

# 人口動態事象におけるテンポ効果の本質： 発生確率同一モデル

Essence of Tempo Effects in Vital Events:  
Identical Intensity Model

廣 嶋 清 志  
HIROSIMA Kiyosi

## 1. はじめに

ある年次の合計出生率 TFR がその年次と関わるコーホートの完結出生率と必ずしも一致しないことは、テンポ効果として人口研究者には比較的よく知られている。では、死亡におけるテンポ効果とは何か。やはり同様に年次別合計死亡率 TMR, total mortality rate がコーホート合計死亡率 (常に 1 に等しい) と一致しないことであるととりあえず答えることができる。筆者は2000年にこのことを述べ (廣嶋2000)、実際に日本について TMR を計算してこれを示し、また、TMRに関する議論をすべての人口動態事象の合計率に拡張した (Hiroshima, 2005a; 廣嶋2005)。Guillot (2006) も死亡におけるテンポ効果として TMR の 1 からの乖離を提示し、Bongaarts and Feeney (2005) も同様な TER, total event rate を昨年末発表した。

前稿 (2005) は、Bongaarts and Feeney (2002, 2003) の「期間生命表で計算される平均寿命は望ましくないテンポ効果の影響を受けている」という主張を

直接に検討しなかったので、説得的でないと感じられたかもしれない。そこで、本稿では、あらためて Bongaarts と Feeney の論文を中心に取り上げながら人口動態事象のテンポ効果をより原理的に考察したい。その際、2005年秋から2006年春にかけて *Demographic Research* 誌を中心として集中的に発表された多くの死亡のテンポ効果に関する論文<sup>1)</sup>にも必要に応じて触れる。

以下の議論では、その便利さから主として死亡を例に記述を進めるが、死亡以外ではコーホートの1人あたり平均事象経験回数（事象経験者割合、動態量、カンタム）が1より小さいことに留意すれば、動態事象全般に通じるものである。

以下では離散時間の生命表の年齢別発生確率 $q_x$ と年齢別発生数（発生割合） $d_x$ の2者の区別が重要である。連続時間の生命表関数では前者を発生率（死亡の場合、死力）、 $\mu(x, t)$ 、後者を発生密度（同、死亡密度）、 $d(x, t)$ と呼ぶが、ここではしばしば離散時間の生命表の用語によって代表することにする<sup>2)</sup>。

Bongaarts and Feeney (2002, 2003) は死亡率におけるテンポ効果として平均寿命の歪みを問題にしている。平均寿命は生命表の年齢別死亡確率 $q_x$ 、年齢別死力 $\mu(x)$ に基づくものであるから、テンポ効果によって平均寿命が歪むという主張は、 $q_x$ にテンポ効果があるという主張、つまり、生命表方式で $q_x$ を計算してもそれはテンポ効果を含んでいるという主張である。ということはテンポ効果によってコーホートの $q_x$ と期間の $q_x$ とが異なるという主張になる<sup>3)</sup>。実際、Bongaarts and Feeney (1998) は、テンポ効果は生命表によっても取り除くことができないと書いており（後述）、誤解はこのときにすでに表れているがこれを批判したものはなく、年齢別死亡確率、死力にテンポ効果があるという論文（たとえば出生について Kohler and Ortega, 2004）まで現れている。他方、筆者と同じように死亡の $q_x$ にテンポ効果を認めない研究者は何人かいる（たとえば, Wilmoth, 2005）が、出生についてはまったく批判していない。Guillot (2006) は期間の死亡水準として平均寿命が当面、妥当であるとする以上、この問題を追求すべきであるが、言及していない。

$q_x$ にテンポ効果があるという主張は人口学に混乱をもたらす極めて深刻な問題であり<sup>4)</sup>、形式人口学の基本に関する誤解である。この問題を解明することが本稿の課題である。これは以下の2つの課題になる。

Bongaarts and Feeney (2002, 2003) は死亡率におけるテンポ効果として平均寿命の歪みを問題にしている。この歪みが存在する証拠として、ある一時点における生存率改善を数値例によって説明している。したがって、これは彼らの議論の要となるものであるが、単なる例示で理解しにくく、数式による説明が試みられた (Feeney, 2006) が成功していない。これがテンポ効果による歪みではないことを示すことは、捉えやすい課題であり、これが本稿の第1の課題である。

これが死亡率における歪みでないこと、つまりテンポ効果でないことを筆者はシミュレーションで示し (Hirosima, 2005b)、Horiuchi (2005) も Appendix において数式的に証明した。しかし、Feeney (2003)、Bongaarts and Feeney (2005) はさらに生存率改善が多年次に継続する例を模式的に説明しており、これがどういうものかを正確に解明する必要がある。第3節においてこれをシミュレーションおよび数式により解明し、死亡率 $q_x$ における「歪み」、つまりテンポ効果でないことを明らかにしよう。

$q_x$ にテンポ効果がないことを説明するには第2には、その基本的な性格を述べ、 $q_x$ にテンポ効果がないこと、それがなくても $d_x$ にテンポ効果が生じることを示せばよい。そこでこれを数理的明らかにするとともに、シミュレーションにより解明する。その数理的説明は前稿 (廣嶋2005)で行ったが、より分かりやすく述べたい。その際、2次元コーホート生命表の概念が必要である。そこではコーホートと期間の発生確率、死力の同一性、つまり、 $q_x$ にはテンポ効果がなく、したがって、その二者は同一のものであるという設定のもとに議論が進められる。証明すべき対象を説明体系の中を含む。したがって、この設定が正しいかどうかは、このような説明体系全体を見て説得的かどうかの判断によるしかない。

そこで、本稿第2節でコーホートの $q_x$ と期間の $q_x$ との関係についてあらためて考察し、また、ある時点の死亡水準について、ひずみを受けないと Bongaarts

and Feeney (2002, 2003) が提唱する平均生存年数  $M2$ (MAD)と平均寿命  $M3$ との関係を考察する。彼らは  $M2$ をテンポ効果を取り除いたものとしているので、この点について前稿(2005)で現時点のものでなく過去の死亡水準を含むと述べた(同様の批判は Wachter, 2005; Guillot, 2006; Rodriguez, 2006)が、本稿では  $M2$ 、 $M1$ が現時点の死亡水準だとするとそれに対応する期間生命表を示してどのような矛盾が現れるかという形で批判する。結局、人口動態事象におけるテンポ効果とは、本質的に静止人口でないこと、コーホートと期間という2つの生命表の間で2つの関数 ( $l_x$ ,  $d_x$ ) の差異が生じることによるものであり、それが期間の合計動態率がコーホートの合計動態率(死亡の場合、 $=1$ )と一致しないことや3つの平均動態発生年齢間の食い違いとして現れるものであるということを明らかにする。

本論に入る前に、ここで、死亡確率、死力に対する疑問が起こっている背景、問題意識を述べておこう。Guillot (2006) は死亡のテンポ効果について、第1に、Vaupel (2002, 2005) の「人口の非均質性によって観察された死亡率 death rate がその人口の持つ死亡水準 mortality と異なる」という主張と関係があるものと解釈している<sup>5)</sup>。現実には、あるコーホートが加齢とともに経験する死亡率の時系列的変化には、ある人口におけるより強い(死亡率の低い)人口が選択的に残っていく過程という面が含まれていることは事実であると考えられる。こうした視点からは、ある時点の死力に過去の経験が含まれていないことが欠点であると感じられるかもしれない。しかし、これは人口の非均質性の問題であり、テンポ効果とは別の問題である。

