

非計量的な多次元尺度構成法に関する検討

—対間比較法における単調性の指標と反復解法について—

高 山 草 二*

Soji TAKAYAMA

A Study on nonmetric multidimensional scaling
—the index of monotonicity and iterative method in the
pairwise nonmetric multidimensional scaling—

0. はじめに

我々の経験の対象は本来多次元的構造をもつものが多く、様々な側面からの記述が可能である。対象の構造を分析する場合、いくつかの基本的次元に還元して、数量的に把握しようという試みがなされている。多次元尺度構成法 (Multidimensional Scaling; MDS) は、対象のかくされた構造をとりだして多次元空間に配置するという形で、対象のもつ基本的性質を捉えようとするきわめて有力な分析法である。

MDS は扱うデータの性質により計量的 (metric) MDS と非計量的 (nonmetric) MDS の二つに分けられる。計量的 MDS は Torgerson (1952) によって提案されたもので、間隔尺度レベルに達しているデータを必要とする。非計量的 MDS は Shepard (1962, a, b) によって提案されたもので、データが順序尺度のレベルに達していれば適用可能である。本論文で扱うのは非計量的 MDS であるが、計量的 MDS よりもはるかに広い適用範囲をもっているので、最近ではほとんどこれが使われ、多くの研究を生み出しつつある。

非計量的 MDS では、データとして尺度化すべき n 個の対象 (1, 2, ..., n) に関して、二つの対象 i, j の間に順序尺度のレベルで測定された相違度 r_{ij} が与えられる。ここで $r_{ij} = r_{ji}$ と仮定する。非計量的 MDS の目的は、最小の次元数 (m) の空間に、点 i と点 j との距離 d_{ij} が r_{ij} と単調関係となるような n 個の点の空間布置を求めることにある。ここで、 d_{ij} をユークリッドの距離とし、 n 個の点の座標を

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

と表わすと、 d_{ij} は

$$d_{ij} = d(X_i, X_j) = \left\{ \sum_{t=1}^m (x_{it} - x_{jt})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

非計量的 MDS は、直接法と間接法に分けることができる (中谷, 1977)。間接法には Kruskal (1964, a, b) の方法と、Guttman (1968) の方法とがあり、まず d_{ij} に近い値でしかも r_{ij} の順位を満たす弱単調行列 \hat{d}_{ij} を求め、この \hat{d}_{ij} と d_{ij} とのずれを最小にすることによって r_{ij} と d_{ij} を単調な関係にしようとする。 r_{ij} と d_{ij} では尺度のレベルが違い、単調性を評価しにくいいため、 r_{ij} と単調な関係にある \hat{d}_{ij} の推定というステップを入れるのである。 \hat{d}_{ij} の推定方式をきわめて単純化してみると次のようになる。 (r_{ij}, r_{kl}) と (d_{ij}, d_{kl}) の順序関係が一致しない場合、Kruskal では d_{ij} と d_{kl} の値の平均値を $\hat{d}_{ij}, \hat{d}_{kl}$ とする。これに対し Guttman では d_{ij} と d_{kl} の値を互に入れ換えて $\hat{d}_{ij}, \hat{d}_{kl}$ とする。Kruskal の場合、 d_{ij} と \hat{d}_{ij} のずれの指標はストレス (Stress) と呼ばれ、

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i < j} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i < j} d_{ij}^2}}$$

であり、それに対応する Guttman の指標としては、

$$K = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad \mu = \frac{\sum_{ij} \hat{d}_{ij} d_{ij}}{\sum_{ij} \hat{d}_{ij}^2 \sum_{ij} d_{ij}^2}$$

とされる離間係数 (Coefficient of alienation) が使われる。両方法とも最適化に最急降下法 (Method of steepest descent) 又はこれと同等な方法が用いられる

* 島根大学教育学部心理学研究室

直接法は、直接 d_{ij} と r_{ij} の単調関係を最大にする空間布置を求めようとするもので、 \hat{d}_{ij} の推定が介在しない点が間接法と異なる。直接法には中谷 (1977) の一般化共分散法と Johnson (1973) の対間比較法とがある。中谷は一般化共分散法として二種の方法 (第一位相と第二位相) を提案しているが、直接法に属する第一位相では単調性の指標として次の一般化相関係数 P が使われる。

$$P = \frac{\sum_{i,j,k,l} \text{sign}(r_{ij}-r_{kl}) (d_{ij}^2-d_{kl}^2)}{\sqrt{\sum_{i,j,k,l} \text{sign}(r_{ij}-r_{kl})^2 \sum_{i,j,k,l} (d_{ij}^2-d_{kl}^2)^2}}$$

