島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) **16** : 44－47, 1982

減反率と直径生長の関係

第2報　減反率およびパラメータの決定

山　本　光　男*

Mitsuo YAMAMOTO

Relation between "Gentan Probability" and "Diameter Growth"
2. Determination of "Gentan Probability" and its parameters.

緒　　言

第1報[4)]において，直径生長が Mitscherlich の法則に従うものとして2つの新しい減反率モデル（林分の寿命分布を与える公式 $F_k(t)$）を導びいた．すなわち，時刻 t における直径k の生長率 $p_k(t)$ が時間・直径に無関係で一定であるとした従来の減反率モデル Case I. に対し，生長率が時間のみの関数であるとして導びいた Case II.，さらに直径のみの関数であるとした Case III. である．

Case I. $p_k(t)=M$

$$F_k(t)=\frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-Mt}$$

Case II. $p_k(t)=Nce^{-ct}$

$$F_k(t)=\frac{\{N(1-e^{-ct})\}^{k-1}}{(k-1)!}\exp[-N(1-e^{-ct})]Nce^{-ct}$$

Case III. $p_k(t)=c(N-k)$

$$F_k(t)=\frac{N!c}{(k-1)!(N-k)!}(e^{-ct})^{N-k+1}(1-e^{-ct})^{k-1}$$

本論では，これら3種の減反率モデルについて，実際に用いる場合どのようにして減反率を求めるのか，また式中に現われるパラメータをどのように決めるかについて報告する．

減 反 率 の 決 定

林分の寿命分布 $F_k(t)$ が与えられていれば，$(j, j+1)$ 単位時間内に，林分が伐採される確率，すなわち減反率 $q(j)$ は，

$$q(j)=\int_j^{j+1}F_k(t)dt$$

となる．また，j 齢級以上林分が存続する確率，これを保存率 $r(j)$ と言う，これは，

$$r(j)=1-q(1)-q(2)-\cdots-q(j-1)$$
$$=\int_1^{\infty}F_k(t)dt$$

と計算される．次に，それぞれの場合について，$q(j)$ および $r(j)$ を計算する．

Case I. $F_k(t)=\frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-Mt}$

減反率 $q(j)$ は，

$$q(j)=\int_j^{j+1}\frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-Mt}dt$$

であり，ここで，

$$k=n/2,\ x=\chi^2/2$$

とおくと，

$$q(j)=\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_{2Mj}^{2M(j+1)}e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$
$$=\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_{2Mj}^{\infty}e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$
$$-\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_{2M(j+1)}^{\infty}e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$

となる．また，保存率 $r(j)$ は，

$$r(j)=\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_{2Mj}^{\infty}e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$

である．これらはいずれも自由度 $n=2k$ の χ^2―分布表から，それらの値を求めることができる．

自由度 n の χ^2―分布表は，

* 森林計画学研究室

$$P=\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_x^\infty e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$

のそれぞれの P に対する x の値が掲載されているから，自由度 $2k$ の欄の x および P を，それぞれ横軸縦軸にとって，グラフを描くことができる．このグラフの上，$2M$ の整数倍，

$0,\ 2M,\ 4M,\ldots$

などの x の値に対する，グラフの高さの差が，それぞれの齢級の減反率である．[2)3)]

Case II. $F_k(t)=\dfrac{\{N(1-e^{-ct})\}^{k-1}}{(k-1)!}\exp[-N(1-e^{-ct})Nce^{-ct}$

減反率 $q(j)$ は，

$$q(j)=\int_j^{j+1}\frac{\{N(1-e^{-ct})\}^{k-1}}{(k-1)!}\exp[-N(1-e^{-ct})]Nce^{-ct}dt$$

で，ここで

$x=N(1-e^{-ct})$

とおくと，

$$q(j)=\int_{N(1-e^{-cj})}^{N(1-e^{-c(j+1)})}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-x}dx$$
$$=\int_0^{N(1-e^{-c(j+1)})}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-x}dx$$
$$-\int_0^{N(1-e^{-cj})}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-x}dx$$

