

水平圧縮を受ける半無限岩盤の分岐解析

志比 利秀¹⁾, 亀井 健史¹⁾, 石川 琢也²⁾

¹⁾ 島根大学総合理工学部 地球資源環境学科

²⁾ 島根大学大学院総合理工学研究科 地球資源環境学専攻

Bifurcation analysis of half-space rock media under horizontal compression

Toshihide SHIBI¹⁾, Takeshi KAMEI¹⁾ and Takuya ISHIKAWA²⁾

¹⁾ *Department of Geoscience Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University*

²⁾ *Department of Geoscience Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Graduate School of Shimane University*

Abstract

We investigate a mechanism of fault formation by detecting the surface instability of ground using bifurcation analysis based on finite deformation theory. The bifurcation analysis is carried out in the case of a simple boundary value problem – the plane strain compression test of half-space made of incompressible elasto-plastic materials. Closed form solutions of bifurcation stress are obtained for many diffuse deformation modes defined by the number of the half wavelength of sine wave. The bifurcation stress increases with increasing effective mean nominal stress. The analytical region width and the deformation mode do not influence the bifurcation stress. Under horizontal compression, the bifurcation stress is unchanged by initial effective nominal stress at a room temperature.

1. はじめに

我が国では、毎年数多くの地震が発生しており、我々の生活に及ぼすその被害は計り知れない。例えば、地震の揺れに伴う建物の倒壊やインフラ施設の崩壊、地震による地盤の永久変位に伴う電気・ガス・水道等のライフラインの寸断などが考えられる。したがって、このような地震被害を軽減するための技術開発が進められるとともに、このような地震の被害を避けるために地震の発生を予測しようといった試みもなされている。そのためには、地震の発生原因やその発生メカニズムの解明が必要不可欠となる。

岩石等の地盤材料に応力が加わると、その内部にはひずみが発生する。さらに大きな応力が作用するとひずみの集中やき裂が発生し、最終的に破壊に至る。地盤および岩盤の内部でも同様の現象が発生していると考えられる。例えば、地球表面を覆う十数枚の巨大なプレートの定性的な相対運動が地盤内に定常的に応力を負荷し続けていると考えられる。プレートの相対運動により発生する地震は、プレート境界部で発生するとされており、プレート境界型地震と呼ばれている。この地震は、プレート境界において、あるプレートが別のプレートの下側に沈み込んでいく際に後者のプレートも一緒に引きずり込

まれるが、その際にプレート境界部にひずみが蓄積され、その限界を超えると後者のプレートが元の状態に戻ろうとして跳ね上がる際に発生すると考えられている。したがって、このようなメカニズムで発生する地震は、プレート境界付近に限られ、発生深度は数十 k m ～数百 k m 程度とされている。一方、プレート内部で地震が発生する場合も考えられる。これは、プレート運動等によってプレート内の応力が増加し、プレート内部で断層等が形成されたり、再滑動したりすることによって生じると考えられている。このようなメカニズムで発生する地震は、プレート境界で発生する地震と比較して、その地震規模は比較的小さいものが多いが、発生場所の特定が難しく、発生深度が数 k m ～数十 k m と比較的小さいため、都市部の直下などに断層が形成される場合には、大きな被害が発生することが予想されるため、その形成過程の解明は非常に重要となる。

断層は、その運動の違いから、上盤側が沈降する正断層、上盤側が隆起する逆断層、断層の変位が水平な横ずれ断層の三つに大別される。とくに逆断層を形成する圧縮応力が作用する場合の圧縮せん断強さは、正断層を形成する伸張応力が作用する伸張せん断強さと比較して大きいことから、逆断層が形成される場合には正断層が形成される場合より、大きなエネルギーが解放されること

となる．したがって、逆断層の形成および再滑動に伴う地震が発生した場合には、その被害の規模は正断層に起因する地震の発生よりも大きくなることが予想される．また、日本国内において多くの逆断層の存在が明らかにされている．これらのことを考慮すると、逆断層の形成メカニズムを解明することは、非常に重要であると考えられる．