また、Guillot (2006) は第2に、コーホートの死亡水準に関心がある立場から、現在の死力、平均寿命がコーホートの死亡水準と相違することを問題にする。しかし、この問題はテンポ効果ではなく、コーホートと期間の観察法の相違にすぎない。2つの観察はどちらかで代用することはできないのである。現在生きている人がその後経験する死亡水準と現在の平均寿命が異なるということは自明のことであり、これはテンポ効果ではなく、テンポ変化である。

Bongaarts and Feeney が歪みのない現在の平均生存年数として推奨する  $M2$  (MAD) は過去の死亡水準の影響を含んでいるので現在の死亡水準ではなく (廣嶋2005)、Wachter (2005) もほぼ同様の批判をしているが、Wachter は合計出生率について「過去の出生率に依存していない」としており、出生におけるテンポ効果は過去の出生率を含んでいることによると認識していない。年齢別出生率がコーホート生命表の発生数  $d_x$  (連続時間の発生密度) に当たる (第2節参照。廣嶋2000, p.33; 2005, 注3; Bongaarts and Feeney, 2003, p.13128) と認識していないからである。

このような誤解が生じた理由は生命表による出生の解明を重視しなかったからであると考えられる。たしかに出生は死亡より人口学的に複雑であるため、生命表より簡略な扱いをせざるを得なかっただろう。そこに人口学的に正確な考察がおろそかになる原因がある。私の提起の基本的立場は出生を理論的に死亡と同様に生命表関数によって扱うということであり、逆に死亡の生命表分析に、出生で問題にされてきたテンポの問題、つまり時間と年齢を同時に取り入れて拡張するということである。このため2次元コーホート生命表を理論的枠組みとして採用する。Bongaarts and Feeney (2003) はこれと同様の立場であったが、Bongaarts and Feeney (2005) はコーホート生命表の枠組をはずしてしまった。現在の動態水準の捉え方において生命表を否定したいという立場を一貫するためであろう。

Guillot (2006) は TFR がコーホートの出生力水準と異なる問題と並列して平均寿命がコーホート死亡水準と食違うことを問題としている。確かに人口学の教科書で TFR と平均寿命を出生と死亡の代表的指標として扱うことが多いが、この扱いは便宜的なものであり、この2つの形式人口学的性格が同一のものということの意味しない。したがって、またこの2つの指標にテンポ効果が同様の形で存在すると考えることも全くの誤解である。それはテンポ効果とコーホート・期間の観察法の相違とを混同するものである。

年齢別出生率は前述のようにコーホート生命表の  $d_x$  に相当するので、TFR のテンポ効果はその  $d_x (=l_x q_x)$  に含まれる  $l_x$  (出生未経験者割合) に反映された過

去の影響に過ぎない。もしある年次の出生率を $q_x$ で捉え、これによって動態量（カンタム）を計算すればそれがいわば調整合計出生率に相当し、そこにはテンポ効果は現れない（本稿付論2；廣嶋2005，付論2）。これならば平均寿命と対応する。

なお、コーホートと期間の平均生存年数の対応を研究する多くの努力（2005年秋から2006年春にかけて *Demographic Research* 誌に発表された多くの論文）には敬意を表するが、それが死亡確率のコーホートと期間の間での同一性をあいまいにするためであってはならない。

## 2. コーホート 2次元生命表とテンポ効果の本質

### 2-1. $q_x$ にテンポ効果はあるか：発生確率同一モデル

Bongaarts and Feeney (1998) は次のように書いている。少し長いが、その本質を理解するために引用する。「パリティ（またはパリティごとの継続時間）に対して標準化された出生率指標の計算に使われた生命表の手続きは出生におけるタイミングの変化の効果を直接に示さない」（p.273）。出生のタイミングの効果は「出生数を押さえたり、膨らましたりするので、すべての出生率、したがって合計出生率や通常の出生率とともに、生命表の率 rates にも影響する」（p.274）。「出生タイミングにおける変化の効果は1年あるいはある期間に発生する出生の数、つまり、出生率の分子に働くので、この変化によって引き起こされる歪みは他の期間的な出生率のほとんどの指標において見られる。たとえ、その計算が率の普通の合計であるか生命表形式の計算であるかにかかわらない」（p.278）。Whelpton の出生の生命表について、「これはさらによい結果を与えるが、生命表は当然、タイミングによる歪みの直接的な処理の代用にはならない」（p.2）<sup>6)</sup>。

以上のようにタイミング効果を時間当たりの出生数の変化と捉え、生命表の rates [ $q_x$ ]と年齢別出生率とをこの点で区別せず、生命表形式の率（発生確率）のテンポ効果除去の意義を否定する。ここにテンポ変化とテンポ効果との混同がみられる。

たしかに、ある時期におけるテンポ変化が起こす分子の変化は年齢別出生確率にも年齢別出生率<sup>7)</sup>にも反映される。テンポの変化はその意味で、出生率にも出生確率にも生じる。しかし、それがただちにテンポ効果であるとは限らない。テンポ効果、歪みであるというのは、時期の観察値とコーホートの観察値が異なるという意味である。年齢別出生率と出生確率の違いはその分母にある。ここまでは容易に理解されるであろう。「出生確率は出生未経験者を分母にするから観察時点前の出生力はまったく影響がなく、したがって、テンポ変化の影響を受けない、この点で年齢別出生率と異なる」、このようにといても十分理解されないであろうから、詳しくは後で述べることにして、ここでは、ただ次の点を確認する。

コーホート観察による出生確率と期間観察による出生確率が異なるものかどうかについて述べておこう。我々は以下のように考える。期間生命表による期間の出生確率の観察はコーホートの経験とは別にその外から観察するものではなく、ある期間における各年齢別のコーホートの経験を合成して仮設コーホートとして構成されたものにすぎない。コーホートの各年齢の出生確率 $q_x$ を期間的に集めたのが期間の観察なので、コーホートの確率とは別のものではなく、まったく同一のものである。これはテンポ変化があろうとなかろうと同じである。テンポ変化があれば $q_x$ はそれを忠実に反映するだけである。だから、「ある時点の年齢別発生確率 $q_x$ が時期的観察ではコーホートについての発生確率とは異なるものだ」と考え、テンポ効果をいわゆるドップラー効果と類似のものとするのは誤りである。時期的観察者はコーホートの加齢とともに1年間あるいは一瞬の間ともに同じ発生確率を経験するはずである。

このような考えのもとに、期間生命表の死亡確率によってコーホート生命表が作られている。もし、テンポ変化があるときコーホートの死亡確率が期間生命表の死亡確率と異なるのであれば、コーホート生命表はほとんどの場合作るできないことになる。

