島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) 24 : 17−20, 1990

混合マルコフ過程を応用した本数曲線の誘導

稲　田　充　男*

Derivation of Tree-Number Curve Applied the Markov Chain Theories.

Mitsuo Inada

Applying the Markov Chain theories, the auther derived the formual for tree-number curve in even-aged forest stands. The assumptions for this derivation are that a forest tree will be cutted when the cumulative cutting condition for the tree counts k times, and that each tree of the stand will increases its condition M times in average for a unit time interval. Under these assumptions, the auther derived the probability functions

$$f_k(t) = \frac{(Mt)^k}{k!}\cdot\exp[-Mt]$$

$$F_k(t) = \frac{M(Mt)_k^{-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mt],$$

where $f_k(t)$ is the probability function which the cutting condition for a tree counts k times across during t unit time interval. $F_k(t)$ is the probability function which the cutting condition for a tree counts k times at exactly t time unit. This $F_k(t)$ gives the life span distribution of forest trees. According to this life span distribution, the auther derived the probability function

$$r(j) = \int_j^\infty \frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mt]\ dt,$$

where $r(j)$ is the probability which a tree will remain over j years old. This function is reduced to the well-known χ^2 distribution. Multipling $r(j)$ and the initial number of trees N_0, we can estimate the tree-number curve in an even-aged forest stand.

はじめに

林学における混合マルコフ過程の応用としては，「林分の寿命分布」を導き，新たに「減反率法」なる収穫規整法を示した鈴木の研究（鈴木，1961，1963）が有名である．さらに，鈴木の減反率法の考え方に直径生長の関係を組み合せ，鈴木の「林分の寿命分布」とは別にふたつの新たな林分の寿命分布を導いた研究（山本，1981，1982）がある．この林分の寿命分布を誘導した方法を応用し，一斉同齢林分内の樹木本数が時間とともに減る現象に適応することができたので報告する．

林分を構成する樹木は，すべてが同じ状態から生長を始めたとしても，地位や遺伝など諸条件の違いにより，それら樹木の大きさには当然差が生まれる．これによって，時間の経過とともに林分を構成する樹木は，枯死したり除間伐の対象となり伐られ，その構成本数が減少する．林分収穫表の調製や林分材積表の作成の際には，この本数減少を明確に捉えなければならない．従来，本数減少を表現する関数 $N(t)$ として，指数減少曲線式

$$N(t) = N_0\cdot\exp[-kt]$$

を用いることが多かった．ここで，N_0 は植栽本数，t は時間，k は定数である．しかし，この指数減少曲線式は初期本数が多くなり過ぎる傾向があり，本数減少を十分に表現しているとはいい難い．本論では，この本数減少に対して混合マルコフ過程を応用し，樹木が伐られるまでの待ち時間という概念を導入し，まず一斉同齢林分

* 森林環境学講座

内の樹木の寿命分布を誘導し，さらにそれより本数減少曲線を誘導した．以下，この誘導について説明する．

樹木の寿命分布の誘導

一斉同齢林分内の樹木の寿命分布は，鈴木ならびに著者が林分の寿命分布を導いた方法に倣い，誘導した．

新植された林分を考える．その林分内の樹木が時間の経過とともに伐られるための条件を積み重ねていき，それがある基準に達したときに伐られるという構造モデルを考える．伐られるための条件を積み重ねるとは，ある樹木が時間とともに他の樹木より生長が徐々に遅れて，除間伐または枯死し伐られてしまうということである．逆に，生長が良過ぎて他の樹木の生長を阻害する危険があり，その樹木が伐られるということも考えられる．