一方、分岐という概念を用いて、材料の変形挙動を説明しようとする研究がなされている．Biot¹⁾ は弾性体や弾塑性体でモデル化した半無限領域の分岐解析を実施して、その分岐荷重を明らかにしている．また、Bardet²⁾ は弾性体や弾塑性体でモデル化した半無限領域の分岐解析を実施するとともに、その有限要素解析を行い、数値解析的に分岐荷重やそのときの変形挙動を明らかにしている．これらの研究を踏まえると、岩盤をモデル化した半無限領域に分岐解析を適応することで、地震の発生に影響を及ぼすと考えられる断層が形成されるとき荷重を明らかにできる可能性がある．このような考えから、岩盤を弾性体でモデル化した半無限領域の分岐解析も行われているが、得られた分岐荷重は非常に大きな値となった³⁾．

そこで本研究では、Hueckel et al.⁴⁾ によって提案された花崗岩の構成関係を用いて半無限領域をモデル化し、水平方向に圧縮する場合の分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を明らかにするとともに、それに影響を及ぼす因子について検討している．

2. 構成式

本研究では、花崗岩の構成式として Hueckel et al.⁴⁾ によって提案されているモデルを有限変形に拡張して用いる．まず、まず、全 Cauchy 応力 $\mathbf{T}$ 、有効 Cauchy 応力 $\mathbf{T}'$ と間隙水圧 u の間に次式で与えられる有効応力の原理を仮定する．

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} + u\mathbf{I} \quad (1)$$

このとき、平均有効主応力 p' と一般化された偏差応力 q は、それぞれ次式で定義される．

$$p' = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T}', \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{S}$ は有効 Cauchy 応力 $\mathbf{T}'$ の偏差成分である．なお、本研究では、全応力 $\boldsymbol{\sigma}$ 、平均有効主応力 p' 、間隙水圧 u および体積ひずみ ε_v は、土質力学等の慣例に従い圧縮側および収縮側を正とするが、それら以外の物理量は、一般の有限変形理論で定義されているように引張り側および伸張側を正とする．

まず、変形速度 $\mathbf{D}$ が弾性部分 $\mathbf{D}^e$ と非弾性部分 $\mathbf{D}^i$ の和

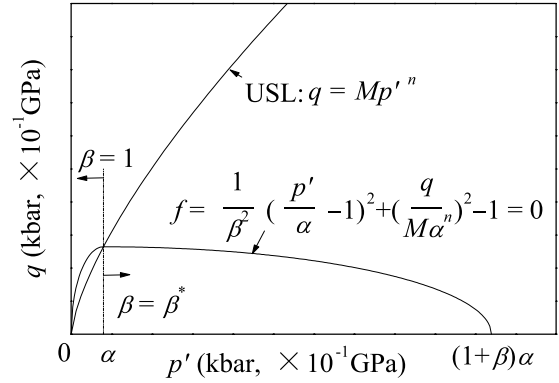


図-1 降伏曲面の概形

で表されるとき、その弾性部分に対して次式で示されるフックの法則を仮定する．

$$\dot{\mathbf{T}}'_{ij} = \{(\tilde{K} - \frac{2}{3}\tilde{G})\delta_{ij}\delta_{kl} + \tilde{G}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\}D_{kl}^e \quad (3)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{T}}'_{ij} = \dot{\mathbf{T}}'_{ij} - W_{ik}\mathbf{T}'_{kj} + \mathbf{T}'_{ik}W_{kj}$ は有効 Cauchy 応力の共回転速度であり、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．また、 $\tilde{K}$ と $\tilde{G}$ は、それぞれ体積弾性係数とせん断弾性係数を表しており、次式で表される．

$$\tilde{K} = \tilde{K}_0 p', \quad \tilde{G} = \tilde{G}_0 p' \quad (4)$$

ここで、 $\tilde{K}_0 = (1+e)/\kappa$ 、 $\tilde{G}_0 = \{3(1-2\nu)\tilde{K}_0\}/\{2(1+\nu)\}$ であり、 e は間隙比、 κ は自然対数表示による膨潤指数、 ν はポアソン比を表す．

次に、非弾性部分を考える．Hueckel et al.⁴⁾ は、花崗岩の降伏曲面の関数として次式を提案している (図-1)．

$$f = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{p'}{\alpha} - 1 \right)^2 + \left(\frac{q}{M\alpha^n} \right)^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