以上のような考えは極めて自然であると考えられるが、Bongaarts and Feeney

およびその賛同者にとってはそうではないようだ。そして、我々の考えが正しいことを論証するには、これによってすべてが矛盾なく説明できることによらなければならないだろう。その意味で、上記の考えは一つのモデルと言わざるを得ない。このモデルをコーホートと期間との発生確率が同じものするという意味で発生確率同一モデル Identical Intensity Model と呼ぶことにする。我々はこのモデルの上に立って理論を構築することにする。このモデルによってテンポ効果が合理的に説明されるとき、モデルは成功したといえるだろう。

さて、離散時間で考えると、当然、期間の $q_x$ とコーホートの $q_x$ が Lexis 図上で異なる範囲で表される。したがって、もし各年齢の範囲内で死亡の発生確率 $\mu_x$ が同じ値で分布していなければ、テンポの $q_x$ とコーホートの $q_x$ の値は当然異なる。

Horiuchi (2005) はこの問題を取り上げ、1 歳幅において次第に死亡テンポが変化しているとき、コーホートと期間で死亡割合 (数)  $d_x$  が異なることを証明している<sup>8)</sup>。これは、異なる範囲つまり、異なる時点・年齢の要素を累積するから起こるものである。しかし、この場合でもある一点における死力 $\mu_x$ がコーホートと時期において異なることを主張するものではない。

以上のように、各年齢、各時点における死力 $\mu_x$ が期間とコーホートで同じとしても現実にはある範囲において計算される場合、差異が生まれる。これは異なる範囲で計測することから起こる、計測上の問題である。したがって、これをテンポ効果とは呼ばない方がよいだろう。

Kohler and Ortega (2004) は出生の intensity (出生確率) からテンポ効果を取り除く計算をしているが、なぜ出生の intensity にテンポによる歪みがあるかは述べていない。生命表による出生確率を計算することにより、過去における出生により出生経験者の割合が異なることの影響を除去すると述べているが、その影響が実はテンポ効果であるとは考えていないのである。

また、Bongaarts and Feeney (2005) は「死亡に関して死亡確率にもテンポ効果があるが、死亡の量指標 (カンタム) は常に 1 で (テンポ効果を除去する必

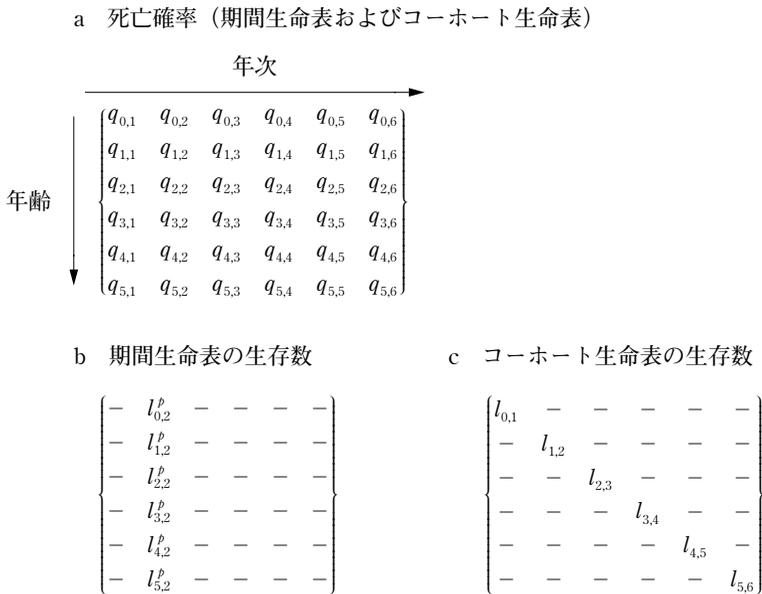
要がないのは)、年齢別死亡確率が年齢とともに上昇するからである。」(P.18)と説明しているが、理解できる説明ではない。

以下、発生確率同一モデルに沿って議論を進める。

### 2-2 コーホート2次元生命表関数

テンポ効果を考える際、ある時間と年齢の範囲において動態率の変化の過程を考えるので、時間と年齢の2次元生命表を考えることが必要である。従来、通常生命表は期間かコーホートについてのものであるため2次元である必要はなかった。これがどのようなものであるか説明するため、通常生命表の離散時間の期間生命表から出発する。多くの年次について年次 $t$ 、年齢 $x$ 歳の年齢別死亡確

図1 期間生命表と2次元コーホート生命表



注：横軸は年次、縦軸は年齢

率 $q_{x,t}$ を、横軸に年次 $t$ 、縦軸に年齢 $x$ をとり配置する。この $q_{x,t}$ は年次別の年齢別人口と年齢別死亡数によって期間生命表を作るために計算されるものである(図1-a)。この同じ年齢別死亡確率から、コーホート生命表の他の生命表関数を作ることができる。通常、コーホートについてはある出生コーホートについてのものであるが、これを $q_{x,t}$ と同様に、すべて年次、年齢によって並べる(図1-c)。コーホートの生存数 $l_{x,t}$ は以下のように計算され、あるコーホートについて対角線方向に計算される。

$x \geq 1$ において $l_{x,t} = l_{x-1,t-1}(1 - q_{x-1,t-1})$ 。あるいは、 $l_{x,t} = \prod_{i=0, j=t-x+i}^{x,t} (1 - q_{i,j})$ 。ただし、 $l_{0,t} = 1$ 。

また、 $d_{x,t} = l_{x,t} - l_{x+1,t+1}$  あるいは、 $d_{x,t} = l_{x,t}q_{x,t}$ 。

これに対して、通常の間生命表の生存数 $l_{x,t}^p$ は以下のようにある年次について縦方向に計算される(図1-b)。

$x \geq 1$ において $l_{x,t}^p = l_{x-1,t}^p(1 - q_{x-1,t})$ 。あるいは、 $l_{x,t}^p = \prod_{i=1}^x (1 - q_{i-1,t})$ 。ただし、 $l_{0,t}^p = 1$ 。

また、 $d_{x,t}^p = l_{x,t}^p - l_{x+1,t}^p$ 、あるいは、 $d_{x,t}^p = l_{x,t}^p q_{x,t}$ 。

生命表関数について以下では、より数学的に表現しやすい連続時間モデルで表すことにする。基本的内容は、前稿(廣嶋2005)でも書いたが、より分かりやすく、かつテンポ効果の本質に絞って説明する。時点 $t-x$ に生まれたコーホートの時点 $t$ 、年齢 $x$ 歳における生存率を $l(x,t)$ 、死亡密度を $d(x,t)$ 、死力を $\mu(x,t)$ とすると、これらの間の関係は以下のとおり。

$$l(x,t) = \exp \left[ - \int_0^x \mu(a, t-x+a) da \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$d(x,t) = - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{l(x+a, t+a) - l(x,t)}{a} \dots \dots \dots (2)$$

$$\mu(x,t) = \frac{d(x,t)}{l(x,t)} \dots \dots \dots (3)$$

(1)式は時点 $t-x$ に出生したコーホートの大きさ  $l(x,t)$  が加齢とともに死力

$\mu(a, t-x+a)$  によってしだいに減少していく様子を示している。時点  $t-x$  に出生したコーホートの年齢は時点  $t-x+a$  において  $a$  歳である。死亡密度  $d(x,t)$  は  $l(x,t)$  をコーホートの生存線の方向に微分したものである ((2)式) (前稿の図1、および図2参照)。これらの関係は、同様に死力  $\mu(x,t)$  に基づく期間生命表関数とは異なる。