伐られるための条件の積み重ねを条件加算回数 k で表わす．この条件加算回数 k は離散量

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

とする．さらに，年齢を t で表わし，連続量

$$t \geqq 0$$

とする．年齢 $(t,\ t+dt)$ の間に条件加算回数が k の樹木が $k+1$ 以上になる確率を

$$p_k(t)dt+0(dt)$$

とする．$0(dt)$ は $k+2$ 以上になる確率であり，その大きさは dt より小さいオーダーである．ここで，$f_k(t)$ を年齢 t において条件加算回数 k のものが存在する確率であるとすると，

$$f_k(t+dt)=\{1-p_k(t)dt\}\cdot f_k(t)+p_{k-1}(t)dt\cdot f_{k-1}(t)+0(dt)$$

となる．よって，

$$\frac{f_k(t+dt)-f_k(t)}{dt}=-p_k(t)\cdot f_k(t)+p_{k-1}(t)\cdot f_{k-1}(t)+\frac{0(dt)}{dt}$$

となる．$dt\to 0$ とすれば，

$$f_k'(t)=-p_k(t)\cdot f_k(t)+p_{k-1}(t)\cdot f_{k-1}(t) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる．初期条件を

$$f_0(0) = 1,\ f_k(0) = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とすれば，$k = 0$ のとき第２項がなくなり，

$$f_0'(t)=-p_0(t)\cdot f_0(t)$$

となる．これが伐採条件加算回数分布 $f_k(t)$ を決める方程式である．この方程式は $p_k(t)$ を与えれば，$k = 0,1$，2，…と順次解いていくことができる．

伐られるための条件加算回数分布 $f_k(t)$ は年齢 t までに加算回数が k 以上になる確率である．次に，$(t,\ t+dt)$ 時間以内に加算回数がちょうど k になる確率 $F_k(t)$ を求める．加算回数の増え方を排反なふたつの場合に分けて，

① $(0,\ t)$ に $k-1$ になっていて，$(t,\ t+dt)$ に k になる場合．

② i を2より大きな任意の値として，$(0,\ t)$ に $k-i$ になっていて，$(t,\ t+dt)$ に k になる場合．

とすると，①の場合の確率は，

$$f_{k-1}(t)\{p_{k-1}(t)dt+0(dt)\}$$

に等しく，また，②の場合の確率は，

$$\sum_{i=2}^{\infty} f_{k-i}(t)\{p_{k-i}(t)+0(dt)\}^i$$

となり，後の値は dt が限りなく小さなときには，無視することができるから，

$$F_k(t) = f_{k-1}(t)\cdot p_{k-1}(t)$$

となる．ここで，$p_k(t)$ は年齢 t における条件加算回数 k の増加率を表していると考えられる．林分内の樹木は時間とともに条件の違いによりいろいろな大きさになる．これら多数の樹木の生長経過には統一的な考えというものが認め難い．このような場合，伐られるための条件加算の増加率 $p_k(t)$ は逆に多数のものの平均として，また，一種の平衡状態にあると考えられる．それゆえ，ここでは増加率 $p_k(t)$ は年齢 t，条件加算回数 k とは無関係で一定で

$$p_k(t) = M$$

であると仮定する．いいかえれば，M は単位時間に伐られるための条件が加算される平均である．このように仮定すると，$f_k(t)$ の方程式は，

$$f_k'(t) = -M\cdot f_k(t)+M\cdot f_{k-1}(t) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$f_0'(t) = -M\cdot f_0(t)$$

$$f_0(0) = 1,\ f_k(0) = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる．これを解くと，

$$f_k(t) = \frac{(Mt)^k}{k!}\cdot \exp[-Mt]$$

$$F_k(t) = \frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot \exp[-Mt]$$