P を最大化することは、制約条件 $\sum_{i=1}^m x_{it}^2 = Ct$ (一定), $t=1, \dots, m$ のもとで、一般化共分散 Γ

$$\Gamma = \frac{1}{M} \sum_{i,j,k,l} \text{sign}(r_{ij}-r_{kl}) (d_{ij}-d_{kl}), M = \binom{m}{2}$$

を最大化することになる。この一般化共分散法は、従来の非計量的 MDS が降下法による反復計算を必要とするのに対して、一回の固有値問題の解を求めれば良いという非常に有効な方法である。一方、Johnson の対間比較法 (Pairwise Nonmetric Multidimensional Scaling) は、降下法による反復解法を用いるが、従来の方法の中では最も単純なものとされている。しかし、それだけに多くの問題点をも含んでいる (田中, 1976)。そこで、本論文ではこの対間比較法をとりあげ、その問題点を再検討して、若干の修正を試みてみたい。

1. Johnson の対間比較法とその問題点

Johnson は単調性の指標として次の関数 θ^2 を考える。

$$\theta^2 = \frac{\sum \delta_{ij,kl} (d_{ij}-d_{kl})^2}{\sum (d_{ij}^2-d_{kl}^2)^2}, \quad i < j, k < l$$

$$\text{ただし, } \delta_{ij,kl} = \begin{cases} 1 \cdots \text{sign}(d_{ij}-d_{kl}) \\ \quad \quad \quad \times \text{sign}(d_{ij}-d_{kl}) \\ 0 \cdots \text{その他のとき} \end{cases}$$

分子は相違度の対 (r_{ij}, r_{kl}) の順位関係と、対応する点間距離の対 (d_{ij}, d_{kl}) の順位関係とが一致しない時に、 $(d_{ij}^2-d_{kl}^2)^2$ 加算される。従って、 θ^2 は、一致しない対の $(d_{ij}^2-d_{kl}^2)^2$ の和が、比較された全ての対の $(d_{ij}^2-d_{kl}^2)^2$ の総和に占める比率を表わすものである。また、分母は d_{ij}^2 の分散に比例する値なので、 θ^2 は一致しない対が d_{ij}^2 の分散に占める比率を意味するものとしても解釈しうる。 θ^2 は完全な単調関係の時 0

となり、その逆の時 1 となる。

最適化には、最急降下法の中でも最も単純なものが用いられる。 θ^2 の分子と分母をそれぞれ U, V とすれば、勾配は次式となる。

$$\frac{\partial \theta^2}{\partial X} = \frac{1}{V^2} \left(V \frac{\partial V}{\partial X} - U \frac{\partial U}{\partial X} \right).$$

これを単純化のため $V/4$ 倍し、勾配行列 G とする。

$$G = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U}{\partial X} - \theta^2 \frac{\partial V}{\partial X} \right).$$

ここで、 ii 要素と jj 要素は 1, ij 要素と ji 要素は -1 となる $n \times n$ の行列を E_{ij} とすれば、

$$\frac{\partial (d_{ij}^2-d_{kl}^2)}{\partial X} = 4(d_{ij}^2-d_{kl}^2) (E_{ij}-E_{kl}) X$$

となるから、2つの $n \times n$ の行列 π_u, π_v を定義し、

$$\pi_u = 4 \sum \delta_{ij,kl} (d_{ij}-d_{kl}) (E_{ij}-E_{kl})$$

$$\pi_v = 4 \sum (d_{ij}-d_{kl}) (E_{ij}-E_{kl})$$

を求めれば、勾配は次式となる。

$$G = (\pi_u - \theta^2 \pi_v) X.$$

降下法のステップ幅としては、一律に θ^2 の平方根 θ を使い、次の逐次修正式によって最適の空間布置に近づけていく。

$$X_{s+1} = X_s - \theta_s G_s, \quad (s \text{ は反復回数})$$

この方法は、 \hat{d}_{ij} の推定を必要としない非常に単純なアルゴリズムであり、プログラムも FORTRAN で 200 命令以下、Kruskal の方法の約 $1/10$ の長さであるという。