以下はよく知られた期間生命表関数の関係である。 $l_p(x,t)$  および  $d_p(x,t)$  は、時点  $t$  における仮設コーホートの生存率および死亡密度を表す。

$$l_p(x,t) = \exp\left[-\int_0^x \mu(a,t) da\right], \dots\dots\dots(4)$$

$$d_p(x,t) = -\frac{\partial l_p(x,t)}{\partial x}, \dots\dots\dots(5)$$

$$\mu(x,t) = \frac{d_p(x,t)}{l_p(x,t)} \dots\dots\dots(6)$$

以上2組の生命表関数は  $\mu(x,t)$  によってのみ関係付けられており、これらの2組の生命表関数 ( $\mu(x,t)$  を除く) が同一になるのは死亡率一定の静止人口であるときだけである。

この記号法の特徴は、コーホート生命表関数と期間生命表関数のどちらもが、ある時点  $t$  のある年齢  $x$  の生命表関数を表していることである。ある時点  $\tau$  に出生したコーホートのある年齢  $x$  の生命表関数 ( $c$  をつけて示す) を表す  $l_c(x,\tau)$ 、 $d_c(x,\tau)$  などとは異なる。また、一般にはサブスクリプトに何もつけない場合に期間生命表関数を表すことが普通であるが、ここでは期間生命表関数には  $p$  をつけて区別している点で一般の記号法と異なる。本論文ではコーホートを主体に扱うので、やや特殊な表現を使うのである。この記号法は基本的に Bongaarts and Feeney (2003) と同じである。

このモデルの重要な点は、コーホートと期間で死亡確率  $q_{xt}$  あるいは死力  $\mu(x,t)$  が同一であり、他の生命表関数は、コーホートと期間で異なりうるという

ことである。もし、この人口の死亡率がまったく変化がない、つまり静止人口であるとしたら、コーホートと期間との区別はまったくなくなる。逆にいうと、テンポ変化とは、コーホートと期間の生命表関数が死力（死亡確率）以外の2つの生命表関数について相異なることであるといえる。

つまり、 $l(x,t) \neq l_p(x,t)$  あるいは  $d(x,t) \neq d_p(x,t)$  …………… (7)

このように死亡についてはテンポ変化は非静止人口であることであるが、死亡以外については同様に非静止人口であることによってテンポ効果と量効果が現れる。

### 2-3 コーホート2次元生命表関数とテンポ効果

上で述べたように、テンポ変化とは死力 $\mu(x,t)$ 以外の2つの生命表関数がコーホートと期間の間で異なることといえる。したがって、テンポ変化があるとき生命表関数から導かれる合計、平均、分散、高次モーメントなどについて各種の差異が生じる。そこでいくつかのこのような指標についてこれらについての差異がテンポ効果であること、つまり、上の定義のように、コーホートと期間の間で生命表関数が異なることによることを証明しよう。まず、ある時点における次の3つの平均死亡年齢 $M1$ 、 $M2$ 、 $M3$ について検討する。

Bongaarts and Feeney (2003) の定義と同様に3つのコーホート生命表関数によって時点 $t$ における以下の3つの平均死亡年齢が定義できる。

$$M1(t) = \int_0^{\omega} l(x,t) dx = \int_0^{\omega} \exp\left[-\int_0^x \mu(a,t-x+a) da\right] dx, \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$M2(t) = \frac{\int_0^{\omega} xd(x,t) dx}{\int_0^{\omega} d(x,t) dx}, \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$M3(t) = \int_0^{\omega} \exp\left[-\int_0^x \mu(a,t) da\right] dx \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで $\omega$ は最高年齢。Guillot (2003) は $M1(t)$ を横断平均生存期間 (cross-

sectional average length of life (CAL) と呼んでいる。時点  $t$  年齢  $x$  におけるコーホート生存率  $l(x,t)$  にもとづいて計算されるからである。 $M2(t)$  は MAD, mean age at death と呼ばれている。また、死力  $\mu(x,t)$  は、コーホートと期間の間で同一であるから、 $M3(t)$  は期間生命表の平均寿命  $e_0$  である。ところで、期間生命表の理論によれば、下記の関係がある。この証明は人口学の教科書に譲る。

$$\begin{aligned}
 M3(t) &= \int_0^\omega \exp\left[-\int_0^x \mu(a,t) da\right] dx = \int_0^\omega l_p(x,t) dx = \frac{\int_0^\omega x d_p(x,t) dx}{\int_0^\omega d_p(x,t) dx} \\
 &= \int_0^\omega x d_p(x,t) dx, \quad \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

ここでもし、テンポ変化がなく、コーホートと期間で生命表関数が一致していれば、(11)式は(8)、(9)式と一致し、 $M3(t)$  は  $M2(t)$  および  $M1(t)$  と一致する。また、逆にテンポ変化があるとき (式(7))、これらは相互に異なるのである。とはいえ、テンポ変化があっても、 $M1(t)$  と  $M2(t)$  は相互に等しくなることがありうる。 $M1(t)$  と  $M2(t)$  について Bongaarts and Feeney (2003) は年齢別死亡率の比例的変化の場合を述べているが、ここでは、 $M1(t)$  と  $M2(t)$  との間の一般的な関係から、その条件は付論 1 で述べる。ただし、ある時点の死亡水準を表す  $M3(t)$  はテンポ変化がある場合、他の平均年齢と一致することはないようだ。

これらのうち、 $M2(t)$  および  $M1(t)$  は現時点における死亡水準を表すものではないこと、したがって、死亡水準変化があるときその過去の死亡水準の影響の大きさによって大小関係が生じることは前稿で述べた。ここでは、過去の死亡水準を反映する  $M2(t)$  および  $M1(t)$  が現在の死亡水準を表すものであると仮定したとき、いかに不合理であるかを説明しよう。

$M1(t)$  が現時点の死亡水準を表すものと Bongaarts and Feeney (2002, 2003) は考えているので、もしそうだとすると、これがどういうことを意味するかを考察するため、この基になっている生存率  $l(x,t)$  によって期間生命表(I)をつくっ

てみる。このとき、この生命表の年齢  $x$  歳における死亡密度  $d_1(x, t)$  および死力  $\mu_1(x, t)$  は次のように表される。

$$d_1(x, t) = -\frac{\partial l(x, t)}{\partial x} \quad \mu_1(x, t) = \frac{d_1(x, t)}{l(x, t)} \dots\dots\dots (12)$$

これらはある年齢で負になりうる。なぜなら、これらは隣り合ったコーホートの間の関係を表しており、 $l(x, t)$  は時点  $t$  において年齢  $x$  に関して単純減少関数であるとは限らないからである。このとき、負の年齢別死亡率は生き返り率と解釈できる。平均死亡年齢  $M1(t)$  がその時点の死亡水準を表すと考えることは、このような非現実的な生命表を考えることになる。

