

# 連続ウェーブレット変換によるスペクトル解析

田村 晋司

島根大学総合理工学部 電子制御システム工学科

## Spectrum analysis by continuous wavelet transform

Shinji TAMURA

Department of Electric and Control Systems Engineering,  
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

### Abstract

Continuous wavelet transform can localize time and frequency components of signal. The quantity of the wavelet transform corresponds to the amplitude of the component, but it is seldom used for the measurement of amplitude. In this paper, the calculation procedure of continuous wavelet transform of time series using fast Fourier transform algorithm is explained, and the scale parameter of wavelet transform is converted into period and frequency. The wavelet transforms of sinusoidal and chirp signals show that the resolution of wavelet transform decreases when the period or the frequency of signal increases, and the quantity of wavelet transforms of constant amplitude signals vary with period and frequency. Then, correction coefficient and logarithmic scaling of the scale parameter are introduced. Using these factors, the wavelet transform whose resolution and quantity are almost constant is obtained.

### 1. 緒論

周波数成分が時間とともに変化する信号に対して、時間 - 周波数を局在化するウェーブレット変換が広く用いられている。この性質を利用して、異常信号の検出や動特性の同定などの様々な応用例がこれまでに報告されている<sup>(1)</sup>。著者らも非線形振動系の励振と応答のウェーブレット変換の積を取ることでその位相差を正負として表す指標を提案して確率論的ジャンプ現象の性質を調べ、さらにその統計的特性を調べた<sup>(2,3)</sup>。しかし、フーリエ変換をベースとしたスペクトル解析で行われているような、ウェーブレット変換結果から着目する時間・周波数成分の大きさを読み取る試みはあまりされていないようである。

本稿では、離散データのウェーブレット変換が高速フーリエ変換を利用して計算できることを示すと同時に、ウェーブレット変換のスケールパラメータを周期や周波数で表現してそれぞれの性質について調べる。そして、信号の周波数が増減しても変換結果の値や分解能がほとんど変化しない条件を調べる。

### 2. 離散フーリエ変換

解析対象を以下のようなデータ数  $N$  , サンプルング周期  $\Delta t$  の信号  $x(t_j)$  とする。

$$x(t_j), \quad t_j = j\Delta t, \quad j \in [0, N-1] \quad (1)$$

$i$  を虚数単位として、周期関数のフーリエ変換/逆変換

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を離散化することにより、 $x(t_j)$  に対する離散フーリエ変換/逆変換を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_k) &= \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{N}\right) \\ x(t_j) &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) \exp\left(\frac{2\pi i j k}{N}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $\omega_k$  は以下の式で離散化された角周波数である。

$$\omega_k = k \Delta \omega, \quad k \in [0, N-1], \quad \Delta \omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (4)$$

なお、数値計算ライブラリなどで提供される高速フーリエ変換では以下の計算を行っていることに注意しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{N}\right) \\ x_j &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi i j k}{N}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

### 3. FFTを用いた連続ウェーブレット変換

関数  $x(t)$  の、マザーウェーブレット  $\psi(t)$  による連続ウェーブレット変換  $c_x(a, b)$  は次式で定義される<sup>(1)</sup>。

$$c_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} x(u) \psi^*\left(\frac{u-b}{a}\right) du \quad (6)$$

パラメータ  $a$  と  $b$  はそれぞれ、スケールパラメータとシフトパラメータであり、関数  $\psi(t)$  をそれぞれ、拡大縮小、および平行移動させるパラメータである。  $b$  の値により、関数  $\psi$  は時間軸方向に平行移動される。また、  $a$  の値が小さいときは、関数  $\psi$  の幅が狭くなり関数  $x(t)$  の高周波数/短周期に対応し、  $a$  の値が大きいときは、関数  $\psi$  の幅が広くなり関数  $x(t)$  の低周波数/長周期に対応する。