対間比較法の問題点として第一にあげられるのは、Johnson 自身も述べているように、対象の数 n が増えるにつれて計算時間が n^4 に比例して増加するということである。これは四重ループの中で M 回の対間比較を行なって、 θ^2, π_u, π_v を求めるためである。しかしながら、この問題点はアルゴリズムを修正することによってある程度克服できるものである。例えば、 θ^2 の分母 V は d_{ij}^2 の分散に比例するので、 V を四重ループ内で求めるかわりに、 ij の二重ループから求めれば $\binom{n}{2}$ 回の計算ですませることができる。また、 V の導関数は、

$$\frac{\partial}{\partial X} \left\{ n \Sigma (d_{ij}^2)^2 - (\Sigma d_{ij}^2)^2 \right\} \\ = \Sigma \left\{ n d_{ij}^2 - \Sigma d_{ij}^2 \right\} E_{ij} X$$

という形で計算しておけば、 $\binom{n}{2}$ のオーダーの計算ですむ。 π_n と U については、順位的一致しない対が減少すれば、四重ループ内の計算はかなり減らすことができる。実際、上記のようにプログラムを変更して計算してみると、一回の反復の所要時間は変更前の半分近くに減少した。間接法に較べると、対象数の増加につれて効率が悪くなるという事態はある程度避けうる訳である。

第二の問題点は、逐次修正式のステップ幅として一律に θ を用いていることである (田中, 1977)。降下法において、ステップ幅は重要な問題であり、Kruskal の場合にはかなり慎重な配慮がされている。彼の方法では、ステップ幅は $\alpha / \text{mag}(\mathbf{G})$ により求められる。勾配行列 \mathbf{G} の要素を g_{ij} とすれば、

$$\text{mag}(\mathbf{G}) = \frac{\sqrt{\sum_{ij} g_{ij}^2}}{\sqrt{\sum_{ij} x_{ij}^2}}$$

さらに、 α は前回の α と次の三因子の積によって求められる。

- ①角度因子 (angle factor) = $4.0^{(\cos \omega)^{2.0}}$
 ω は現勾配と、直前の勾配のなす角度である。

- ②緩和因子 (relaxation factor)

$$= \frac{1.3}{1 + (5 \text{ ステップ比})^{5.0}}$$

ここで

$$5 \text{ ステップ比} = \min \left[1, \frac{\text{今回のストレス}}{5 \text{ 回前のストレス}} \right]$$

- ③幸運因子 (good luck factor)

$$= \min \left[1, \frac{\text{今回のストレス}}{\text{前回のストレス}} \right]$$

幸運因子といった名称からもわかるように、このステップ幅の決め方は、Kruskal によると、計算常識と経験により望ましいとされたという (林, 他, 1976)。このような手のこんだ方法を用いるのが、経験的にしても、適切であるのなら、対間比較法の一律のステップ幅 θ は、収束のコースによって大きすぎたり、小さすぎたりする場合が生じうるであろう。このステップ幅の問題を解決するのに、最小の θ^2 を勾配の方向に沿って探索するという方法が考えられる。これには直線に沿った探索法として様々な方法があるが、いずれにしても、 θ^2 の値を何度も求める必要がある。直接法の場合、 \hat{d}_{ij} の

計算は不必要なので、この関数計算はかなり単純なものとなり、全体の計算量はそれ程大きくはならないであろう。

2. 直線に沿った探索法による修正

この方法では、逐次修正式のステップ幅を前もって設定せずに、各ステップごとにその勾配の方向で θ^2 を最小にする空間布置をもたらすステップ幅を算出していく。最適なステップ幅を求めるアルゴリズムに二次式による補間法を用いた (一般に最小値付近では二次式で十分に関数を近似させうる; Jacoby et al, 1972)。まず、 θ^2 が減少する方向にステップ幅を一定率で増減させていって、 θ^2 の最小値を含む区間を見つけだし、その区間で二次式による最小値の推定を行なう。次のステップは、この推定された位置から開始される。一般には推定値に一定の精度が得られるまで補間を繰り返すが、ここでは一回のみの補間で推定を行なった。

この修正した対間比較法 (以下、修正対間比較法) と、Johnson のもとの対間比較法 (以下、原対間比較法) とを、いくつかの人工的なデータを適用することによって比較検討した。8 個の点で「4」を描いた時の点間距離の実測値を入力データとしてみた (これは誤差を含まないので、 θ^2 は完全に 0 に収束するはずである)。乱数発生による同一の初期布置から始めてみたが、両方法とも 50 回以上の反復を行なっても完全には収束しなかった。順位的一致しない対が各 6 組残っている。収束の速度は、反復回数に関して言えば修正対間比較法の方が