ただし、文字どおり、 $M1(t)$  がこの時点までのコーホート死亡率の水準を表していると解釈することには何の問題もない。また、年齢別死亡確率に時間的にほとんど変化がないとき、 $M1(t)$  を  $M3(t)$  の近似値として用いることができると考えられる。SMAM がこれにあたるが、死亡については  $M1(t)$  が  $M3(t)$  より計算が容易であることはないし、より優れているわけでもない。

なお、このとき  $d_1(x, t)$  を  $0$  から  $\omega$  まで積分するとこれは TMR に対応するが、常に  $1$  であり (式 (14))、また  $l(\omega, t) = 0$  となる。つまり、すべての人が  $1$  度だけ死亡する。その点での矛盾はない。

同様に、ある時点の平均死亡年齢として Bongaarts and Feeney (2002, 2003) が  $M3(t)$  より理想的と考える  $M2(t)$  について考察する。もし、これがある時点の死亡水準を表していると考え、この基になっている  $d(x, t)$  によって期間生命表 (II) を作るとすると、時点  $t$  年齢  $x$  歳の生存率  $l_2(x, t)$  および年齢  $x$  歳の死力  $\mu_2(x, t)$  は年齢  $x$  歳の死亡密度  $d(x, t)$  によって、以下のように表される。

$$l_2(x, t) = 1 - \left[ \int_0^x d(a, t) da \right], \quad \mu_2(x, t) = \frac{d(x, t)}{l_2(x, t)} \dots\dots\dots (13)$$

この期間生命表 (II) において  $d(x, t)$  の  $0$  から  $\omega$  における  $x$  に関する積分 (TMR) は後でみるように、 $1$  になるとは限らない。また、 $l_2(\omega, t)$  あるいは  $l_2(\infty, t)$  は  $0$  になるとは限らない。つまり、 $2$  度以上死ぬ人がいるとか、死なない人が存在

することを意味する（廣嶋2005）。このような不合理な生命表を前提にするのが、この平均死亡年齢である。したがって、これが出生や初婚などで一般的に使われているのは、計算の複雑な  $M3(t)$  の近似値としてであると考えるべきである。死亡では  $M2(t)$  は  $M3(t)$  より計算が容易であることはないし、何の優れた点もない。

つぎに、動態事象について、3つの期間生命表それぞれによって以下の3つの量（カンタム）あるいは一人当たり平均回数あるいは経験者割合を定義する。これらは平均死亡年齢の分母に明示的( $M2(t)$ )あるいは暗黙に使われている。

$$Q1(t) = \int_0^\omega d_1(x,t) dx = \int_0^\omega \mu_1(x,t) l(x,t) dx = \int_0^\omega -\frac{\partial l(x,t)}{\partial x} dx = [-l(x,t)]_0^\omega = 1 \dots\dots\dots (14)$$

$$Q2(t) = \int_0^\omega d(x,t) dx = \int_0^\omega \mu(x,t) l(x,t) dx \dots\dots\dots (15)$$

$$Q3(t) = \int_0^\omega d_p(x,t) dx = \int_0^\omega \mu(x,t) l_p(x,t) dx = 1 \dots\dots\dots (16)$$

これらは3つの仮設コーホートに関する累積死亡密度である。 $Q2(t)$ はTMRであり、下の式が成り立つ（廣嶋2005）<sup>9)</sup>。

$$TMR = Q2(t) = \int_0^\omega d(x,t) dx = 1 - \frac{dM_1(t)}{dt} \dots\dots\dots (17)$$

これを合計率定理と呼んだ。もし、静止人口であるとする、 $d(x,t) = d_p(x,t)$ であるから、この式の左辺は(16)式と一致し、1に等しくなる。したがって、また、式(17)から、 $\frac{dM_1(t)}{dt} = 0$ となる。このように、TMRの1との等不等は、静止人口であるかどうかを示し、したがってテンポ効果を示しているといえる。

この式は、動態事象一般に(18)式のように拡張され、合計出生率などに適用できる（廣嶋2005）。それと Bongaarts and Feeney (1998) の調整合計出生率 ATFR との関係については付論2で述べる。

$$\begin{aligned}
 Q2(t) &= \int_0^{\omega} d(x,t) dx = 1 - l(\omega, t) - \frac{d}{dt} [\{1 - l(\omega, t)\} M1(t) + \omega l(\omega, t)] \\
 &= \{1 - l(\omega, t)\} \left\{ 1 - \frac{dM1(t)}{dt} \right\} - \frac{dl(\omega, t)}{dt} \{\omega - M1(t)\} \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

ただし、式(8)を一般化して、

$$\begin{aligned}
 M1(t) &= \frac{\int_0^{\omega} x d_1(x,t) dx}{\int_0^{\omega} d_1(x,t) dx} = \frac{\int_0^{\omega} l(x,t) dx - [xl(x,t)]_0^{\omega}}{\int_0^{\omega} -\frac{\partial l(x,t)}{\partial x} dx} \\
 &= \frac{\int_0^{\omega} l(x,t) dx - \omega l(\omega, t)}{1 - l(\omega, t)} \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

以上のように、平均死亡年齢と量指標について生命表関数の不等性がテンポ効果として現れることを具体的に明らかにした。

### 3. 平均寿命は歪んでいるか？

#### 3-1 コーホート生存率の1回の変化と死亡率

Bongaarts and Feeney (2002, 2003, 2005) は、ある時点の死亡の水準（テンポ）変化をコーホート生存率の改善として表した場合、死力（死亡確率）が一時的に低下する（直後にまた上昇する）、したがって、平均寿命が一時的に上昇するという現象があることに気づき、この現象をテンポ効果による歪みと考えられている。

コーホート生存率には過去の死亡率が反映しているから、ある時点の死亡水準を表す死亡確率とは必ずしも一致しないので、不思議なことではないが、この現象を動的な過程を扱うのに適した2次元コーホート生命表関数によってより詳しく説明しよう。

Bongaarts and Feeney (2002, 2003) は、この現象がある年次に一度だけ変化が起こる場合を数値的な例によって説明をしている。

これを数式によって一般的に示そう。これは Horiuchi, 2005 (Appendix) が、ある静止人口から別の静止人口への移行が突然に起こるという特殊な場合であ

ること、その場合に死亡率の一時的な低下が生じることを証明している。この証明には静止人口の年齢別人口  $N(x)$  が使われているが、ここでは離散時間のコーホート生命表関数によって表現してみよう。

1つの静止人口の状態から第2の静止人口へ推移する。この推移がある1年次に突然起こる場合である。この2つの静止人口の年齢別生存数をそれぞれ  $l_{x,t}^1 = l_x^1$   $l_{x,t}^2 = l_x^2$  とする。

どの年齢でも生存率が上昇すると仮定されているから、 $l_x^1 < l_x^2$ 。

ある年次において突然、この2つの静止人口への移行が起こるとする。この変化の起こった年の年齢別死亡率を  $q_x^0$ 、前後の静止人口の死亡率を  $q_x^1$  および  $q_x^2$  とすると、それぞれの期間の年齢別死亡率は生存数によってつぎのように表される。

$$q_x^1 = 1 - \frac{l_{x+1}^1}{l_x^1} \quad q_x^0 = 1 - \frac{l_{x+1}^2}{l_x^1} \quad q_x^2 = 1 - \frac{l_{x+1}^2}{l_x^2}$$