となる．Case I. と同様に，

$k=n/2,\ x=\chi^2/2$

と変換することにより，

$$q(j)=\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^{2N(1-e^{-c(j+1)})}e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$
$$-\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^{2N(1-e^{-cj})}e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$

となる．また，保存率 $r(j)$ は，

$$r(j)=1-\frac{2^{-n/2}}{\Gamma n(n/2)}\int_0^{2N(1-e^{-cj})}e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{n/2-1}d(\chi^2)$$

となり，Case I. と同様，いずれも自由度 $n=2k$ の χ^2 一分布表から，それらの値を求めることができる．

Case I. では，$2M$ の整数倍の x の値に対するグラフの高さの差が，それぞれの齢級の減反率であったが，この場合は，$2N(1-e^{-cj})$ の値，すなわち，

$0,\ 2N(1-e^{-c}),\ 2N(1-e^{-2c}),\ldots\ldots$

などの x の値に対するグラフの高さの差が，それぞれの齢級における減反率である．

Case III. $F_k(t)=\dfrac{N!c}{(k-1)!(N-k)!}(e^{-ct})^{N-k+1}(1-e^{-ct})^{k-1}$

減反率 $q(j)$ は，

$$q(j)=\int_j^{j+1}\frac{N!c}{(k-1)!(N-k)!}(e^{-ct})^{N-k+1}(1-e^{-ct})^{k-1}dt$$

であり，ここで，

$x=e^{-ct}$

とおくと，

$$q(j)=\int_{e^{-cj}}^{e^{-c(j+1)}}\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx$$
$$=\int_0^{e^{-cj}}\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx$$
$$-\int_0^{e^{-c(j+1)}}\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx$$
$$=\frac{\int_0^{e^{-cj}}x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx}{\int_0^1 x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx}-\frac{\int_0^{e^{-c(j+1)}}x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx}{\int_0^1 x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx}$$

となる．さらに，ここで，

$v=2k,\quad w=2(N-k+1)$

$$\frac{w}{w+vt}=x$$

とおくと，

$$\frac{\int_0^{e^{-cj}}x^{N-t}(1-x)^{k-1}dx}{\int_0^1 x^{N-k}(1-x)^{k-1}dx}=\frac{v^{v/2}/w^{w/2}}{B(v/2,\ w/2)}\int_{(e^{cj}-1)w/v}^\infty t^{(v-2)/2}(w+vt)^{-(v+w)/2}dt$$

であるから，減反率 $q(j)$ は，

$$q(j)=\frac{v^{v/2}w^{w/2}}{B(v/2,\ w/2)}\int_{(e^{cj}-1)w/v}^{(e^{c(j+1)}-1)w/v}t^{(v-2)/2}(w+vt)^{-(v+w)/2}dt$$
$$=\frac{v^{v/2}w^{w/2}}{B(v/2,\ w/2)}\int_{(e^{cj}-1)w/v}^\infty t^{(v-2)/2}(w+vt)^{-(v+w)2}dt$$
$$-\frac{v^{v/2}w^{w/2}}{B(v/2,\ w/2)}\int_{(e^{c(j+1)}-1)w/v}^\infty t^{(v-2)/2}(w+vt)^{-(v+w)2}dt$$

となる．保存率 $r(j)$ は，

$$r(j)=\frac{v^{v/2}w^{w/2}}{B(v/2,\ w/2)}\int_{(e^{cj}-1)w/v}^\infty t^{(v-2)/2}(w+vt)^{-(v+w)/2}dt$$

となり，いずれも，自由度 $v=2k,\ w=2(N-k+1)$ の F 一分布表からそれらの値を求めることができる．

自由度 $v,\ w$ の F—分布表は，

$$P=\frac{v^{v/2}w^{w/2}}{B(v/2,\ w/2)}\int_x^\infty t^{(v-2)/2}(w+vt)^{-(v+w)/2}dt$$