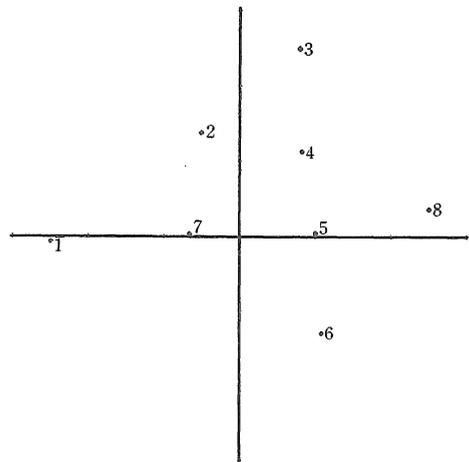


図1 8 個の点の修正対間比較法による分析結果、2 次元空間布置

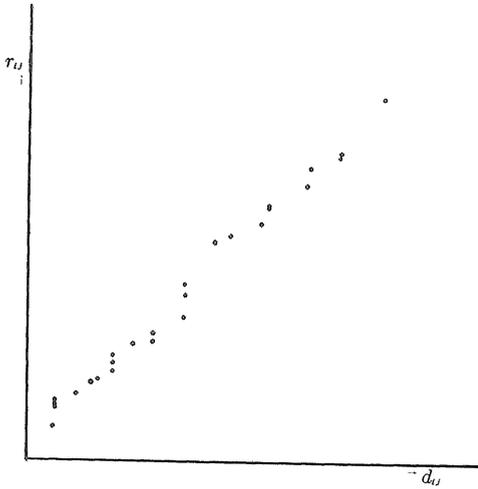


図2 8個の点の修正対間比較法による分析結果,
 $r_{ij}-d_{ij}$ 散布図

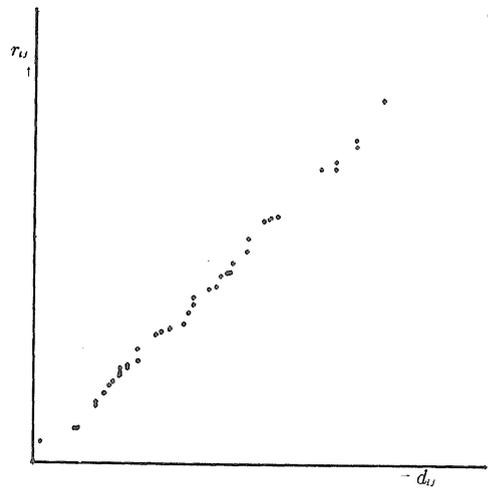


図3 10個の点の修正対間比較法による分析結果,
 $r_{ij}-d_{ij}$ 散布図

かなり速い。(表1 a参照)。しかし、原対間比較法では一回の反復に約一分要するのに対し、修正対間比較法では最適なステップ幅を求めるための θ^2 の計算のみに約一分を要する。そのため、所要時間に関しては、両方法に差はほとんどなかった。(注1)

「4」の点の数を10個にした別のデータでは、原対間比較法では50回の反復でも θ^2 が収束しなかったが、修正対間比較法では12回の反復で θ^2 が0に収束した。(表1 b)。これは、原対間比較法のステップ幅 θ の不適切性の一例を示す結果として解釈しうるであろう。原対間比較法では X と G を正規化するので、対象数が多くなると θ^2 が相対的に大きすぎるようになり、収束を妨げてしまうのかもしれない。

その他の試みた例においては、上述した例を両極端として、その中間に位置する結果になっている。従って、修正対間比較法は、原対間比較法と較べて、同等もしくはより効率的な方法と言えるであろう。しかしながら、試みた数値例は誤差を含まない人工的なデータであったにもかかわらず、完全に収束しない場合がしばしば見られた。(図1は、修正対間比較法による8個の点の「4」の復元図である)。

図2は8個の点の「4」の、修正対間比較法の分析結果を $r_{ij}-d_{ij}$ の散布図の形で示したものである。(原対間比較法の場合も時間はかかるが、同様の結果を示している)。ここで、縦軸と平行に並んだ点が、数例あることに注目しなければならない。これは、Shepard (1974) が疑似退化 (quasidegeneracy) と呼んだ現象である。特に対象の個数が少ないと、単調関係に自由度が大きくなり、疑似退化が生じやすくなる。一般には、

