島根大学教育学部紀要（人文・社会科学）第9巻　1～6頁　昭和50年12月

自然数の構成に関する一考察

松　井　　保*

Tamotsu MATSUI

A Study of the Construction of Natural Numbers

0. 前口上

いわゆる自然数論は *Dedekind* あたりに端を発すると考えても良かろう。[1] 彼は数概念を《空間・時間の表象、または直観に全く依存せず，むしろ純粋な思考法則から直接に流出するもの》と考えた。この論理主義の元祖に対する反動が，*Poincaré* や *Brouwer* など色々な立場での直観主義の数学を生み出す史的要因ともなったのであろう。

ところで，上記の元祖に *Frege, Peano* らが続き，やがては *Russell, Whitehead* を経て，*Quine, Church* (...と，論理学・数学上での V. I. P. 諸氏の名前を並べ尽すことは，失礼ながら省略します。）となるわけで，彼らにおいて実にさまざまな形での自然数の構成法が展開されることになる。

さて，このような自然数論，もしくは自然数の構成と言う論理一数学上の問題と，個体における自然数概念の発生と言う心理学上の問題とについて，*Piaget* や *Grize* らのジュネーヴ学派が，両者の関連をどのように受容し，何を主張しているのか。この考察が本小論の目的である。つまり，自然数に関し，その心理学的な発生の構成様式と形式論的な構成手続きとの比較が問題とされることになろう。ただし，今回の考察は数学の認識論研究のための覚え書きに過ぎない。

なお，以下「心理学(的)」とは，なるべく上記学派の文脈において使用し，「数」は自然数の意味である。また，「P氏」や「G氏」とあるのは，*Piaget* や *Grize* の略記とご了承願いたい。

1. 問題の定位

個体における数の発生にかかわる心理学的知見については，P氏らによる多種多量の資料があり，今更ここでそれを紹介するまでもない。[2] 要するに，《分類》と《系列化》などの研究事例から，個体の精神発達での基礎的論理構造として，《類：*classe*》と《関係》との《群束：*groupements*》の心理学的実存性が主張され，同時にこれら諸構造が純形式論のレベルにおいても定式化可能とされる。

したがって，P氏にあって先の問題は，（群束と言う）論理構造と自然数とのかかわりとして捉えられ，次のような3つのアプローチが想定されることになる。

i）　数は基本的論理構造（つまり，群束の構造）とは独立である。
ii）　数はこの構造から直接的に導かれる。
iii)　数はこの構造に根ざしながらも，それとは別である独自な新しい綜合から発生する。

実は，上のような問題の立て方それ自身に，われわれは疑問を持つのだが，それについては本論の最後で多少触れることにする。

ところで，上のｉ）は数学における直観主義に，[3] ii）は論理主義の立場に対応しており，それぞれP氏的なる消去を受けて，第3の彼の主張が結論的に提出されるように，P氏の筋書はなっとるわけである。

まず，ｉ）の切り捨ての議論を簡単に述べる。が，その前に個体での数発生の標識（または，最小条件）を規定しておかねばならない。たとえば，幼児が数個のモノの集りを数唱と共に数えあげることができたとしても，それは上の標識とはならない。なぜなら，それらのモノの配列を変えると，集合の個数の保存性が成立する以前の幼児にあっては，再び数えあげたりするからである。で，このような数の保存性が上の標識である。そして，この数に関する保存性は（他のさまざまな保存性と同様）主体と環境との相互作用の結果，コドモによって形成的に獲得される以上，それが成立する以前の《直観》などは，P氏にあっては当然否定されることになる。

なお，P氏が好んで取りあげる数学での直観主義者は，*Poincaré* と *Brouer* であるが，この外，時間・空間その他にまつわる哲学的な《直観》に対しても，彼はそれらに否定的吟味を行なっている。[4]