ここで  $l_{x+1}^1 < l_{x+1}^2$  および  $l_x^1 < l_x^2$  であるから、

$$\frac{l_{x+1}^1}{l_x^1} < \frac{l_{x+1}^2}{l_x^1} > \frac{l_{x+1}^2}{l_x^2}。$$

したがって、 $q_x^1 > q_x^0 < q_x^2$ 。

また、これらに基づいて計算されるそれぞれの平均寿命を  $e_0^1$ 、 $e_0^0$ 、 $e_0^2$  とすると、これらの関係は以下ようになる。

$$e_0^1 < e_0^0 > e_0^2$$

つまり、このように突然の年齢別生存率の上昇が起きた場合、その静止人口へ移行する年次の死亡率は一時的に低くなり、平均寿命は伸びるのである。この突然の生存率の伸びに対応して死亡率が変化したことを反映したものであり、歪みとはいえない。

次に、これをシミュレーションによって歪みとは何かもう少し具体的に明らかにしよう。そのシミュレーションのしくみは廣嶋（2005）と同じで、説明はそちらに譲る。なお、年齢数は4歳までと極めて少ないが、今、各年齢の生存

表1-A 2つの静止人口間の移行  
死亡確率の一時的低下を生じる生存  
率(1)の1時点(1981年)延長

(1) コーホート生存割合,  $l_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	10	10	10	10	10	10	10
1	9	9	10	10	10	10	10
2	6	6	7	7	7	7	7
3	2	2	4	4	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
M1	2.2	2.2	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6
M1'	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

(2) コーホート死亡割合,  $d_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3	2	3	3	3	3	3
2	4	2	3	3	3	3	3
3	2	2	4	4	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
TMR	10	6	10	10	10	10	10
M2	2.2	2.5	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6

(3) 死亡確率,  $q_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3.3	2.2	3	3	3	3	3
2	6.7	3.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3
3	10	10	10	10	10	10	10
4	10	10	10	10	10	10	10

(4) 年次別死亡割合,  $d_{x,t}^0$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3	2.2	3	3	3	3	3
2	4	2.6	3	3	3	3	3
3	2	5.2	4	4	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
Q3	10	10	10	10	10	10	10
$e_0$	2.2	2.8	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6

Bongaarts and Feeney (2002, 2003) の数値例に対応する。  
 (1) 1981年に生存率が変化すると設定する。  
 すなわち,  $l_x$  が (10, 9, 6, 2, 0) から (10, 10, 7, 4, 0) へ変化。  
 (2)  $d_x$  は  $l_x$  から、(3)  $q_x$  は  $d_x$  と  $l_x$  から、また (4)  $d_x^0$  は  $q_x$  から算出。  
 影のあるセルは1981年初に0歳のコーホートを示す。

表1-B 2つの静止人口間の移行  
死亡確率(3)の1時点(1981年)低下

(1) コーホート生存割合,  $l_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	10	10	10	10	10	10	10
1	9	9	10	10	10	10	10
2	6	6	6.3	7	7	7	7
3	2	2	3.4	3.6	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
M1	2.2	2.2	2.5	2.56	2.6	2.6	2.6
M1'	0.0	0.27	0.09	0.04	0.0	0.0	0.0

(2) コーホート死亡割合,  $d_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3	2.7	3	3	3	3	3
2	4	2.6	2.7	3	3	3	3
3	2	2	3.4	3.6	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
TMR	10	7.27	9.13	9.6	10	10	10
M2	2.2	2.40	2.55	2.56	2.6	2.6	2.6

(3) 死亡確率,  $q_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3.3	3	3	3	3	3	3
2	6.7	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3
3	10	10	10	10	10	10	10
4	0	0	0	0	0	0	0

(4) 年次別死亡割合,  $d_{x,t}^0$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3	3	3	3	3	3	3
2	4	3	3	3	3	3	3
3	2	4	4	4	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
Q3	10	10	10	10	10	10	10
$e_0$	2.2	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6

(3) 死亡確率  $q_x$  が1981年から変化すると設定する。  
 (1)  $l_x$  と (2)  $d_x$  は  $q_x$  から算出。  
 (4)  $d_x^0$  は  $q_x$  から算出。  
 $e_0$  は1981年から2.6歳に変化し, M2, M1も最終的には2.6歳になる。  
 M1の変化が一番遅い。

表1-C 2つの静止人口間の移行  
生存率の多年次変化(1)による一時的  
死亡率低下(生存率がAとBの間)

(1) コーホート生存割合,  $l_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	10	10	10	10	10	10	10
1	9	9	10	10	10	10	10
2	6	6	6.4	7	7	7	7
3	2	2	3.5	3.7	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
M1	2.2	2.2	2.5	2.6	2.6	2.6	2.6
M1'	0.0	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0

(2) コーホート死亡割合,  $d_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3	2.6	3	3	3	3	3
2	4	2.5	2.7	3	3	3	3
3	2	2	3.5	3.7	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
TMR	10	7.1	9.2	9.7	10	10	10
M2	2.2	2.4	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6

(3) 死亡率,  $q_{x,t}$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3.3	2.9	3	3	3	3	3
2	6.7	4.2	4.2	4.3	4.3	4.3	4.3
3	10	10	10	10	10	10	10
4	10	10	10	10	10	10	10

(4) 年次別死亡割合,  $d_{x,t}^a$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	0	0	0	0	0	0
1	3	2.9	3	3	3	3	3
2	4	3.0	2.95	3	3	3	3
3	2	4.1	4.05	4	4	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0
Q3	10	10	10	10	10	10	10
$e_0$	2.2	2.63	2.605	2.6	2.6	2.6	2.6

- (1)  $l_x$  が A と B の間になるよう設定する。  
(2)  $q_x$  は  $d_x$  と  $l_x$  から算出。  
(3) この場合、A と同様、 $q_x$  は一時的に低下し、平均寿命は一時的に上昇する。  
(4) の薄い影は生存割合が A と B の間である部分。その関係部分も薄い影で示す。

率がすべて上昇する場合であるから、前後2つの生存数曲線は交差しないので、年齢数はこれで十分である。

表1-Aはある静止人口から別の静止人口への移行が突然に起こる場合である。ここでは突然の生存率改善の例が示されている。生存数 $l_x$ の変化(10,9,6,2→10,10,7,4)が1982年初に起きるものとする。このとき、平均年齢M1が2.2歳から2.6歳に突然伸びる。このとき、たしかに通常の期間生命表の平均寿命( $e_0$ )M3が一時的に2.8歳に上昇している。これは、(3) $q_x$ を見れば分かるように、過去の高い死亡率の影響によってすでに減少している生存数を急に1982年に大きくするために年齢別死亡率を急に一時的に下げなければならないからである。

これに対して、表1-Bは(3) $q_x$ の変化が1981年から起こった場合である。この変化によって2つの静止人口の移行が徐々に進行し(毎年1歳ずつ静止人口に置き換わっていき)、1984年に完全に置き換わる。 $q_x$ に基づいて計算される平均寿命( $e_0$ )M3は当然この $q_x$ の変化が生じた年次1981年からただちに2.6歳に上昇する。M1、M2はそれぞれこれより遅れて2.6歳に向かって次第に上昇し