表1 原対間比較法と修正対間比較法の収束過程

	反復回数	原対間比較法		修正対間比較法	
		θ^2	不一致数	θ^2	不一致数
(a)	1	6.55×10^{-1}	218	6.55×10^{-1}	218
	2	4.03×10^{-1}	161	4.00×10^{-1}	157
	3	6.39×10^{-2}	84	2.32×10^{-2}	77
	4	1.93×10^{-2}	72	3.93×10^{-3}	44
	5	9.69×10^{-3}	57	1.20×10^{-3}	26
	6	4.14×10^{-3}	48	3.58×10^{-4}	25
	7	1.99×10^{-3}	37	1.83×10^{-4}	11
	8	1.06×10^{-3}	32	8.65×10^{-5}	12
	9	6.14×10^{-4}	26	4.66×10^{-5}	9
	10	3.80×10^{-4}	23	2.14×10^{-5}	11
(b)	1	4.30×10^{-1}	444	4.30×10^{-1}	444
	2	6.06×10^{-2}	293	4.23×10^{-2}	256
	3	2.82×10^{-2}	253	2.37×10^{-2}	200
	4	2.24×10^{-2}	214	1.87×10^{-2}	198
	5	1.80×10^{-2}	209	1.34×10^{-2}	154
	6	1.26×10^{-2}	172	6.44×10^{-3}	106
	7	7.79×10^{-3}	164	2.12×10^{-3}	77
	8	4.58×10^{-3}	140	3.71×10^{-4}	38
	9	2.55×10^{-3}	123	5.36×10^{-5}	22
	10	1.33×10^{-3}	106	1.26×10^{-6}	8
	11	6.91×10^{-4}	81	3.21×10^{-8}	1
	12	3.64×10^{-4}	69	0.00	0

r_{ij} と d_{ij} になめらかな単調関係を推定するのが自然であり、また疑似退化によって得られた解は不安定なので、この現象は大きな問題点となる。しかし、非計量的MDSでは r_{ij} と d_{ij} の単調性のみを扱うので、この

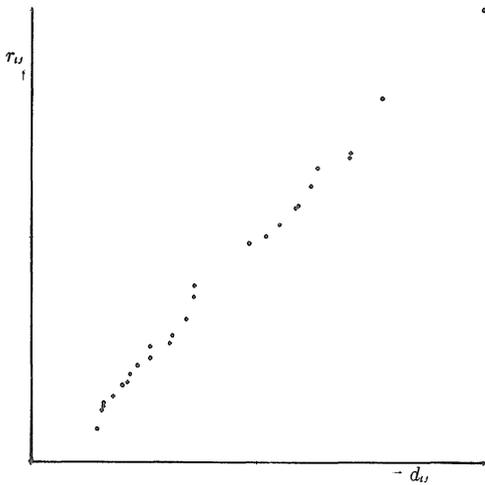


図4 8個の点のDSC(Q)法による分析結果、 $r_{ij}-d_{ij}$ 散布図

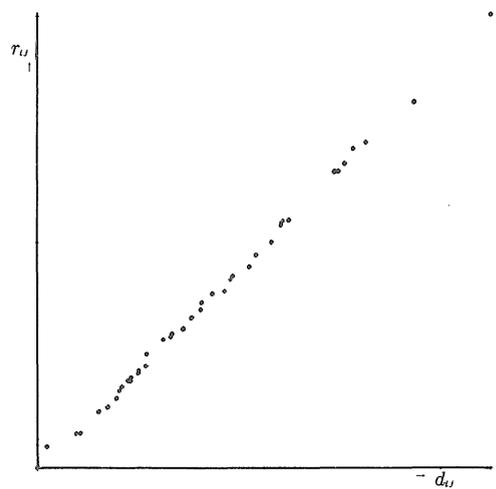


図5 10個の点のDSC(Q)法による分析結果、 $r_{ij}-d_{ij}$ 散布図

現象はある程度避けられないものである。Shepard は10個以下の対象数では分析をしないことを勧めているが、10個位の対象数でも r_{ij} に同じ値(タイ)があると疑似退化を生じやすい。これは単調性の自由度が増すためである。図3は10個のタイを含まないデータの $r_{ij}-d_{ij}$ の散布図である。かなりなめらかな形になっている。10個位が疑似退化の生じる限界の対象数と考えられるだろう。 θ^2 は (r_{ij}, r_{kl}) と (d_{ij}, d_{kl}) の順序関係により収束する。しかし、田中(1977)が指摘しているように、 $(d_{ij}^2-d_{kl}^2)$ の減少、すなわち、 d_{ij} と d_{kl} を同じ値に近づけることによっても減少してしまう。対間比較法の疑似退化は、このために生じるようである。対象数が少ない場合に特に適しているといわれる対間比較法であるが、疑似退化はその適用範囲で生じやすいのである。