* 島根大学教育学部心理学教室

したがって，このようなＰ氏の反直観主義の言動から言っても，ｉ）が棄脚されるのは当然のことであろう。

以上で不充分ながら，ｉ）の問題を終って，ii）についてやや詳しくＰ氏の議論を辿ることにする。

2. *Russell* の還元法

先の ii）のアプローチを言い替えると，数を類と関係との論理構造に還元可能とする立場になる。この典型事例として挙げられるのが *Russell* のそれである。

彼は《１－１対応》の関係によって２つの集合の《相似性》を定義し，次に《ある集合の数とはその集合に相似なすべての集合の集合》であると，例の定義をくだした。[5]

そこで，この定義は一見すると，すこぶる自然であるようにも見える。なぜなら，あるモノを別なモノと対応させる操作は，早くから幼児に見られる事実であって，このような原初的な対応操作が２つの集合間に適用され，遂には数概念が成立するのだ，と考えられるからである。

だが，このようにして数を論理的な対応操作に還元する構想は，Ｐ氏によると基体的に誤りなのである。

その理由の予備議論として指摘されるのは，１－１対応に次の２種があることである：

イ）質的な類似性に基づく１－１対応，と

ロ）《任意の（かってな)》対応，

とである。

イの例としては，顔の模写の目には目を・・と言うようなもので，手っとり早くは，次の上段と下段のような対応である。

○	△	×	§	▽
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
○	△	×	§	▽

むろん，上の図で○に×を対応させたりして，これ以外の色々な対応を考えることができるが，そのこと自体がつまりロなのである。

ところで，あるひとつのモノと別のひとつのモノとを対応づける場合に，[13] この場合の《ひとつ》は論理学的レベルの存在であって，数学的な《１：unit》ではないのだ――と，*Russell* 流に発言するとき，われわれが使用している「対応」とはロの意味なのだ。つまり，類似的に基づくものではなくて，任意性に依る対応の意味で発言しとるのである。

では，これを心理学的に注目してみよう。たとえば，類の群束で用いられる対応はイ種のもので，《任意の対応》ではない。と，するならば，イのレベルからロのそれへと個体発達的にはどのようなプロセスを辿るのであろうか。

繰り返して言うと，ロの対応が可能であるためには，個物のあらゆる性質を捨象せざるを得ないのであり，この意味において個々のモノは等価となる。他方，それでいながらもコレにアレを対応する操作が可能である以上，それぞれは異なるモノでもなければならない。そして，実にこのような等価性と差異性と言う２重の性格が綜合されて，数学的な（arithmetical な）《１：unity, l'unité》が出現するのである。

けだし，《任意の対応》なる操作には，既に《１》が隠されておったのである。

ゆえに，*Russell* における還元には悪循環が潜んでいたことになる。

では，それならば，イ種のような質的な類似性による対応だけを用いて，ロ種を使わずに理論構成を進めたらどうか。数の構成に関する限り，それはダメである。なぜなら，その路線は数を生みださず，乗法的な群束を生み出すだけであるからだ。

ここらで話を戻そう。問題は任意の対応づけと言う手段で，類から数への通路を開発しようとした所にあった。そして，このロ種の対応が可能となるためには，次の問に答えねばならない。個物の性質が捨象されて等価となった諸要素は，どのようにして区別されうるのか，と。たとえば，同じ形で同じ色の札を要素とする一組内における個物の区別やその一組と全く同様同数の要素を持つ別の一組ともとの一組との対応の事例を想定すれば分るように，上の問いに対する答は次のようになる。そのような場合に個々の要素を区別する唯一の手段は，それらを何らかの方法によって《順序づける》より外はないのである。

したがって，Ｐ氏の心理学体系において，類から数への通路を開発するためには，類の群束とは異種である（移行的・非対称的な）関係の群束の介入を，しかも，これら２種をモメントとしながら，両者を止揚する形での綜合が遂行されねばならなくなってくる。