式(6)は関数  $\psi^*$  と関数  $x$  の畳み込み積分に類似した式であるので、フーリエ変換を利用して式(6)の演算を行う。

関数  $\psi^*(-t)$  のフーリエ変換は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} F[\psi^*(-t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(-t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(-t) \exp(i\omega t) dt \right]^* \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \exp(-i\omega u) du \right]^* \\ &= \Psi^*(\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)と、フーリエ変換における公式

$$F\left[g\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a G(a\omega) \quad (8)$$

$$F[(g * h)(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) h(t-u) du\right] = G(\omega) H(\omega) \quad (9)$$

を用いると、式(6)のフーリエ変換は次式で得られることとなる。

$$F[c_x(a, b)] = \sqrt{a} X(\omega) \Psi^*(a\omega) \quad (10)$$

なお、式(10)におけるフーリエ変換は  $b \rightarrow \omega$  として行っている。

以下に、代表的なマザーウェーブレットであるモルレー

ーとメキシカンハットの関数形とそのフーリエ変換を示す。

• モルレー

$$\left. \begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + 5it\right) \\ \Psi(\omega) &= \sqrt{2} \pi^{1/4} \exp\left\{-\frac{(\omega-5)^2}{2}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

• メキシカンハット

$$\left. \begin{aligned} \psi(t) &= \frac{2}{\sqrt{3} \pi^{1/4}} (1-t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \\ \Psi(\omega) &= 2\sqrt{\frac{2}{3}} \pi^{1/4} \omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

解析対象の時系列がサンプリング周期  $\Delta t$  で離散化された  $N$  点のデータである場合、式(6)の積分は総和に帰着し、次式となる。

$$c_x(a, t_j) = \Delta t \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m) \psi^*\left(\frac{t_m - t_j}{a}\right) \quad (13)$$

ここで、上述したパラメータ  $b$  の物理的意味より  $b \rightarrow t$  と変数変換を行っている。離散フーリエ変換についても式(7), (9)の性質が成り立つので、式(10)より  $c_x(a, t_j)$  は以下の  $C_x(a, \omega_k)$  に対して、高速フーリエ変換のアルゴリズムを用いて式(3)で定義される離散逆フーリエ変換を行うことで計算される。

$$C_x(a, \omega_k) = \sqrt{a} X(\omega_k) \Psi^*(a\hat{\omega}_k) \quad (14)$$

時刻  $t_j$  に関しては一回の高速フーリエ変換で全てのデータが計算されるため、あとは着目するスケールパラメータ  $a$  の数だけ式(14)の高速フーリエ変換を行うことができる。

なお、式(4)に示しているように離散フーリエ変換における角周波数  $\omega_k$  は  $k\Delta\omega$  として離散化された角周波数であり、正の値のみを取ることに注意する必要がある。そのため、式(14)における  $\Psi(\omega)$  として、式(11), (12)に示されるようなマザーウェーブレットのフーリエ変換を解析的に行った関数を用いる際には、以下の式によりナイキスト周波数以上の角周波数を負の角周波数として扱わなければならない。

$$\hat{\omega}_k = \begin{cases} k\Delta\omega, & 0 \leq k < \frac{N}{2} \\ (N-k)\Delta\omega, & \frac{N}{2} \leq k < N \end{cases} \quad (15)$$

一方、式(14)の  $\Psi(\omega)$  として解析的にフーリエ変換を行った関数を用いる場合、ウェーブレット変換の計算の全体において離散フーリエ変換を適用するのは  $x(t) \rightarrow$

$X(\omega_k)$  の変換と式(14)の逆変換であり、 $\Delta t$  については乗算と除算が一回ずつとなるため、これらの変換と逆変換に式(5)の高速フーリエ変換で計算される値をそのまま用いればよい。

#### 4. スケールパラメータ $a$ の変数変換

3節で述べたように、スケールパラメータ  $a$  は周期に対応する量である。この  $a$  はマザーウェーブレットの周期を基準として測っていることとなるため、以下の式により  $a$  から周期  $T$  への変数変換を行う。

$$a = \frac{\Omega T}{2\pi} \quad (16)$$

式(16)中の  $\Omega$  はマザーウェーブレット  $\psi(t)$  の卓越角周波数である。式(16)の変数変換は、ウェーブレット変換におけるスケールパラメータ  $a$  がマザーウェーブレットの卓越周期である  $2\pi/\Omega$  の尺度で周期に対応することによる。式(14)に対して式(16)の変数変換を行うと次式を得る。

$$C_x^T(T, \omega_k) = \sqrt{\frac{\Omega T}{2\pi}} X(\omega_k) \Psi^* \left( \frac{\Omega T \hat{\omega}_k}{2\pi} \right) \quad (17)$$