前述のように、修正対間比較法では収束が速くなるが、最小値近くでは非常に収束が遅くなる。降下法では最終状態で探索の方向が限られてしまうので、こうなりやすいのである。この降下法の問題点を回避するために、間接法では可変計量法や二階の勾配法(Jacoby et al, 1972)が試みられるが、これらの方法は非常に大きな記憶容量を要し、超大型の計算機でないと扱えない(Shepard, 1974)。対間比較法は、概念的に単純なことは確かであるが、間接法に較べてプログラムが特に簡略なわけではない(中谷, 1977)。しかも、必要な記憶容量がKruskal(1964 b)に較べて少なくともすむというでもない。それ故、ここでは降下法や更に大規模な反復法とは全く異なる方向から最適化を検討してみよう。

一般に導関数を要する方法は、計算時間も記憶容量も

多くを要するが、目的関数のみを用いる方法はアルゴリズムも非常に単純で記憶容量も少なくてすむ。この種の方法で代表的なものに修正座標回転法(Davies, Swan, Campey 法; DSC 法)と共役方向法がある。これらの方法は収束も特に速くはないし、変数の数が多いと要する関数計算も非常に多くなる。しかし、対象数や次元数があまり多くなければ、ある程度適用可能であろう。DSC 法は、変数が多いと共役方向法よりも有利な傾向があるので(Frencher, 1967)、DSC 法を用いることにした。

また、単調性の指標 θ^2 は $d_{ij} \neq d_{kl}$ による減少が生じ、これが疑似退化の一つの原因とも考えられるので、別の指標を検討しよう。単調性の指標としては、属性相関として多くがあげられるが、これらは離散変量なので目的関数には不向きである。中谷の一般化相関係数は、変数の一方が連続変量で、この点問題はない。そこで、一般化相関係数をDSC法で最適化するという方法を検討してみることにした。

3. 一般化相関係数による方法

ここでは、一般化相関係数を単調性の指標としてとりあげ、無制約最適化の問題として扱う可能性を検討してみる。指標には、中谷の第一位相で用いられた関数を使う。しかし、このままでは、 P が r_{ij} と d_{ij} が単調関係になった時でも1にはならないという問題が生じる。そこで、完全な単調関係が成立した時の P の値に

対する比率を考え、それを Q とする。

$$Q = \frac{\sum \text{sign}(r_{ij}-r_{kl})(d_{ij}-d_{kl})}{\sum |\text{sign}(r_{ij}-r_{kl})(d_{ij}-d_{kl})|}$$

この Q は $-1 \leq Q \leq 1$ の値をとり、完全な単調関係で 1、その逆で -1 となるので、単調性の指標として自然な係数になる。ここで、求める空間布置を得るには、 Q を最大化すればいいわけである。 Q を関数の値のみを使って最大化する DSC 法を考えてみた。

n 個の対象の m 次元空間における座標を表わす $n \times m$ 個の変数を要素とするベクトルを x とする。また、逐次修正によって得られるベクトルは、 x の右下に添字をつけて区別する。DSC 法のアルゴリズムは次のものである。

- ①初期値を x_0 、互いに直交する方向を s_0, s_1, \dots, s_{n-1} とする。 $\Delta\lambda$ を与え、
 - ② $\max_{\lambda} Q(x_j + \lambda s_j)$ となる λ_j を求め、 $x_{j+1} = x_j + \lambda_j s_j$ とおく ($j=0, 1, \dots, n-1$)。
 - ③ $j=n-1$ まで実行したら、 $\max_{\lambda} Q\{x_n - \lambda(x_n - x_0)\}$ となる λ を求める。 $x_1 = x_n - \lambda(x_n - x_0)$ とおく。
 - ④ $\|x_1 - x_0\| < \Delta\lambda$ ならば、 $\Delta\lambda$ を $\lambda/10$ とおき、 $x_0 = x_1$ として、①にもどる。そうでなければ、⑤に進む。
 - ⑤ $\lambda_j \neq 0$ となった s_j について、Gram-Schmidt の直交化法によって直交化する。 $\lambda_j = 0$ となる s_j についてはそのまま、 $x_0 = x_n$ として①へもどる。
- ②においては二次式による補間法を用いた。また、直交