以上，１，２を要約すれば，先に言及したように，数概念の起源について何らかの形での直観を想定することは，心理学的には妥当ではない。数概念は論理的な諸構造によって構成されるものではあるが，しかし，それは数が直ちに論理的な諸構造に還元されると言うのではなく，それら構造をモメントした新しい綜合によって数の発生を見ることを意味するのである。

Russell 流の還元法に対して，Ｐ氏は彼の創案した群束の論理学を援用することにより，彼は上述のような *Hegel* 的な議論を主張する。では，この議論が，自然数の構成に関する形式理論のレベルではどのように転生

・変身しているか。

だが，それについて考察する前に，P氏が *Traité de Logique*(6) に *informol* な形で提出した《群束：*groupements*》をG氏がどのように定式化したか，これを一見しておかねばなるまい。

3. *Grize* の群束論

だいたい，この群束の構想は1930年代にP氏の胸のうちにあったと推定されるが，そのような臆測はともかくとして，それが形を取って打ち出されたのが上記の *Traité* である。が，あまりにも未分化な用語法や形式処理の誤りのため，*Quine, Kneale* などのプロの論理学者からの総すかんを食うはめとなったわけである(7)。もちろん，彼らの反論は群束の持った心理学的な意義に関してではなく，あくまでも概念のアイマイ性や形式処理などに集中してるわけで，P氏の胸の中をくんで，しかも論理学の土俵の上に群束を乗せたのが *J-B Grize* と言えよう。

以下にG氏の定式化(8)の事例を述べる。もっとも，既に紹介の邦書もあるのだが，わけあって，敢えて書く次(9)第。ただし，対象言語に用いる引用符号や通常の論理記号の説明などは省略する。

さて，1つの系（$\mathscr{M}$, →, +, −）を考える。ただし，$\mathscr{M}$は空でない集合，→は関係，+と−は2項演算子とし，X，Y，Zなどは$\mathscr{M}$の元とする。

まず最初に次のような定義を2つ置く。

$$(D_1)\quad X\leftrightarrow Y \overset{df}{=} X\to Y \wedge Y\to X$$

$$(D_2)\quad X\to_1 Y \overset{df}{=} X\to Y\wedge\sim(X\leftrightarrow Y)\wedge (Z)(X\to Z\wedge Z\to Y.\supset.X\leftrightarrow Z \vee Y\leftrightarrow Z)$$

そして，この系が次の諸条件を満足するならば，1つの群束をつくることになる。

(Refl)　$X\to X$

(Trans)　$X\to Y\wedge Y\to Z.\supset.X\to Z$

(G_0)　モシY∈$\mathscr{M}$デX→YナラバX∈$\mathscr{M}$.
モシX∈$\mathscr{M}$デ$X\to_1 Y$ナラバ，Y−X∈$\mathscr{M}$,
カツ，X+(Y−X)∈$\mathscr{M}$

(G_1)　$X+(Y+Z)\leftrightarrow(X+Y)+Z$

(G_2)　$X+Y\leftrightarrow Y+X$

(G_3)　$X\to Y.\supset.X+Z\to Y+Z$

(G_4)　$X\to Y.\equiv.X+Y\leftrightarrow Y$

(G_5)　$Y\to X+Z.\supset.(Y-X)\to Z$

(G_6)　$Y\to X+(Y-X)$

(G_7)　$X\to_1 Y.\supset.X\to(Y-(Y-X))$

(G_8)　1ツノ $\mathbf{0}$ ガ存在シ，$\mathbf{0}\to X$デアル。

上に若干のコメントをつける。いわゆる非固有記号の括点や括弧は適当にご判読願って，まず，→と$\to_1$とについて：

→を日常語的に読めば，《ノ中ニ含マレル：*est contenu dans*》であるから，ふつうの集合間の包摂もこの→のモデルになる。が，P氏の場合には性質の包摂もどきのようなものも考えている。たとえば，「太郎は次郎より，次郎は三郎より背が高い」のであれば，「太郎は三郎より背が高い」わけで，この間の事情を次のように表わしてみる。