式(17)を逆フーリエ変換して得られる  $c_x^T(T, t)$  の値は時刻  $t$  における周期  $T$  の成分の強さを示すこととなる。

モルレーマザーウェーブレットの卓越角周波数は式(11)より明らかなように  $\Omega = 5$  であり、メキシカンハットマザーウェーブレットの卓越角周波数はそのフーリエ変換の極大値より  $\Omega = \sqrt{2}$  となる。

また、スケールパラメータ  $a$  を周波数  $f$  に変数変換すると以下となり、

$$a = \frac{\Omega}{2\pi f} \quad (18)$$

式(14)に対して式(18)の変数変換を行うと次式となる。

$$C_x^f(f, \omega_k) = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi f}} X(\omega_k) \Psi^* \left( \frac{\Omega \hat{\omega}_k}{2\pi f} \right) \quad (19)$$

周期の場合と同様に式(19)を逆フーリエ変換して得られる  $c_x^f(f, t)$  の値は時刻  $t$  における周波数  $f$  の成分の強さを示すこととなる。

#### 5. 結果と考察

周期と周波数で表現したウェーブレット変換の性質を調べるため、モルレーウェーブレットを用いサンプリング周期  $\Delta t = 0.05$  として計算を行った結果を示す。縦軸の分割数について、線形スケールでは下限の 0 を除外して 120点とし、対数スケールでは下限を含めて121点とした。

まず、振幅が 1 であり周波数が  $f = 0.1, 0.3, 1.0$  の三つの正弦波の和により表現される信号のウェーブレット変換を考える。スケールパラメータを周期  $T$  と周波数  $f$  として表したウェーブレット変換結果をそれぞれ図1, 2に示す。

以下の図において、横軸と縦軸はそれぞれ時間とスケールパラメータの換算値である。ウェーブレット変換結果は複素数であるのでその絶対値をプロットしている。青は絶対値が 0 に対応し、緑から赤となるにつれて絶対値が大きくなることを示している。

図1より、周期が長くなるにつれてウェーブレット変換結果が大きな値となる帯の幅が広がっていることが分かる。つまり、周期が大きくなるにつれて分解能が低下するということである。一方、同じ振幅であるにも関わらず周期が長くなるにつれて、ウェーブレット変換結果の値が大きくなっていることが分かる。これらより、ウェーブレット変換結果は、信号の周期が長くなると値自体が大きくなり、さらに大きな値をとる周期の幅も広がるので、周期の長い信号を過大に捉える性質を持つといえる。

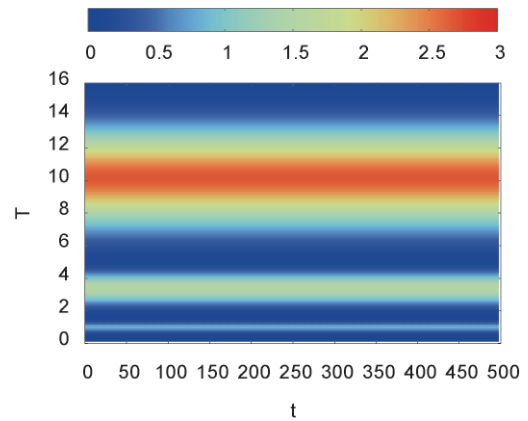


図1. 正弦波の和のウェーブレット変換 (周期表示)