のそれぞれの P に対する x の値が掲載されているか

ら，自由度 $v=2k$, $w=2(N-k+1)$ の欄の x および P をそれぞれ横軸，縦軸にとって，グラフを描き，このグラフの上に，$(e^{cj}-1)w/v$ の値，すなわち，

$0,\ (e^{c}-1)w/v,\ (e^{2c}-1)w/v, \ldots\ldots$

などの x の値に対するグラフの高さの差がそれぞれの齢級の減反率である．

以上，各種の減反率モデルについて，減反率決定の際用いる分布表，自由度などをまとめると表－1のとおりである．

表－1　各モデルにおける減反率決定法

	自由度	使用分布表	横軸の刻み幅
Case Ⅰ	$n=2k$	χ^2—分布表	$2M$
Case Ⅱ	$n=2k$	χ^2—分布表	$2N(1-e^{-c})$
Case Ⅲ	$v=2k$ $w=2(N-k+1)$	F—分布表	$\dfrac{(e^{c}-1)w}{v}$

パラメータの決定

次に，個々の場合について，それぞれの式中に現われるパラメータの決め方について述べる．すなわち，Case I. については k および M, Case II. と Case III. については c, N ならびに k をどのようにして決めるかについて考察する．

Case I. k, M の決定

伐期齢の平均値 $E(t)$ および分散 $Var(t)$ は

$$E(t)=\frac{k}{M},\quad Var(t)=\frac{k}{M^2}$$

であるから，伐採実績よりそれらの平均伐期齢，伐期齢分散を求め，上の式に代入することにより

$$k=\frac{\{E(t)\}^2}{Var(t)},\quad M=\frac{E(t)}{Var(t)}$$

となり，パラメータが決定できる．

Case II. k, c, N の決定

c, N は Mitscherlich 式の係数であり，

$$y=N(1-e^{-ct})$$

のように定義されている．それ故，対象林分の平均直径を最小二乗法等で上式にあてはめ，c, N の値を決めるのがよい．k については，対象林分の伐採実績より，伐期齢の$1-e^{-ct}$ の平均を求め，それが

$$E(1-e^{-ct})=\frac{k}{N}I_N(k+1)$$

になることから k を求める．

Casse III. k, c, N の決定

c, N については，Case II. と同じ方法で求めればよい．k は伐採実績より，それらの伐期齢の e^{-ct} の平均値を求め，それが

$$E(e^{-ct})=\frac{N-k+1}{N+1}$$

となるので，k について解いて，

$$k=\{E(e^{-ct})-1\}(N+1)$$

として k を求める．

このようにして求めたパラメータの関係について述べる．k はその定義から明らかなようにすべての Case について等しい．また，Case II, III の c, N は共通である．そこで Case I の M と II, III のc N の関係を調べると，定義から伐採齢を T とすると

$$k=MT$$

$$k=N(1-e^{-cT})$$

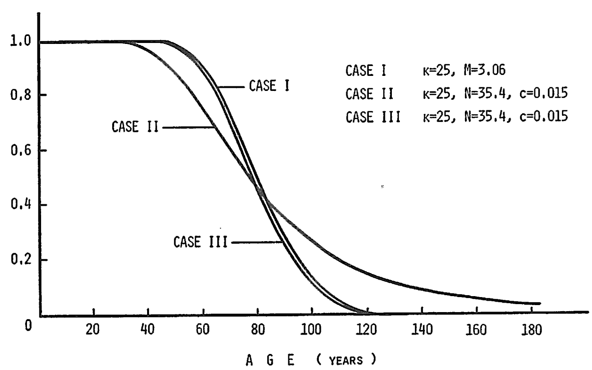
であるので，T を消去して

$$\frac{k}{M}=-\frac{1}{c}\ln\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