(三郎)＜(次郎)………($\underset{a}{\to}$)

(次郎)＜(太郎)………($\underset{a'}{\to}$)

(三郎)＜(太郎)………($\underset{b}{\to}$)

これをP氏流に表現するとき，

($\underset{a}{\to}$)+($\underset{a'}{\to}$)=($\underset{b}{\to}$)

となり，《($\underset{a}{\to}$) は ($\underset{b}{\to}$) に含まれている》と読むことになるのだ。

また，$\underset{1}{\to}$を日常語で読めば，《直接……ニ含マレテイル：*est immédiatement contenu dans*》である。群束でのモノの集りは共通する何らかの質的等価性によってまとめられた《類：*classe*》であって，たとえば木製茶色のビーズ（A）と木製赤色のビーズ（A′）が合併して，木製のビーズ（B=A+A′）を作りあげ，それにガラスのビーズ（B′）が加わって，C(=B+B′)と言うような新しい類を作りあげる。このように次々に，より大きい類が構成されるわけだから，《直接含まれる》と言うような包摂様式も定義されていないと具合が悪くなる。上のビーズの例では，AはBに，BはCに《直接含まれて》いることになるが，AはCに《直接含まれて》はいないのである。なお，→の所で挙げた系列的な関係（$\underset{a}{\to}$や$\underset{b}{\to}$）についても《直接包含》は適用する。

くどいが，(D_2) を日常語的に読むならば，$X\underset{1}{\to}Y$とは《XハYニ包マレテイルガ，X↔Yデハナイシ；カツテナZニツイテ，XトYトノ中間ニクルヨウナZガアルトスレバ，ソレハXトナツテシマウカ，Zトナツテシマウカノドチラカダ》てなようなことになろう。

(Refl) と (Trans) とは，もちろん反射律と移行律とである。

(G_0) の後半は，Yに関するXの相補類 $X'(=Y-X)$ についての言及である。

(G_4) は，P氏のいわゆる反覆の《吸収則：*résorption*》の定式化である。

(G_5) は，＋と－とが互いに逆演算であることの言及。等々。

このようにポステュレイトしておけば，群束の定理が色々と導ける。たとえば，

$(X\to Y)\supset(X-Z.\to.Y-Z)$

は定理である。なぜなら，

①	$X\to Y$	(仮定)
②	$Y\to.Z+(Y-Z)$	(G_6)
③	$X\to.Z+(Y-Z)$	(①，②，(Trans))
∴	$X-Z.\to.Y-Z$	(③，G_5)

実は，上のような系 $(\mathscr{M},\ \to,\ +,\ -)$ に対してわれわれは数々の疑問を持っている。

まず，それがP氏が当初構想していたような群束構造の忠実なる反映と見做しうるものか，否か。

次にはそれが見做しうるとしても，8個の群束とこの系との関連はどうなるのか。少なくとも類と関係との区別はP氏の基本路線であった筈である。

その他としては，P氏の与える心理学的な事実的与件と群束的な諸構造との関連など，第3・第4の疑問が続く。だが，この小論では第一の問題だけを少々取りあげ，他は他日にまわそう。

で，第1の疑問であるが，これについてはP氏自身がG氏の定式化を是認する発言をしている以上，ええのやろと言えるのかもしれない。ところが，どっこいそうもいかない様子なのだ。なぜなら，*G. Granger* によれば，G氏の定式化はP氏の真意を測りそこねているらしい。[10] したがって，この第1の問題さえも，ややっこしいことになっているわけだ。もっとも，*Granger* にしてもG氏の定式化が形式議論の上で重大な誤りがあると言ってはいないので，心理学的な与件を踏まえたうえで提出された群束の形式化としては，問題があるのだと主張しているのである。この *Granger* の異論が末梢的なものか，否か。残念ながら，その判定をここでくだせない。