ここで、 α は降伏曲面の大きさを支配する硬化係数であり、花崗岩は降伏曲面上では $p' < \alpha$ のとき脆性的であり、 $p' > \alpha$ のとき延性的な挙動を示す．また、 M と β は降伏曲面の形状を決定するパラメータである． M は、三軸圧縮試験から得られた破壊時の軸差応力と平均有効主応力の関係 (USL: $q = Mp'^n$) から得られる．一方、 β に関しては、 $p' < \alpha$ のとき $\beta = 1$ 、 $p' > \alpha$ のとき $\beta = \beta^* (> 1)$ と仮定される．

硬化係数 α の具体形は、次式で与えられる．

$$\alpha = \alpha_i \exp \left\{ \frac{1}{\lambda - \kappa} (1 - \alpha_0 \Delta T) \varepsilon_v^i \right\} + A(\Delta T) \quad (6)$$

ここで、 ΔT は基準温度 (20℃) との温度差を表しており、 ε_v^i は非弾性部分の体積ひずみを表している．また、 α_i は

基準温度での脆性・延性境界の平均有効主応力の値を表しており、 α_0 は実験から得られる定数である。 $A(\Delta T)$ は負の値を持つ軟化関数であり、2つの定数 α_1 、 α_2 を用いて次式で仮定される。

$$A(\Delta T) = \alpha_1 \Delta T + \alpha_2 \Delta T^2 \quad (7)$$

式(5)の降伏関数を時間 t で微分すると、

$$\dot{f} = N_{ij} \dot{T}_{ij} - L \dot{\varepsilon}_v^i \quad (8)$$

となる。ここで、 N_{ij} および L は次式のように置いている。

$$N_{ij} = \frac{2}{\alpha \beta^2} \left(\frac{p'}{\alpha} - 1 \right) \frac{\partial p'}{\partial T_{ij}} + \frac{2}{M \alpha^n} \frac{q}{M \alpha^n} \frac{\partial q}{\partial T_{ij}} \quad (9)$$

$$L = \left\{ \frac{2}{\alpha \beta^2} \left(\frac{p'}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{p'}{\alpha} \right) + \frac{2n}{\alpha} \left(\frac{q}{M \alpha^n} \right)^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_v^i} \quad (10)$$

一方、降伏関数 f に関連流れ則を適用すると、変形速度の非弾性成分として次式が得られる。

$$D_{ij}^i = \begin{cases} AN_{ij} & (f = 0, \text{かつ } N_{ij} \dot{T}_{ij} > 0) \\ 0 & (f < 0, \text{あるいは } N_{ij} \dot{T}_{ij} \leq 0) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 A は比例定数であり、次式で表される。

$$A = \frac{E_{ijkl}^e N_{ij} D_{kl}^i}{E_{ijkl}^e N_{ij} N_{kl} - L N_{kk}} \quad (12)$$

ここで、 $E_{ijkl}^e = (\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ である。

最終的に Huenckel et al.⁽⁴⁾ によって与えられた降伏関数を用いると、次式のような構成式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{ij}' = & \left\{ \left(\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\tilde{G} + \tilde{K} \bar{\beta}^2 + h} \left(\frac{\tilde{G}}{\bar{\tau}} S_{ij} - \tilde{K} \bar{\beta} \delta_{ij} \right) \left(\frac{\tilde{G}}{\bar{\tau}} S_{kl} - \tilde{K} \bar{\beta} \delta_{kl} \right) \right\} D_{kl} \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{\tau} = \sqrt{3}q$ を表しており、

$$\bar{\beta} = \frac{(M \alpha^n)^2}{\sqrt{3} \alpha \beta^2 q} \left(\frac{p'}{\alpha} - 1 \right) \quad (14)$$

と置いた。また、 h は硬化係数を表しており、次式で表される

$$h = (\bar{\beta} + n \frac{\bar{\tau}}{p'}) \bar{\beta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} A(\Delta T) \right) \frac{1 - \alpha_0 \Delta T}{\lambda - \kappa} p' \quad (15)$$