となる．すなわち

$$M=-\frac{ck}{\ln\left(1-\frac{k}{N}\right)}$$

となる．



図－1　各種モデルによる減反曲線例

この関係より，次のようにパラメータの値を決め減反率計算を試みた．（図－１）

$k=25,\quad M=3.06$

$c=0.015,\quad N=35.4$

尚，計算には当研究室にあるパーソナルコンピュータＦＭ－８を用い，正規分布等の近似式[1]として次のものを用いて行った．

$$Q(\chi^2|n)\simeq Q(x_2)$$

$$x_2=\frac{(\chi^2/n)^{1/3}-(1-2/9n)}{(2/9n)^{1/2}}\quad(n>30)$$

$$Q(x)=\frac{1}{2}(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6)^{-16}+err(x)$$

$$|err(x)|<1.5\times10^{-7}$$

$a=0.0498673470$

$b=0.0211410061$

$c=0.0032776263$

$d=0.0000380036$

$e=0.0000488906$

$f=0.0000053830$

$$I_x(a,\ b)=Q(\chi^2|n)+err\quad(if(a+b-1)(1-x)\leq0.8)$$

$$|err|<5\times10^{-3}$$

$$\chi^2=(a+b-1)(1-x)(3-x)-(1-x)(b-1)$$

$$n=2b$$

$$I_x(a,\ b)=P(y)+err\quad(if(a+b-1)(1-x)\geq0.8)$$

$$|err|<5\times10^{-3}$$

$$y=\frac{3[v(1-1/9b)-w(1-1/9a)]}{\left(\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{a}\right)^{1/2}}$$

$$v=(bx)^{1/3}$$

$$w=[a(1-x)]^{1/3}$$

ただし，

$Q(\chi^2|n)$：自由度 n のカイ２乗分布の上側分布

$Q(x)$　：正規分布の上側分布

$P(y)$　：正規分布の下側分布

$I_x(a,\ b)$：不完全ベータ関数比

である．

ま　と　め

第１報において誘導した減反率モデルについて，その減反率の決定法ならびにパラメータの決め方を明らかにすることができた．すなわち，それぞれのモデルとも種々の変換を施すことにより，統計でよく用いられている理論分布に帰着すること，さらにその分布表より減反率が容易に求まることを示した．また，パラメータについては，対象となる林分の伐採実績ならびに平均直径生長などから決め得ることを示した．

引　用　文　献

1. Abramonitz, M. and I. A. Stegun：HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS WITH FORMULAS GRAPHS AND MATHEMATICAL TABLES, Dover Publications, INC., New York, 1046pp., 1972
2. 鈴木太七：木材の生産予測について　科学技術庁資源局 113pp., 1961.
3. 鈴木太七：木材の生産予測について（II）　科学技術資源局 54pp., 1963.
4. 山本充男：島根大学農学部研究報告　**15**：42－46, 1981.

Summary

As to the following formulas which give the life span distribution of forest stands,

$$\text{Case I}\quad F_k(t)=\frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!}\exp[-Mt]$$

$$\text{Case II}\quad F_k(t)=\frac{N(1-e^{-ct})^{k-1}}{(k-1)!}\exp[-N(1-e^{-ct})]Nce^{-ct}$$

$$\text{Case III}\quad F_k(t)=\frac{N!k}{(k-1)!(N-k)!}(e^{-ct})^{N-k+1}(1-e^{-ct})^{k-1}$$

the auther showed the way to determine the "Gentan probability" $q(j)$ and the parameters. That is, some trasformations lead the $q(j)$ in Case I and II to the chi-distribution with the degree of freedom $2k$. In Case III $q(j)$ is led to the F-distribution with the degree of freedom $2k$ and $2(N-k+1)$. And it was showed that the parameters can be calculated by the records of cutting and the data on the diameter growth of forest stands.