ここらで話の都合上，とにもかくにも，G氏提出の系がP氏の群束を，まずは正しく反映しておることを仮定して，そのような系からどのようにして自然数が構成されるのか，《綜合》されるのか。このような問題について話を進める。

4.　*Grize* の自然数論

さて，群束の諸構造が止揚されて自然数の発生を見ることが，仮に心理学的には是認されるにしても，形式論の領域ではそれがどのような手続きとなるのであろうか。それを理解するためには，次のような1つの系を考えることによって遂行される。それは，

1つの系 $(\mathscr{N},\ \leqslant,\ +,\ -)$

である。ここで，$\mathscr{N}$ は空でない集合。$\leqslant$は関係。(partial order である。) ＋と－とは2項演算子。このようにしておいて，先程の系 $(\mathscr{M},\ \to,\ +,\ -)$ を次のように変容する。

まず，当然のことながら，

(Def.)　　$x=y \overset{\mathrm{df}}{=} x\leqslant y\wedge y\leqslant x$

先の (G_0)～(G_8) に対応して，次のように (N_0)～(N_8) と言うように群束の諸条件を変更する。

(N_0) モシ $y\in\mathscr{N}$ デ $x\leqslant y$ ナラバ，$x\in\mathscr{N}$
モシ $x\in\mathscr{N}$ カツ $y\in\mathscr{N}$ ナラバ，$x+y\in\mathscr{N}$
モシ $x\in\mathscr{N}$ カツ $x\leqslant y$ ナラバ，$y-x\in\mathscr{N}$

(N_1)　$x+(y+z)=(x+y)+z$

(N_2)　$x+y=y+z$

(N_3)　$x\leqslant y.\supset.x+z\leqslant y+z$

(N_4)　$0+x=x$

(N_5)　$y=x+z.\equiv.y-x=z$

(N_7)　$x\pi y.\equiv x+1=y$ トナルヨウナ1ガアリ，$1\in\mathscr{N}$ デアル。

(N_8)　$0\leqslant x$ トナル0ガアッテ，$0\in\mathscr{N}$.

上に若干のコメントをつける。($\leqslant$関係は，むろん反射的，移行的である。)

(G_0) と (N_0) との相違が類と数との相違に対応しているわけだが，(G_0) での「＋」よりも (N_0) の「＋」の方がより自由である。「－」の方は依然として制約づきである。

(N_1)～(N_3) は (G_1)～(G_3) での記号をただ置換しただけである。

(N_4) は場所が悪いのではなかろうか。なぜなら，(G_4) はこれに対応していないと考えられるからである。

(N_5) は (G_5) に呼応する。

(G_6) に対応する (N_6) は，結局「$y \leqslant x+(y-x)$」となろうが，今の新体系では定理となるので（証明略）削除されているわけ。

(N_7) では，突然「π」を出してしまったが，「$x\pi y$」とは，「x の直接の後者が y である」と読まれたい。先の「$\rightarrow_1$」のように定義すれば次のようになるだろう。

$$x\pi y \overset{\mathrm{df}}{=} x \leqslant y \wedge \sim(x=y) \wedge$$
$$(z)(x \leqslant z \wedge z \leqslant y . \supset . x = z \vee y = z)$$

また，(N_7) を日常語で読めば，《x の直接後者となるような y は $x+1$ に等しく，そのような1が　の中に1つある》とでも言えよう。

(N_8) は，もちろん (G_8) に対応している。

・・・と，だいたい上のような道具立てを整えておいてから，G氏は色々な定理，メタ定理を導く。そして，それらの中に例の *Peano* の5公理に対応する定理を見出している。彼の言葉を引用すると，《系 $\mathscr{N}$，$\leqslant$，$+$，$-$）において，$\mathscr{N}$ の要素が自然数を，$+$ と $-$ が通常の加法と減法を指示するならば，*Peano* の公理系は満足されるのだから，この系はゼロ（0）と自然数のシステムなのだ。》となる。