間隙水の連続式は、透水係数を k 、水の密度を γ_w で表

し、载荷初期の全水頭値が一樣であると仮定して全水頭が過剰間隙水圧を用いて $\Delta u / \gamma_w$ のみで表されるなら、 $\text{tr}(\mathbf{D}) = k \text{ grad } (\Delta u / \gamma_w)$ で与えられる。さらに、分岐の瞬間まで一樣変形状態が保たれると仮定すると、次の関係が得られる。

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = 0 \quad (16)$$

特に平面ひずみ条件下において、一樣変形状態を維持している場合には、構成関係は次式のように表すことができる。

$$\begin{cases} \dot{T}_{11}' - \dot{T}_{22}' = 2\mu^* (D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}_{12}' = 2\mu D_{12} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} D_{11} + D_{22} = 0 \\ D_{33} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\mu^* = \frac{\tilde{h} \tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \tilde{G} \quad (19)$$

ここで、 μ^* 、 μ はそれぞれ 45° せん断におけるせん断係数と単純せん断係数であり、 $\tilde{h}$ は $\tilde{K} \bar{\beta}^2 + h$ で表される。また、各点において非排水条件(すなわち、 $D_{11} + D_{22} = v_{1,1} + v_{2,2} = 0$)を満足する場合には、 v の成分は流れ関数 ψ を用いて次式のように与えられる。

$$v_1 = \psi_{,2}, \quad v_2 = -\psi_{,1} \quad (20)$$

このとき、式(17)で表される構成式は、流れ関数 ψ を用いることにより、次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11}' - \dot{T}_{22}' &= 4\mu^* \psi_{,12} \\ 2\dot{T}_{12}' &= (2\mu - \bar{q}) \psi_{,22} - (2\mu + \bar{q}) \psi_{,11} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $\bar{q} = \sigma_{22} - \sigma_{11} = 2q / \sqrt{3}$ は水平方向と鉛直方向の応力差を表している。

3. 増分釣合式

まず、準静的で物体力の変化がない場合の増分釣合式は、次式で与えられる。

$$\text{div} \dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{0} \quad (22)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{S}}_i (= \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}(\text{tr} \mathbf{D}) - \mathbf{T} \mathbf{L}^T)$ は全公称応力速度である。有効応力の原理、非排水条件、および分岐が発生する瞬間まで供試体内の各状態量が一樣であることを考慮して上式を指標表示すると、増分釣合式は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11,1} + \dot{T}'_{12,2} - \dot{u}_{,1} &= 0, \\ \dot{T}'_{21,1} + \dot{T}'_{22,2} - \dot{u}_{,2} &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

4. 境界条件

本研究では、平面ひずみ条件下にある半無限岩盤が水平方向に一樣に圧縮される場合を解析対象としている。境界条件は、図-2 に示すように、上面($x_1 = 0$)においては、一定圧力を与え、両側面($x_2 = \pm B$)においては、変位制御($v_2 = \mp(v_2)_0$, $(v_2)_0 > 0$)により圧縮し、摩擦は働かないものと仮定する。このときの境界条件は次式のように表される。

$$\begin{aligned} (\dot{s}_i)_1 &= 0, (\dot{s}_i)_2 = 0, \text{ on } x_1 = 0 \\ (\dot{s}_i)_1 &= 0, v_2 = \mp(v_2)_0, \text{ on } x_2 = \pm B \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $\dot{s}_i (= \dot{\mathbf{S}}_i \cdot \mathbf{n})$ は全公称表面力速度であり、 $\mathbf{n}$ は考えている面の単位法線ベクトルである。

分岐が発生する瞬間まで、半無限領域は水平方向に圧縮力を受けることによって、一樣な変形を続ける。その過程では、分岐時の圧縮力の増大に対しても一樣な変形は、可能な解の一つとなる。したがって、半無限領域の分岐は、分岐時の圧縮力の増大に伴って非一樣な変形を示す解が存在する場合に発生する。一方、構成式を増分釣合式に代入することにより導かれる速度に関する支配方程式が速度に関して線形関係となっているので、速度解を重ね合わせることが可能となる。その結果、供試体の各点で負荷状態にある変形は、非均一な速度解に、各点が負荷状態になるような均一な速度解を重ね合わせることにより得られる。以上のことから、式(24)で与えられる境界条件の解は、以下に示す境界条件の解の和となる。