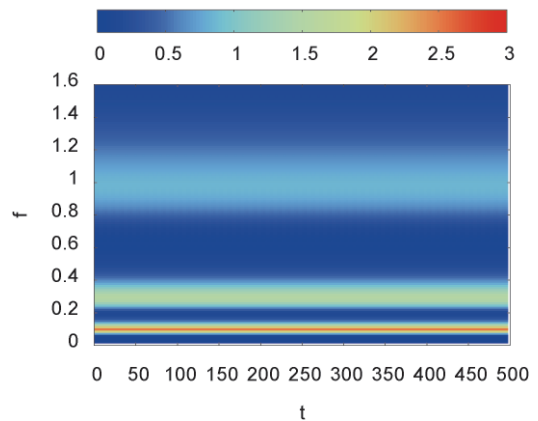


図2. 正弦波の和のウェーブレット変換 (周波数表示)

一方、図2からは、周波数が高くなると分解能は低下するが、それと同時に値自体は小さくなるのが分かる。つまり、周波数が高くなるとウェーブレット変換はぼやけたような結果となる。正確には積分値を比較する必要があるが、これらの性質により、周波数が高くなると分解能は低下するが同時に値も小さくなるため、ウェーブレット変換結果の総和は低い周波数の信号と同程度となっていることが予想される。

次に、振幅が1であり、周波数が0.1から1.0に線形的に増加した後また0.1に線形的に減少するスイープ信号について考える。スケールパラメータを周期  $T$  と周波数  $f$  として表したウェーブレット変換結果をそれぞれ図3、4に示す。

図3、4より、どちらのウェーブレット変換結果もスイープ信号の周波数変化を捉えていることが分かる。周期や振動数の変化に対する分解能と変換結果の値の推移は正弦波の場合と同じである。

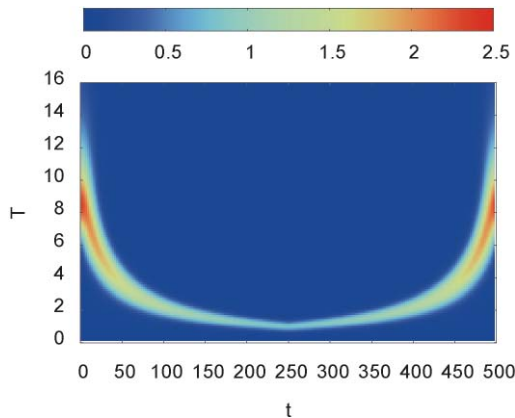


図3. スイープ信号のウェーブレット変換 (周期表示)

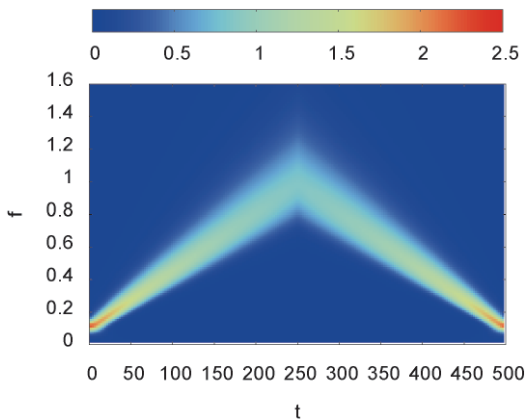


図4. スイープ信号のウェーブレット変換 (周波数表示)

以上より、ウェーブレット変換結果のスケールパラメータの表示が周期でも周波数でも値が大きくなるにつれ

て分解能が低下する傾向があることが分かった。そこで、次に振幅は1のままで周波数の上限を大きくした、周波数が0.1から10.0まで線形的に増加した後また0.1に線形的に減少するスイープ信号を考える。この信号をスイープ信号2とし、そのウェーブレット変換の縦軸を対数表示としてプロットした結果を図5、6に示す。なお、図5、6のウェーブレット変換では対数で等間隔になるようにスケールパラメータを離散化している。

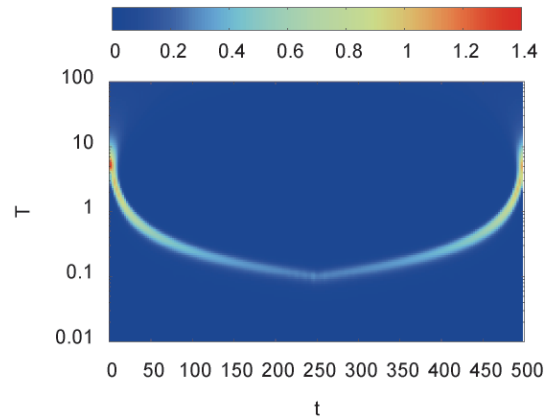


図5. スイープ信号2のウェーブレット変換 (対数周期表示)