化法は、乗算回数が少なく、丸め誤差の小さい、修正された方法 (Jacoby et al, 1972) によった。

s_j 方向 ($j=0, 1, \dots, n-1$) の探索の後、次の基点を x_n にとり、新たに方向 s_j ($j=0, \dots, n-1$) を計算する。この時、第一の方向は $x_n - x_0$ の方向にとり、残りは直交するベクトルを求める方法によって計算する。ここで座標が回転されるので、修正座標回転法と名付けられている。以下、②における n 回の最大化を探索と呼び、 n 回の探索を一回の反復とする。 s_j の記憶には外部補助記憶を使うと、必要な内部記憶容量は、対間比較法の π_n, π_n に必要であった分の $2n^2$ 個を減らすことができる。

単調性の指標 Q と DSC 法により最大化する方法 (以下、DSC (Q) 法) を収束と疑似退化の二側面から検討した。前述の 8 個の点の「4」のデータを分析すると、5 回目の反復の 10 回目の探索で Q は 1 となった。しかし、所要時間は、対間比較法の 50 回反復の時間とほぼ等しく、約 1 時間かかった。(注 2) タイを含まない 10 個の点の「4」では、5 回目の反復の 14 回目の探索で完全に収束したが、約 4 時間かかっている。これらの例で、対間比較法では完全に収束せず、ある点で収束がとまったことを考えると、DSC (Q) 法は時間はかかるが確実に収束すると思われる。その他にも 5~10 個の人工的データについて分析してみたが、3~9 回の反復の範囲で完全に収束した。しかし、一回の探索に要する時間を減らさない限り、(より高速の計算機でも) 実用向きとは言い難い。10 個の点の「4」の例では、 Q の一回の計算は約 20 秒であるので、直線に沿った探索における

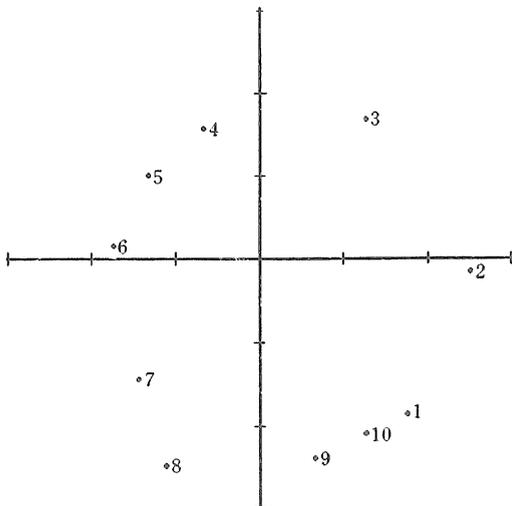


図 6 10 個の色彩の DSC (Q) 法による分析結果、2 次元空間布置

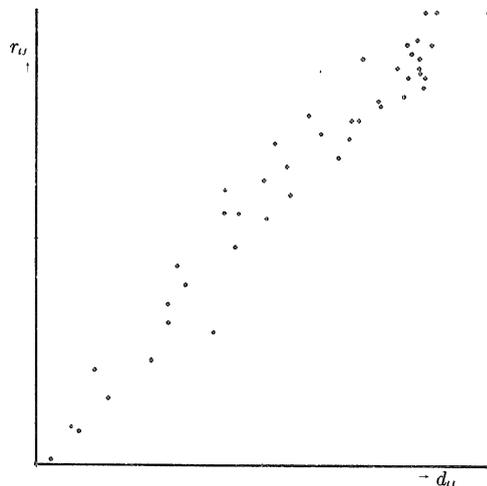


図 7 10 個の色彩の DSC (Q) 法による分析結果、 $r_{ij}-d_{ij}$ 散布図

$\Delta\lambda$ を適切に選べば、かなり時間が短縮できると思われる。アルゴリズム④の段階での判定条件と、 $\Delta\lambda$ の減少の仕方が収束に大きく影響するが、この為の最適化をさらに検討すべきである。また、初期値のとり方によって最初の方の探索で退化（二極構造）が生じてしまうことがあった。これは、 λ_j に最大値の制約条件を付加することによってある程度防げるようだが、このことが収束に与える影響ははっきりしない。

図4、5は、それぞれ8個と10個の点の例の分析結果である。図2・3と比較すると、DSC(Q)法では疑似退化が見られず、かなりなめらかな単調関係が得られたことがわかる。このなめらかな単調関係は12個の例でも見られるが、5個になると疑似退化が生じてしまう。これらの例からみる限り、ある程度の対象数があれば、DSC(Q)法は、少なくとも対間比較法よりは疑似退化が生じにくいと思われる。この点は、さらに多くの数値例で検討する必要がある。