(a) 一樣境界条件：

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11} &= 0, \dot{T}'_{21} = 0, \text{ on } x_1 = 0 \\ \dot{T}'_{12} &= 0, v_2 = \mp(v_2)_0, \text{ on } x_2 = \pm B \end{aligned} \quad (25)$$

(b) 非一樣境界条件：

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11} &= \dot{u}, \dot{T}'_{21} = -\bar{q}L_{12}, \text{ on } x_1 = 0 \\ \dot{T}'_{12} &= 0, v_2 = 0, \text{ on } x_2 = \pm B \end{aligned} \quad (26)$$

式(25)は領域内の各点で変形が一樣圧縮となる境界条件であり、その解($D_{11} = -D_{22} = (v_2)_0/H$, $D_{12} = W_{12} = 0$)は自明である。したがって、領域内の各点において非一樣な変形が発生し得るなら、式(26)の境界条件から非一樣な変形を表す解が得られる。以後、特にことわりがないかぎり、式(26)のみを境界条件と呼ぶこととする。

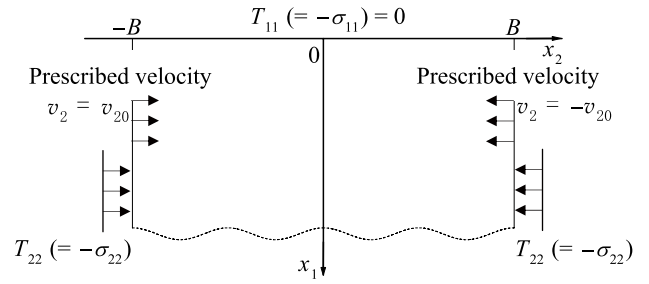


図-2 境界条件

5. 支配方程式

式(23)の増分釣合式から、間隙水圧 u の項を消去し、式(21)で与えられる流れ関数 ψ を用いた構成式を代入することにより、次式に示す流れ関数 ψ の支配方程式が得られる。

$$a\psi_{,1111} - 2b\psi_{,1122} + c\psi_{,2222} = 0 \quad (27)$$

ここで、 $a = 2\mu + \bar{q}$, $b = -(4\mu^* - 2\mu)$, $c = 2\mu - \bar{q}$ とおいた。一方、式(26)の境界条件は、式(20)を代入することにより、流れ関数 ψ を用いて次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} a\psi_{,111} - (2b - a)\psi_{,122} &= 0 \quad \text{on } x_1 = 0 \\ \psi_{,11} - \psi_{,22} &= 0 \quad \text{with } a \neq 0 \quad \text{on } x_1 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \psi_{,1} &= 0 \quad \text{with } c \neq 0 \quad \text{on } x_2 = \pm B \\ \psi_{,22} &= 0 \quad \text{with } a \neq 0 \quad \text{on } x_2 = \pm B \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)で示される両側面の境界条件を考慮し、流れ関数 ψ を次式のように仮定する。

$$\psi = V(x_1) \cos(k_m x_2) \quad (30)$$

ここで、 $k_m = m\pi/2B$ とおいた。 $m(m=1,2,\dots)$ は変形モードであり、 m が偶数の場合は x_2 座標の原点を H/m だけ移動させる必要がある。また、式(30)の形で仮定した流れ関数 ψ は、式(27)を供試体内の各点で満足する必要があるから、 $V(x_1)$ は次式で示される支配方程式を満足する必要がある。

$$(aD^4 + 2bk_m^2 D^2 + ck_m^4)V(x_1) = 0 \quad (31)$$

ここで、 D は x_1 に関する微分演算子であり、その右肩の数字はその微分回数を表している。 $V(x_1)$ の一般解を $\text{Re}[A \exp(ipk_m x_1)]$ と表すなら、上記の $V(x_1)$ に関する支配方程式は、