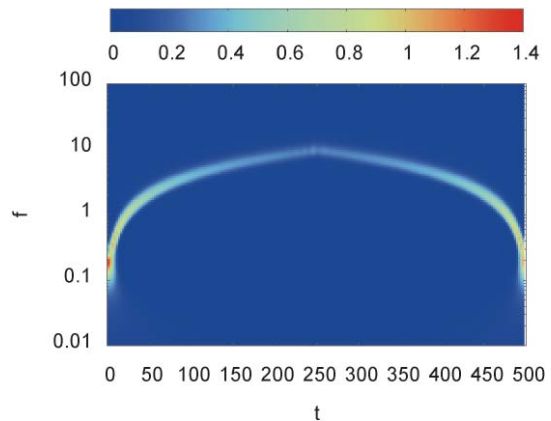


図6. スイープ信号2のウェーブレット変換 (対数周波数表示)

図5、6においてウェーブレット変換結果が大きな値となる領域の幅がほとんど変化していないことより、対数で見たときの分解能は縦軸の値に関わらずほぼ一定であると考えられる。よって、分解能という観点からは、スケールパラメータを周期と周波数のどちらに換算した場合でも対数でプロットすることが妥当ではないかと思われる。

次に、周期や周波数の変化に対するウェーブレット変換結果の補正係数について考える。式(6)の積分を行うこ

とにより  $x(t) = \cos \omega t$  のモルレーウェーブレットによる連続ウェーブレット変換を解析的に求めると次式となる.

$$C_x(a,b) = \pi^{1/4} \sqrt{\frac{a}{2}} \left[ \exp\left\{-\frac{(5-\omega a)^2}{2} + i\omega b\right\} + \exp\left\{-\frac{(5+\omega a)^2}{2} - i\omega b\right\} \right] \quad (20)$$

ここで,  $\omega a$  に式(16), (18)およびモルレーウェーブレットの卓越周波数  $\Omega = 5$  を代入すると, 次式となる.

$$\omega a = \begin{cases} \frac{5\omega T}{2\pi} \\ \frac{5\omega}{2\pi f} \end{cases} \quad (21)$$

式(21)より, 着目している周期や周波数を角周波数に変換した値が  $\omega$  に近い値となる場合,  $\omega a \approx 5$  となることから分かる. そのとき, 以下の性質が成り立つので,

$$\exp\left\{-\frac{(5+\omega a)^2}{2}\right\} \approx \exp(-50) \approx 1.93 \times 10^{-22} \ll 1$$

式(20)は  $a \approx \omega/5$  で次式と近似でき, その絶対値は以下となる.

$$C_x(a,b) \approx \pi^{1/4} \sqrt{\frac{a}{2}} \exp\left\{-\frac{(5-\omega a)^2}{2} + i\omega b\right\} \quad (22)$$

$$|C_x(a,b)| \approx \pi^{1/4} \sqrt{\frac{a}{2}} \exp\left\{-\frac{(5-\omega a)^2}{2}\right\} \quad (23)$$

式(23)より,  $|C_x(a,b)|$  の最大値は  $a = \omega/5$  で  $\pi^{1/4} \sqrt{a/2}$  となる. つまり, 信号  $x(t)$  の角周波数  $\omega$  が大きくなるにつれて, その 1/2 乗に比例してウェーブレット変換値  $|C_x(a,b)|$  の最大値が大きくなるということである.