5. 問　題　点

さて，これまでの考察で言及した諸領域を挙げると，次のようなものになろう。

心理学的与件：(**P**)，心理学的な論理構造理論：($\mathbf{G_p}$)，論理学（形式論）的な群束構造論：($\mathbf{G_l}$)，系($\mathscr{M}$，$\rightarrow$，$+$，$-$)：(**M**)，系（$\mathscr{N}$，$\leqq$，$+$，$-$）：(**N**) などである。

まず，P氏にあっては多種多量の心理学的な研究例から $\mathbf{G_p}$ と $\mathbf{G_l}$ が形成され，構成された。もっとも，後二者の想定によっても **P** レベルの研究の方向づけが行なわれたわけで，**P** と $\mathbf{G_l}$ と $\mathbf{G_p}$ との関連は，（カッコ良く言えば）弁証法的な発展であったのだろう。

それはさておき，$\mathbf{G_p}$ の公理論（*l'axiomatique*）として提出されたP氏の $\mathbf{G_l}$ の不備が指摘されて，G氏の **M** が作られたわけである。そして，その **M** の変容（P氏流には《綜合》）が **N** となる。で，この **M** から **N** への変容が《自然数（正しくは，負でない整数)》の構成と言うわけである。

この構成法の提出以前に，先に述べたように，*Brouwer* 流の《数直観》が否定され，*Russell* 流の還元法もその論理の中には既に数概念の密輸入があるとして，否定された。そして，彼らのアプローチに比較すると，$\mathbf{G_l}$ の純形式的な体系である **M** から **N** への構成法は，技法的な優越性はないにしても，発生的認識論の文脈の中では望ましいものだとされる。なぜなら，個体の知的発達のプロセスに対応すると言う点でも，**M** や **N** を媒介として他の数理一論理学の体系とも関連づけられると言う意味でも，上の構成法はより《自然な》ものであるからだ。

率直に言って，心理学と論理学・数学とを踏まえたこのパラレリズムの壮大な独創性に対してわれわれは讃歎する。それに加えて，コドモの行動を深く観察する場合も，*Brouwer* や *Russell* らの理論を観る時も，P氏の眼差しが同一であることもわれわれは驚かざるを得ない。そこにあるのは生物学者の観自在であるのかもしれぬ。

しかし，感服ばかりではなく，上記の各領域とその相互関連性などについてわれわれは多くの疑問を持つ。その若干を次に述べよう。

まず第一に，よく指摘されるように，**P** と $\mathbf{G_p}$ とのかかわりに関するものがある。**P** は必然的に $\mathbf{G_p}$ に帰結するものであるのか，否か。また逆に $\mathbf{G_p}$ によって **P** を説明し尽せるか，否か。が，この種の問題は目下の考察には直接の関連がないから省くが，1での3つのアプローチの立て方における疑問はこの第一の問題にかかわるものであったことは付言しておく。そのわけは，上記の箇所では気易く《数と論理構造（群束）》と書いたが，数を形式論理のレベルで考察する場合，また，論理構造を扱うと言っても，それを $\mathbf{G_l}$ レベル，**M** レベルなどで考察する場合，及び，これら2つの場合の組合せなどを考えるならば，それだけでもP氏のように簡単に i）〜iii）と分類することはできなくなるからである。

ところで次は，3で言及したように，$\mathbf{G_p}$ が知的発達の心理学理論で重要な概念であるにしても，$\mathbf{G_p}$ と $\mathbf{G_l}$ のP氏の構想を果してG氏が適切に **M** において定式化しているのか，否かである。*Granger* に同調するわけではないが，われわれとしてはもっと《自然な》定式化が可能である予想を持っている。