となる．ここで求めた $F_k(t)$ は，一斉同齢林内で樹木が伐られるまでの待ち時間の分布であり，樹木の寿命分布そのものである．

本数減少曲線の誘導

樹木の寿命分布 $F_k(t)$ より，植栽られた樹木が植栽後 $(j,\ j+1)$ 単位時間内に伐られる確率 $q(j)$ は，

$$q(j) = \int_j^{j+1} F_k(t)dt$$

となる．これより，林分内の樹木が j 年以上存続する確率 $r(j)$ を求めると，

$$r(j) = 1-q(1)-q(2)-\cdots-q(j-1) = \int_j^{\infty} F_k(t)dt$$

となる．樹木が j 年以上存続するということは，植栽された樹木が植栽後 j 年までには伐られずに残っているということである．これを林分全体の本数に置き換え

てやれば，林分の本数減少曲線が得られる．すなわち，ある林分が植栽本数 N_0 す新植されたとする．その林分の j 年における本数 $N(j)$ は

$$N(j)=N_0\cdot r(j)=N_0\int_j^\infty F_k(t)dt$$

として求めることができる．

樹木の寿命分布 $F_k(t)$ として前節で導いた関数を代入すると，

$$r(j)=\int_j^\infty\frac{M(Mt)_k^{-1}}{(k-1)!}\cdot\exp[-Mt]dt$$

となる．ここで，

$$(k-1)!=\Gamma(k)$$

であり，

$$k=\frac{n}{2},\ Mt=\frac{\chi^2}{2}$$

とおくと，

$$r(j)=\frac{2^{(-n/2)}}{\Gamma(n/2)}\int_{2Mj}^\infty(\chi^2)^{(n/2-1)}\cdot\exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right]d(\chi^2)$$

となる．これは自由度 $n=2k$ の χ^2 分布の上側確率と等しく，分布関数表より，林分内の樹木が j 年以上存続する確率 $r(j)$ の値を求めることができる．さらに，植栽本数 N_0 にこの値を掛ければ本数減少曲線を求めることができる．

χ^2 分布は自由度によりその形状を変える．当然それにより，ここで求めた曲線の形状も変化する．ただ定義からも明かのように，

$$N(0)=N_0$$

$$N(\infty)=0$$

である．図−1に，ここで誘導した一斉同齢林分の樹木の本数減少曲線の一般的形状を示す．

χ^2 分布の上側確率の値は分布関数表より求めることができる．ただ，数表による方法は計算の自動化，電算プログラムへの組み込みにはなじまない．それゆえ，次節では数表による方法とは別に，χ^2 分布関数の近似式による方法について説明する．

近似式による曲線の計算方法

χ^2 分布関数は自由度 n が大きい場合，正規分布関数に近似することができる．自由度 n の χ^2 分布の上側確率を $Q(\chi^2;n)$，正規分布の上側確率を $Q(x)$ とする．χ^2 分布の上側確率の近似式は自由度 n の大きさにより分けられている．

自由度 $n>30$ の場合は Wilson-Hilferty (1931) の近似式

$$Q(\chi^2;n)\fallingdotseq Q(x)$$

$$\text{ただし，}x=\frac{\left[\frac{\chi^2}{n}\right]^{1/3}-\left[1-\frac{2}{9n}\right]}{\sqrt{\frac{2}{9n}}}$$