これらのことより, 式(6)で定義される連続ウェーブレット変換を  $\sqrt{a}$  で除して, 次式のように補正することを考える.

$$\bar{c}_x(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} x(u) \psi^*\left(\frac{u-b}{a}\right) du \quad (24)$$

この時, 式(17), (19)に対応する周期と周波数で表現された連続ウェーブレット変換をフーリエ変換した式はそれぞれ以下となる.

$$\bar{C}_x^T(T, \omega_k) = X(\omega_k) \Psi^*\left(\frac{\Omega T \hat{\omega}_k}{2\pi}\right) \quad (25)$$

$$\bar{C}_x^f(f, \omega_k) = X(\omega_k) \Psi^*\left(\frac{\Omega \hat{\omega}_k}{2\pi f}\right) \quad (26)$$

式(25), (26)を逆フーリエ変換することにより, 周期と周波数で表示したウェーブレット変換  $\bar{c}_x^T(T, t)$  と  $\bar{c}_x^f(f, t)$  を得ることができる.

図5, 6と同じスイープ信号2に対して, 対数で等間隔となるようにスケールパラメータの値を離散化して, 補正されたウェーブレット変換を行った結果を図7, 8に示す. これらの図より, 周波数に変化しても分解能と変換値はあまり変化しないことが分かる.

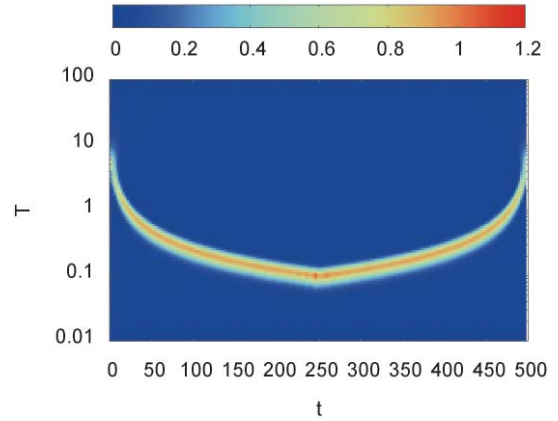


図7. スイープ信号2のウェーブレット変換 (対数周期表示, 補正後)

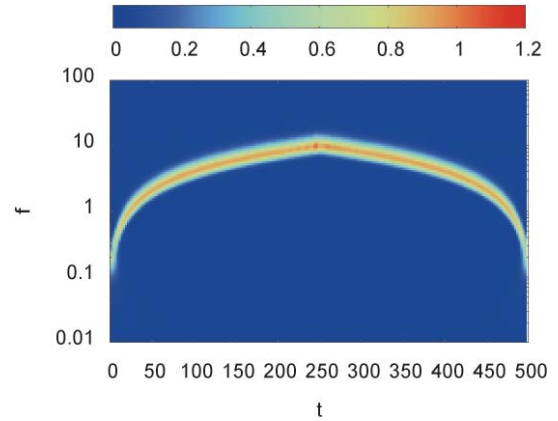


図8. スイープ信号2のウェーブレット変換 (対数周波数表示, 補正後)

## 6. 結論

離散データのウェーブレット変換が高速フーリエ変換を利用して計算できることを示すとともに, 正弦波とスイープ信号についてウェーブレット変換を行い, スケールパラメータを周期や周波数で表現してそれぞれの性質について調べた. その結果, 以下の知見が得られた.

- ウェーブレット変換におけるスケールパラメータを周期と周波数のどちらで表しても, 値が大きくなるとウェーブレット変換の分解能が低下する.

- 信号の周波数が高くなると、その  $1/2$  乗に比例してウェーブレット変換結果が大きくなる。
- 以上の性質より、周期あるいは周波数を対数表示し、補正係数を掛けることによって、信号の周波数が変化しても変換結果の値と分解能が変化しないウェーブレット変換が得られた。

### 参考文献

- (1) Addison, P. S., 新誠一・中野和司 監訳, 図説ウェーブレット変換ハンドブック, (2005), 朝倉書店.
- (2) 田村晋司・土屋博徳・木村康治, 連続ウェーブレット変換を用いたDuffing系の不規則応答におけるジャンプ現象の解析, 日本機械学会論文集C編, Vol. 73, No. 728, (2007), pp. 1029-1036.
- (3) 田村晋司・鈴木康弘・木村康治, 狭帯域不規則励振を受けるDuffing系の確率論的ジャンプ現象の各種統計量, 日本機械学会論文集C編, Vol. 75, No. 754, (2009), pp. 1560-1567.