表-1 本解析に用いた定数⁴⁾

$\lambda = 0.0629$
$\kappa = 0.0183$
$e = 0.011$
$\nu = 0.10$
$M = 2.27$
$n = 0.638$
$\beta^* = 12.0$
$\alpha_i = 38.7$ (kbar)
$\alpha_0 = 1.14 \times 10^{-3}$ (1/°C)
$\alpha_1 = 7.89 \times 10^{-2}$ (kbar/°C)
$\alpha_2 = 4.48 \times 10^{-5}$ (kbar/°C ²)

$$ap^4 - 2bp^2 + c = 0 \quad (32)$$

で示される ρ に関する4次方程式の実数解の個数によりに分類され、実数解の存在個数が0, 2, および4に対応して、それぞれ、楕円領域(E), 放物領域(P), および双曲領域(H)と呼ぶこととする⁵⁾。また、楕円領域はさらに2つの領域に分類され、4つの異なる複素数解の場合を(EC)と、4つの異なる虚数解の場合を(EI)とする⁶⁾。それぞれの領域の判別条件は、次式で与えられる。

$$\text{EC: } b^2 - ac < 0$$

$$\text{EI: } b^2 - ac > 0, ac > 0, b/a < 0$$

$$\text{H: } b^2 - ac > 0, ac > 0, b/a > 0$$

$$\text{P: } ac < 0$$

なお、この領域の境界は、 p' , q , $a(\Delta T, \varepsilon_v^i)$ の関数となっているが、非弾性領域では p' , q , a は、式(5)を満足する必要があるため、実質的な変数は2つである。解析に用いる定数として表-1の値を用い、 $\alpha = 38.7$ の場合($\Delta T = 0$, $\varepsilon_v^i = 0$)には、各領域は図-3(a)のような範囲に分類でされる。なお、非弾性体積ひずみが増加する、すなわち圧縮され α の値が増加する場合(例えば、 $\alpha = 45.0$ の場合、図-3(b))、各領域の境界は右側へと遷移する。一方で、 ΔT が増加し α の値が減少する場合には、各領域の境界は左側へと遷移する。

6. 分岐条件式

6.1 EC 領域

EC 領域では、式(32)の根は、共役な複素数であり、それぞれ $P \pm iQ$, $-P \pm iQ$ ($P > 0$, $Q > 0$)とおくと、 P と Q の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (33)$$

また、 $V(x_1)$ の一般解は、 $\rho = P + iQ$ とおくと、次式で与えられる。

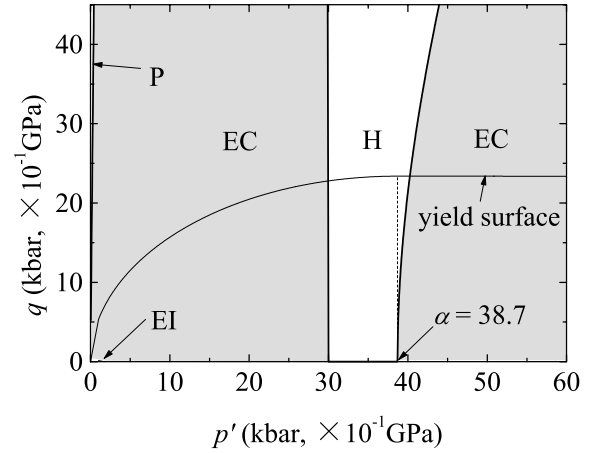
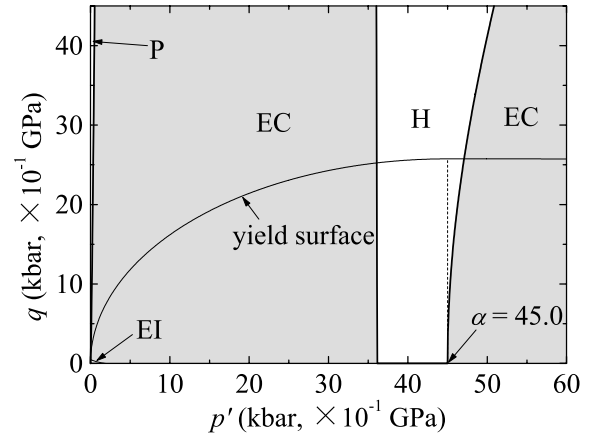
(a) $\alpha = 38.7$ (b) $\alpha = 45.0$

