対するあてはめ結果を図－1～6に示す．また，そのときのパラメータ推定値およびそれより計算される分布の平均・標準偏差を表－2に示す．各図からも明らかなように，それぞれの観測分布に本論で誘導した分布曲線モデルはよく適合しており，MEYER 型直径分布曲線モデルでは表現できない逆 J 字型分布以外のものをよく表現している．分布の平均については，観測値より算出したものに近いが，標準偏差はあてはめ計算において一律に $M=1$ としたことによるものか，全般に小さい．この点は今後の検討課題として残るが，全般的にはよく適合している．なお，観測値と推定値間の相関係数を計算すると，それぞれ調査年順に，0.89, 0.87, 0.98, 0.88, 0.93, 0.79となった．これからも，本論で示した択伐林の直径分布モデルの適合性の良さがわかる．

おわりに

混合マルコフ過程を応用し，択伐林内の樹木の伐採確率分布の誘導し，さらにそれより択伐林の直径分布曲線モデルを誘導した．従来，択伐林の直径分布モデルとしてはMEYER 型直径分布曲線一辺倒であった．これに対し，本論で示した直径分布曲線モデルは現実の分布にもよく適合し，そのパラメータの値も信頼性の高いものである．これにより，択伐林の直径分布モデルとして，MEYER 型直径分布曲線モデル以外にも有用な分布があることを示すことができた．さらに，本論で示した択伐林の直径分布モデルは，混合マルコフ過程の中でも最も単純な純出生過程の応用であるが，択伐林の直径分布に対して，若干の理論付けができたと考える．

本論で誘導した択伐林の直径分布曲線モデルについて，能登地方アテ択伐林の代表的な林分である二股試験地の調査結果について適用し検討した．今後，故安井鈞博士が設定した他の試験地の調査結果にも適用し，その有効性についてさらに検討を加える予定である．

引用文献

1）稲田充男：混合マルコフ過程を応用した本数曲線の誘導．島根大農研報**24**：17－20，1990
2）成田恒美・安井　鈞：アテ択伐林に関する研究　1．マアテ択伐林の林分構成と生長量．島根大農研報**3**：25－34，1969
3）鈴木太七：木材の生産予測について．113pp，科学技術庁資源局，1961
4）鈴木太七：木材の生産予測について（II）．54pp，科学技術庁資源局，1963
5）山本充男：減反率と直径生長の関係　第１報　新しい減反率モデルの誘導．島根大農研報**15**：42－46, 1981.
6）山本充男：減反率と直径生長の関係　第２報　減反率およびパラメータの決定．島根大農研報**16**：44－47，1982
7）安井　鈞・藤江　勲：アテ択伐林に関する研究　7．マアテ択伐林固定試験地の第１経理期における生長（１）．島根大農研報**10**：93－97，1976
8）安井　鈞・藤江　勲：アテ択伐林に関する研究　8．マアテ択伐林固定試験地の第１経理期における生長（２）．島根大農研報**13**：40－49，1979