がよい．

自由度 $n>100$ の場合は Fisher(1925)の近似式

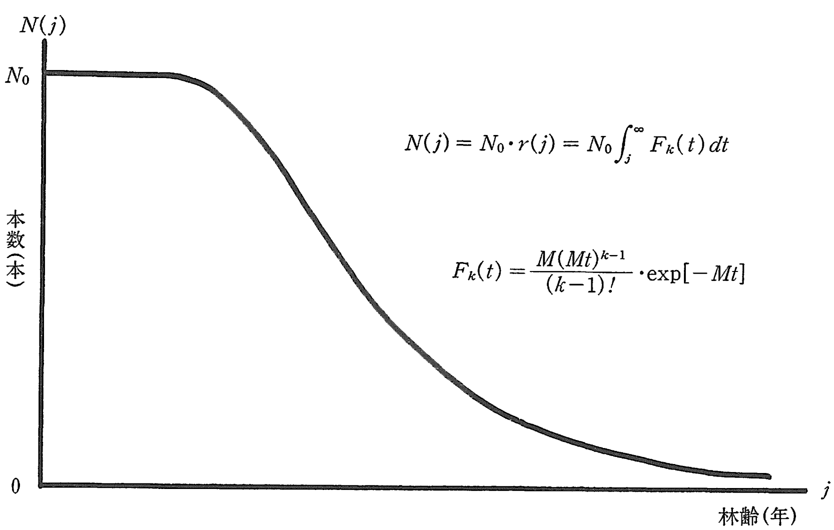
$$Q(\chi^2;n)\fallingdotseq Q(x)$$

$$\text{ただし，}x=\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2n-1}$$

が適当である．

さらに，自由度 n が非常に大きい場合には，χ^2 分布の極限分布

$$Q(\chi^2;n)\fallingdotseq Q(x)$$



図−1　一斉同齢林分の樹木本数減少曲線の一般的形状

ただし，$x=\dfrac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}$

を利用すればよい．

自由度 n が30以下の場合には，とくによい近似式はない．ただ，上記の WILSON–HILFERTY の近似式や FISHER の近似式を用いても，一斉同齢林分内の樹木の本数を推定する限りにおいては特に実用に支障となる誤差はでないであろう．

このように，自由度 n の大きさにより用いる近似式は異るが，それぞれ最終的には正規分布の上側確率よりその値を求めることができる．正規分布の上側確率もまた正規分布関数の近似式により求める．正規分布関数の近似式については，数種発表されているが，ここでは HATINGS, *et al.* (1955) の近似式

$$Q(x)=\frac{1}{2}(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6)^{-16}+err(x)$$

$$|err(x)|<1.5\times10^{-7}$$

$$a=0.0498673470$$
$$b=0.0211410061$$
$$c=0.0032776263$$
$$d=0.0000380036$$
$$e=0.0000488906$$
$$f=0.0000053830$$

を用いることにする．この近似式は，計算が簡単な四則演算だけですみ，しかも非常に精度がよい．

以上，χ^2 分布関数ならびに正規分布関数に対する近似式を用いて，林分の本数減少曲線の元になる林分内の樹木が j 年以上存続する確率 $r(j)$ を求めることができる．なお，χ^2 分布関数ならびに正規分布関数に対する近似式については ABRAMONITZ & STEGUN (1972) より引用した．

おわりに

混合マルコフ過程を応用し，樹木が伐られるまでの待ち時間という概念を導入し，まず一斉同齢林分内の樹木の寿命分布を誘導し，さらにそれより林分内の本数減少曲線を誘導した．ここで用いた方法は，時間は連続量，状態は離散量として扱う混合マルコフ過程の中でも最も単純な純出生過程の応用である．すなわち，時間間隔 $(t, t+dt)$ において，そのまま元の状態に留まっているか，あるいはその間に移動するとしても，一つ上の状態にしか移動できないとするものである．このような最も単純な過程の応用ではあるが，一斉同齢林分内の樹木の本数減少に対して，若干の理論付けができたと考える．

本論では，一斉同齢林分の本数減少曲線の誘導ならびにその計算方法までしか示すことはできなかった．次報では，実際にこの曲線式をあてはめた結果について報告する．その際，曲線式のパラメータの値を決める必要があるが，これについても検討を加える予定である．

引用文献

1. ABRAMONITZ, M. and I.A. STEGUN : HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS WITH FORMULAS GRAPHS AND MATHEMATICAL TABLES, Dover publication, INC., New York, 1046pp, 1972
2. 鈴木太七：木材の生産予測について，科学技術庁資源局　113pp. 1961
3. 鈴木太七：木材の生産予測について(II)，科学技術庁資源局　54pp, 1963
4. 山本充男：減反率と直径生長の関係　第1報　新しい減反率モデルの誘導，島根大学農学部研究報告 **15** : 42–46, 1981
5. 山本充男：減反率と直径生長の関係　第2報　減反率およびパラメータの決定，島根大学農学部研究報告　**16** : 44–47, 1982