図-3 各領域の分布

$$V(x_1) = \text{Re}[C \exp(i\rho k_m x_1)] \quad (34)$$

ここで、 $C = C_1 + iC_2$ は複素数の未定定数であり、 $\text{Re}[\dots]$ は $[\dots]$ の実数部分を表す。式(34)を式(28)に代入した式において、 C_1 および C_2 の非自明な解が存在する条件として、次式に示す分岐条件式が得られる。

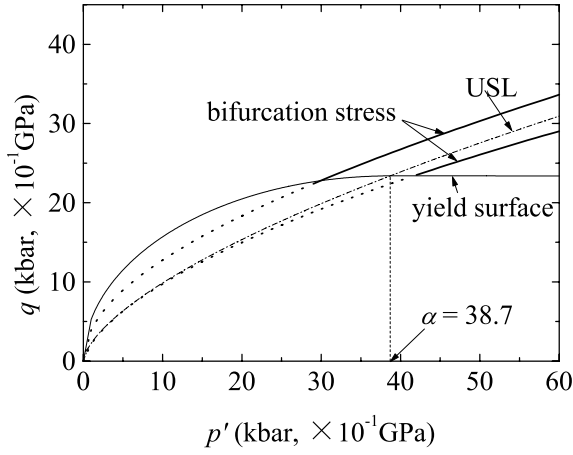
$$2\sqrt{ac}(a-b) - a(a-c) = 0 \quad (35)$$

6.2 EI 領域

EI 領域における $V(x_1)$ の一般解は次式となる。

$$V(x_1) = C_1 \exp(-Pk_m x_1) + C_2 \exp(-Qk_m x_1) \quad (36)$$

ここで、 C_1 と C_2 は実数の未定定数であり、 iP , iQ ($P > Q$)は、式(32)の正の虚数根である。なお、 P と Q の間には次の関係式が成り立つ。

図-4 分岐荷重 ($\Delta T = 0$)

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a} \quad (37)$$

最終的に、式(36)を式(28)に代入した式において、 C_1 および C_2 の非自明な解が存在する条件として、次の分岐条件式が得られる。

$$P(1+Q^2)^2 - Q(1+P^2)^2 = 0 \quad (38)$$

6. 3 P 領域

P 領域における $V(x_1)$ の一般解は次式となる。

$$V(x_1) = C_1 \cos(Pk_m x_1) + C_2 \exp(-Qk_m x_1) \quad (39)$$

ここで、 C_1 と C_2 は実数の未定定数であり、 P , iQ は、式(32)の正の実数根と虚数根である。なお、 P と Q の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (40)$$