ていく。上昇速度は  $M3$ 、 $M2$ 、 $M1$ の順で大きく、一番遅いのは  $M1$ である。このように  $q_x$ の変化がある時点から変化する場合、2つの静止人口の移行が緩やかに進み、 $M3$ の変化傾向は、 $M2$ 、 $M1$ と矛盾する動きは示さず、歪みは生じない。このように Bongaarts and Feeney (2003, p.13131) の主張に反して、 $M1$ がある時点から変化するときにも  $M3$ に歪みが常に起こるわけではないことを示すことができる。そもそも、現時点の死亡水準でなく、過去の死亡水準をもっとも強く表す  $M1$ によって現状の死亡水準を表そうとするとところに無理があるのである<sup>10)</sup>。

### 3-2 コーホート生存率の連続する変化と死亡率

Feeney (2003) は2つの静止人口間の移行が1年の変化でない場合、つまり、生存率の増加が何年か連続する場合を示している。そこで、このように複数年の生存数の変化について「歪み」が起こる条件を示そう。

この2つの静止人口の間の推移で、「歪み」が起る場合の例を数値シミュレーション表1-Cで示す。これは(1)生存割合について表1-Aの状態と表1-Bの間の状態である(異なる部分を薄い影で示す)。実際、この場合、平均寿命  $e_0(M3)$ は1981、82年の2年間一時的に高くなっている。これは、 $l_{x,t}$ が、次の静止人口の  $q_{x,t}$ がただちに現れたときの  $l_{x,t}$ (表1-B)より大きく、表1-Aの  $l_{x,t}$ より小さいときである。このとき、表1-Aと同様に、 $q_{x,t}$ が一時的に低下し、 $M3$ が逆に伸びることが起こる。表1-Cのような条件を満たす  $l_{x,t}$ がある年次にわたって生じると仮定すれば、「歪み」が出現するのである。

以上のような生存率上昇における死力の変化を連続時間モデルにより一般的に証明しよう。このためには、あらかじめ表1-Bの場合つまり死力が突然変化する場合を先に考えるとわかりやすい。

第1の静止人口の年齢  $x$  歳の死力を  $\mu_1(x,t) = \mu_1(x)$ 、第2の静止人口の死力を  $\mu_2(x,t) = \mu_2(x)$  で表すと、それぞれの生存数  $l_1(x,t) = l_1(x)$ 、 $l_2(x,t) = l_2(x)$  は次のように表される。この節のサブスクリプトは第2節のサブスクリプトと意味

が異なる。

$$l_1(x) = 1 - \exp\left[\int_0^x \mu_1(a) da\right] \dots\dots\dots (20)$$

$$l_2(x) = 1 - \exp\left[\int_0^x \mu_2(a) da\right] \dots\dots\dots (21)$$

今、時点  $T$  において死力が  $\mu_1(x)$  から  $\mu_2(x)$  に変化するものとする (図 2-a)。時点  $T$  以後に生まれたコーホートは  $\mu_2(x)$  の死亡率を経験するが、時点  $T-\omega$

図 2-a 死力  $\mu_1(x)$  が時点  $T$  から死力  $\mu_2(x)$  に変化

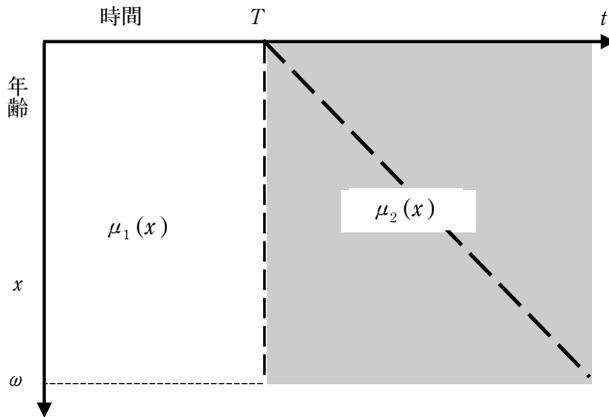
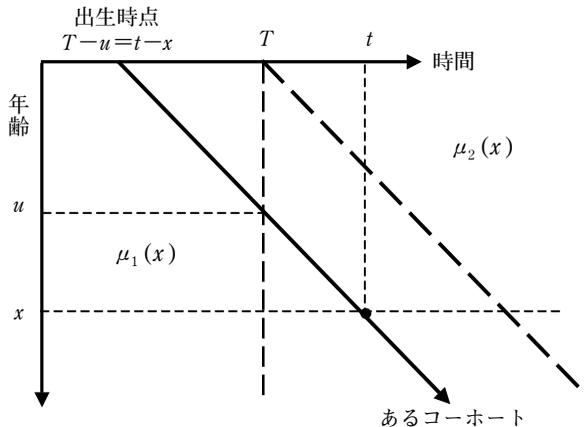
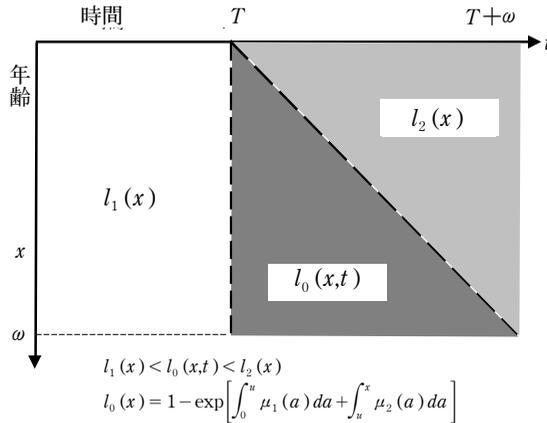


図 2-b 死力が変化した場合のあるコーホートの経験する死力



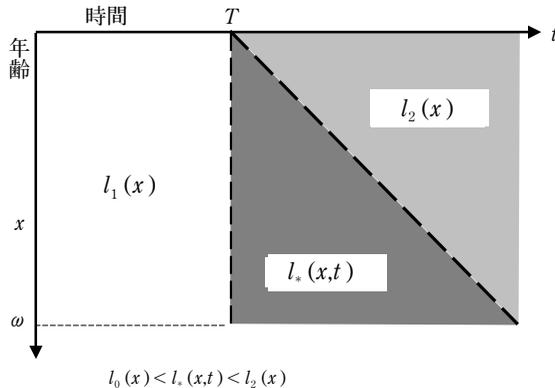
から  $T$  の間に出生したコーホートは生まれた時から時点  $T$  まで  $\mu_1(x)$  の死力を経験し、時点  $T$  からは  $\mu_2(x)$  を経験する (図 2-b)。その結果現れる生存率は当初、 $l_1(x)$  であるが、時点  $T$  から  $l_0(x,t)$  となる (図 2-c)。この時点  $T$  における年齢を  $u$  とすると、このコーホートの生存率  $l_0(x,t)$  は以下のように表される。