DSC(Q)法は、かなり時間がかかるので、修正対間比較法である程度収束させてから、その結果をDSC(Q)法にかけるという方法も検討する意味があるだろう。

これまで、完全に収束するはずの人工的なデータについての適用例を述べてきたが、最後に誤差を含む実際のデータの分析結果を述べよう。Wish & Carroll (1974) が分析したデータに、Helm が色彩相互間の心理的距離を測定した実験結果がある。飽和度と明度を一定にした10種の色積を用いているが、この場合には分析結果が円環上に並ぶことが知られている（赤—緑、と青—黄の次元として解釈され、Hering の反対色説を支持するとされている）。正常な一人の被験者の結果をDSC(Q)法と修正対間比較法で分析してみた。DSC(Q)法の場合には、4回目の反復の6回目の探索で $Q = .9755$ とほぼ一定値になったので、そこで計算を打ち切って、空間布置図（図6）と $r_{ij} - d_{ij}$ の散布図（図7）を求めた。空間布置図は点がほぼ円環上に並んでいる。ただし、この図に表わされている軸は任意であり、前述の二次元にあうように回転する必要がある。修正対間比較法は、30回の反復で $\theta^2 = .00215$ まで減少し、ほぼ同様の空間布置図が得られた。不一致数は、DSC(Q)法では71個であったが、修正対間比較法では81個であった。

4. おわりに

非計量的MDSは「手づくりの味」であり、「機械的に適用してかなりの成果をおさめうるような方法ではない」と言う（林，他，1976）。本論文で扱った手法におい

ては特にその感が深い。いわゆる手作りのこつを身につけるには、計算機を会話形式で使う必要があるだろう。十分に注意すべき点として、局所的最小と初期値の決定の問題がある。本論文では主に人工的なデータを扱ったので検討しきれなかったが、この局所的最小（いわばにせの最小値）に関して、対間比較法とDSC(Q)法と比較していくというやり方で、単調性の指標や降下法の問題点を明らかにしうるかもしれない。また、タイの問題については分析例で少しふれたが、タイの扱い方には二つの方法、すなわち $r_{ij} = r_{kl}$ の時 $d_{ij} = d_{kl}$ を要求するものと要求しないものがある。本論文では後者をとったが、特に対象数が少ない時はどちらを選ぶかが大きな問題になる。この点も疑似退化との関連において検討すべきであろう。

注

- 注1) 演算速度はマイコン（アセンブラ語）使用、四重ループ改良で、ミニコン（BASIC語）の約 $\frac{1}{2}$ である。
注2) DSC(Q)法は12桁、対間比較法は6桁（分割精度）で計算し、命令語も違うので、所要時間は直接には比較できない。

引用文献

- Guttman, L. (1968), A general nonmetric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points. *Psychometrika*, 33, 469–506.
- 林知己夫・鮎戸弘（編）（1976）, 多次元尺度解析法, サイエンス社
- Jacoby, S. L. S., Kowalik, J. S. & Pizzo, J. T. (1972), *Iterative methods for nonlinear optimization problems*, Prentice-Hall, Inc. 関根智明（訳）1976：非線形最適化問題の反復解法, 培風館
- Johnson, R. M. (1973), Pairwise nonmetric multidimensional scaling, *Psychometrika*, 38, 11–18.
- Kruskal, J. B. (1964 a), Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika*, 29, 1–27.
- Kruskal, J. B. (1964 b), Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method. *Psychometrika*, 29, 115–129.
- 中谷和夫（1977）, 多次元尺度法の基礎と一般化共分散法. 人文, 第23集, 1–38.
- Shepard, R. N. (1962 a, b), The analysis of

- proximities : Multidimensional scaling with an unknown distance function. I, II. *Psychometrika*, 27, 125–140, 219–246.
- Shepard, R. N. (1974), Representation of structure in similarity data : Problems and prospect. *Psychometrika*, 39, 373–421.
- 田中良久 (1977), 心理学的測定法(第2版). 東大出版会
- Torgerson, W. S. (1952), Multidimensional scaling : Theory and method. *Psychometrika*, 17, 401–419.
- Wish, M & Carroll, J. D. (1974), Applications of individual differences scaling to studies of human perception and judgment. In E. C. Carterette & M. P. Friedman (Eds.), *Handbook of Perception*, Vol. II, Academic Press.
- Fletcher, B. (1965), Function minimization without evaluating derivatives—a review. *The Computer Journal*, 8, 33–41.