第3は，$\mathbf{G_l}$ がP氏の心をくんだ適切なものであると仮定しても，では **M** から **N** への変容が果して《自然の順序》であるものか，否か。この問題をより一般的に言うならば，ある1つの公理系 $\mathfrak{A}$ があり，そこに使用されている各種の記号を置換したり，増減したりすることによって，元の $\mathfrak{A}$ とは何らかの関連を保存しながらも，別種の公理系 $\mathfrak{A}'$ に変容，変換を行なった場合に，それをいかに解択するかと云う（意味論的な）方法が問題となるのだ。

P氏自身も論理学上の色々な公理系に対して，興味ある観察記録を行なっている以上,[11] **M** から **N** への変容についても，より適切かつ綿密な議論が為されねばならぬ。彼は **M** から **N** への移行を *Hegel* 用語での《止

揚》であり，《綜合》であると語っているが[12]，しかし，そのように言ってしまえばそれまでとなるのではなかろうか。

も少し具体的に述べると，たとえば N における $\leqslant$ や π が，$\mathbb{M}$ での→や$\to_1$の変身として，あるいはまた，N でのN_7脱落の理由について考察が為されなければならないのである。

だが，その考察について語ることは，G_l，$\mathbb{M}$ 及び N に関する形式論と共に，数理一論理学レベルでの変容論を準備する必要があるので，それは他の機会に譲ることにする。

*　*　*　*　*

文献と注

(1) 伊藤・原・村田ら，『数学史』筑摩書房 pp. 491～492, 1974.

(2) 基本的には，もちろん次のもの。
Piaget, J. & Szeminska, A. *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux & Niestlé. 1941.
長からず，短かからずでは，
Piaget と Fraisse 編（滝沢武久訳）。『現代心理学VII』白水社。pp. 197～201. 1972.

(3) さまざまな立場があるし，現代の A. Heyting から G. Kreisel に至るまで Brouwer の思想がどのように変容したか，しんどいが興味ある問題である。だが，本小論では Brouwer の一端が触れられているのにすぎない。いわゆる論理主義についても同様である。

(4) Piaget. *Sagesse et illusions de la philosophie.* Chap. 3 P. U. F. 1965.
（岸田・滝沢共訳『哲学の知恵と幻想』第3章，みすず書房，1971.）

(5) ラッセル（平野智治訳），『数理哲学序説』岩波文庫，第2章，1954.

(6) Piaget. *Traité de Logique*, Libraire Armand Colin, 1949.

(7) このプロのピアジェいじめの文献表は次にある。
Osherson, D. N. *Logical abilities in children*, Vol. 1., p. 10　Johnwiley & Sons. 1974.

(8) Grize, J. B. *Du groupement au nombre. Etudes. d'Epist. génét.*, Vol. XI. pp. 69～96.

(9) 波多野完治編『ピアジェの認識心理学』国土社，1965. この補章（pp. 211～233）に波多野誼余夫・江口恵子の両氏による紹介がある。だが，「$\to_1$」の意義やメタ定理などの自覚なしの紹介だったので，本文中に再記したわけだ。

(10) Granger, G. *Un problème d'axiomatisation en psycholiogie. Logique et Anatyse*, 1965. と言う論文が既にあったらしいが，残念ながら未見。(7) によるまた引用である！

(11) 松井保：古典命題論理の公理に関する前公理的な問題，島大教育学部紀要，7巻（人文・社会科学編）pp. 17～26. 1973.

(12) Piaget, J. *Quelque convergences entre les analyses formelles et génétique. Etudes d'Epist. génét.* Vol. XIV. p. 289. 1961.

(13) だいたい，対応づける操作とは何であるのか。
注 (11) の文献でも言及した《代入》とならんで，この《対応》それ自身に対する考察・研究がP氏にはないと考えられる。彼の盲点なのであり，あるいはそれが数学行為に関する重大な，彼のミスティクかもしれない。