最終的に、式(38)を式(28)に代入した式において、 C_1 および C_2 の非自明な解が存在する条件として、次の分岐条件式が得られる。

$$Q(1-P^2)^2 = 0 \quad (41)$$

6. 4 H 領域

H 領域における $V(x_1)$ の一般解は次式となる。

$$V(x_1) = C_1 \cos(Pk_m x_1) + C_2 \cos(Qk_m x_1) \quad (42)$$

ここで、 C_1 と C_2 は実数の未定定数であり、 P , Q ($P > Q$) は、式(32)の正の実数根である。なお、 P と Q の間には

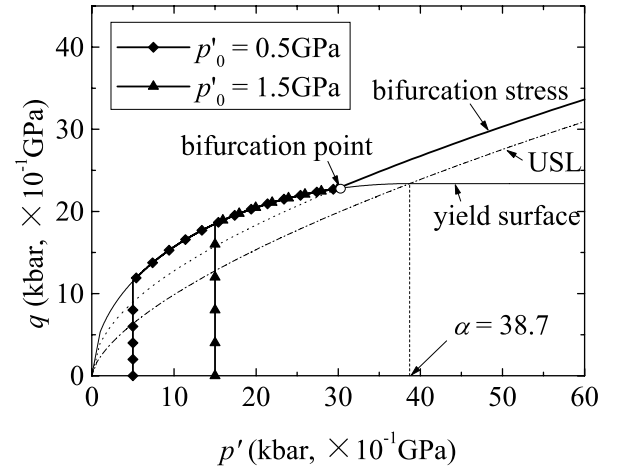


図-5 応力径路と分岐荷重

次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a} \quad (43)$$

最終的に、式(42)を式(28)に代入した式において、 C_1 および C_2 の非自明な解が存在する条件として、次の分岐条件式が得られる。

$$P^2 - Q^2 = 0 \quad (44)$$

なお、各領域の分岐条件式は、分岐時の平均有効主応力 p' 、偏差応力 q (あるいは軸差応力 $\bar{q}$)、非弾性体積ひずみおよび温度の陰関数となっている。一方、変形モード m や半無限領域の幅 B は分岐条件式に影響を及ぼさないことがわかる。

7. 解析結果および考察

本解析では、花崗岩のパラメータとして表-1⁴⁾ に示した値を用いた。なお、Hueckel et al.⁴⁾ はこの値を用いて応力-ひずみ関係のシミュレーションを行っており、その結果は実験結果と良い対応が得られることを報告している。

まず、半無限領域内全域で非弾性挙動を示すと仮定した分岐解析結果から得られた分岐荷重を $p'-q$ 平面内に図示する。図中には USL と $\Delta T = 0$, $\varepsilon_v^i = 0$ の場合の降伏曲面も合わせて表示した。なお、降伏曲面の内側、すなわち弾性挙動する場合には、分岐荷重は得られなかった。非弾性挙動を示す場合、分岐荷重は、USL を挟んで両側に得られた。USL の左側に得られた分岐荷重は、花崗岩が脆性的挙動を示す場合であり、USL の右側に得られた分岐荷重は、花崗岩が延性的挙動を示す場合に対応する。なお、図中に示された降伏曲面の内側の分岐荷重は、弾

性域内であるので厳密には分岐荷重ではないが、 α の値が小さく降伏曲面の外側に位置する場合には分岐荷重となるので、点線で示した。

次に、半無限地盤を水平方向に圧縮した場合の応力経路を図-5 に示す。図中には、初期平均有効主応力 0.5GPa（花崗岩の密度を 2.65t/m^3 とすると深度 19km 程度）の場合と、1.5GPa（深度 58km 程度）の結果を示している。いずれの場合も、降伏曲面内においては、平均有効主応力が一定の状態を維持しながら偏差応力が増加しており、応力状態が降伏曲面に達すると、降伏曲面に沿いながら平均主応力と偏差応力が増加し、最終的に平均有効主応力が 2.8GPa、偏差応力が 2.2GPa 程度において分岐点に達することがわかる。したがって、常温（20℃）においては、分岐荷重は、初期の平均有効主応力の影響を受けず、2.2GPa 程度となることが明らかとなった。

8. 結論

花崗岩をモデル化した半無限領域を水平に圧縮した場合の分岐解析を行った。その結果、分岐荷重（分岐時の一般化された偏差応力）の理論解は、平均有効主応力、非弾性体積ひずみと温度の陰関数として得られた。また、

水平圧縮に対応する応力経路を考慮すると、常温（20℃）では、分岐荷重は、初期の平均有効主応力の影響を受けず、2.2GPa 程度となることが明らかとなった。

参考文献

- 1) Biot, M. A.: Mechanics of incremental deformation, Wiley, New York, 504p., 1965.
- 2) Bardet, J. P.: Finite element analysis of surface instability in hypo-elastic solids, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 78, pp 273-296, 1990.
- 3) Shibi, T., Kamei, T. and Ishikawa, T.: Investigation of the Mechanism of Fault Formation Using Bifurcation Analysis, *Proceedings of the 18th International Offshore and Polar Engineering Conference*, Vancouver, Canada, pp.654-659, 2008.
- 4) Hueckel, T., Peano, A. and Pellegrini, R.: A thermo-plastic constitutive law for brittle-plastic behavior of rocks at high temperatures, *Pure and Applied Geophysics*, Vol.143, No.1-3, pp.483-511, 1994.
- 5) Hill, R. and Hutchinson, W.: Bifurcation Phenomena in the Plane Tension Test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 23, pp 239-264, 1975.
- 6) Young, N. J. B.: Bifurcation phenomena in the plane compression test, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.24, pp.77-91, 1976.