図 2-c 死力  $\mu_1(x)$  が時点  $T$  から死力  $\mu_2(x)$  に変化したときの生存割合  $l(x)$



時点  $T$  に生まれたものは死力  $\mu_2(x)$  を経験するが、 $T-\omega$  から  $T$  年に出生したものは生まれた時から時点  $T$  まで死力  $\mu_1(x)$  を経験し、時点  $T$  からは  $\mu_2(x)$  を経験する。このとき、時点  $T$  から  $l_0(x,t)$  が現れる。

図 2-d 生存率が  $l_0(x) < l_*(x,t) < l_2(x)$  である場合の一時低下する死力  $\mu_*(x,t)$  の範囲



$l_*(x)$  は死力  $\mu_1(x)$  が時点  $T$  から死力  $\mu_*(x,t)$  に変化したときの生存割合

$$l_0(x,t) = 1 - \exp \left[ \int_0^u \mu_1(a) da + \int_u^x \mu_2(a) da \right] \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $T-u=t-x$  であるので、 $u=T-t+x$ 。

コーホートの出生が後の時点ほど $l_1(x)$ の部分がしだいに減少し、時点 $T$ の出生コーホートから全部 $l_2(x)$ に置き換わる(図2-c)。このように $l_0(x,t)$ は時点によって異なる。

以上のようにある時点から経験する死力が変化してもコーホートの生存率は直ちに $l_2(x)$ に変化しないのである。このため、生存率は3つの領域 $l_1(x)$ 、 $l_0(x,t)$ 、 $l_2(x)$ に分けられる。ただし、 $l_1(x) < l_0(x,t) < l_2(x)$ 。

つぎに、表1-Cに対応する場合を数式で表す。これは、 $l_0(x,t)$ の領域を $l_*(x,t)$ に置き換えたもので、 $l_*(x,t)$ は $l_0(x,t)$ よりは大きく $l_2(x)$ よりは小さいものとする。このときこの領域の死力を $\mu_*(x,t)$ とすると、これが全体的には前後の死亡水準より一時的に低いことを証明すればよい(図2-d)。すなわち、

$$l_0(x) \leq l_*(x,t) \leq l_2(x) \dots\dots\dots (23)$$

とすると、
$$\int_u^x \mu_*(a,t) da \leq \int_u^x \mu_2(a) da$$

であることを証明する。この不等式は不等式(23)の後半と矛盾するように見える。

このとき、 $l_*(x,t)$ は以下のように表される。

$$l_*(x,t) = 1 - \exp \left[ \int_0^u \mu_1(a) da + \int_u^x \mu_*(a,t) da \right] \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $u=T-t+x$

(22)と(24)を不等式(23)の前半に代入すると、

$$- \exp \left[ \int_0^u \mu_1(a) da + \int_u^x \mu_2(a) da \right] \leq - \exp \left[ \int_0^u \mu_1(a) da + \int_u^x \mu_*(a,t) da \right] \quad (25)$$

したがって、

$$\int_0^u \mu_1(a) da + \int_u^x \mu_2(a) da \geq \int_0^u \mu_1(a) da + \int_u^x \mu_*(a,t) da$$

$$\int_u^x \mu_*(a,t) da \leq \int_u^x \mu_2(a) da \quad \dots\dots\dots (26)$$

したがって、 $e_*(t) \geq e_2$ である。  $\dots\dots\dots (27)$

ただし、 $e_*(t)$ 、 $e_2$ はそれぞれ一時的に上昇する時期および第2の静止人口の平均寿命。

なお、個々の年齢  $x$  においてすべて  $\mu_*(x,t) \leq \mu_2(x)$  であることは(27)式が成り立つための十分条件ではあるが、必要条件ではない。

以上のように、不等式(23)を満たすとき、平均寿命は一時的に上昇するといえる。

不等式(23)の左の等号が成り立つ場合は時点  $T$  から  $\mu_2(x)$  になる場合 (表1-B、図2-c) であり、右側の等号が成り立つ場合は一時点で変化する場合、表1-Aの場合である。

このように生存率の増加が、漸進的に見えてもある水準より高ければ、死力では漸進的でない変化が起こるのである。これはテンポ変化による歪みというよりも、生存率の変化が、死力の不規則な動きを必要とするほどの大きさかどうかということである。テンポの変化によって歪んだというより、死力が生存率変化に対応して変化しているに過ぎない。

Bongaarts and Feeney (2002, 2003, 2005) では、生存数の伸び方などに比例的变化などの仮定が行われているが、より一般的にいうなら、以上のような不等式(23)が成り立つときである。死力の一時的低下が生ずるには、生存数はすぐに第2の静止人口になる必要がなく、かといって、生存率増加が緩やかであると死亡確率の一時的低下は起こらない。連続する年次で一時的に低い死亡確率をもたらすような生存数の上昇はある範囲内であるときに起こる。それは年齢別生存数が第2の静止人口の年齢別生存数と第2の静止人口死亡確率の生み出す年齢別静止人口の中間にあるときである。そのとき、第2の静止人口死亡確率よりも低い年齢別死亡確率が一時的に現れるのである。

もともと現状をみるには死亡確率  $q_{x,t}$  が基本であるのに、過去の影響を含む

$l_{x,t}$ によって見ようとするところに不自然さがあるのである。

### 3-3 合計死亡率におけるテンポ効果の原因： $q_x$ か $l_x$ か

あらためて、合計死亡率 TMR におけるテンポ効果の原因を考えておこう。これは合計出生率 TFR におけるテンポ効果にも当てはまるものであり、そのことを理解することにより、テンポ効果が $q_{x,t}$ に生じるという誤解も解けるはずである。

結論的に述べれば、テンポ効果は、 $q_{x,t}$ の変化（テンポ変化）に由来するが、直接には $l_{x,t}$ がもたらしたものである。 $q_{x,t}$ が変化することそのものではなく、それが $l_{x,t}$ の中に反映されることにより、 $d_{x,t}$ がゆがむのである。テンポ効果は過去の影響を含んだ指標、コーホート $d_{x,t}$ に含まれる $l_{x,t}$ の影響である。この $l_{x,t}$ と別にテンポ効果の原因があるのではない。

以下、シミュレーション表 1-B の場合を使って、(2)の TMR ( $Q_2$ ) におけるテンポ効果がどのように現れるか説明する。 $q_{x,t}$ が 2 回変化する表 1-A よりも 1 回だけ変化する表 1-B の方がより一般的であるので、これを使う。

その全過程を見ると、1981-83年における TMR の変化 0.72-0.96 は結局、1981 年における (3) $q_{x,t}$  の減少によって開始されたものである。実際、1981 年の $q_{x,t}$  の減少は、1981 年だけでなく、1982-83 年において (2) $d_{x,t}$  を (4) $d_{x,t}^b$  より小さくしている。仮設コーホートについて計算された $d_{x,t}^b$  にはテンポ効果は当然含まれない。1981-84 年において $q_{x,t}$  は一定であるにもかかわらず、TMR は 0.727 から 1.0 までこの間に変化している。いいかえると、1981 年の $q_{x,t}$  の変化が 1981-83 年の $d_{x,t}$  に影響している。とくに 1982-83 年において $d_{x,t}$  はその年の $q_{x,t}$  ではなく、1981 年の $q_{x,t}$  における変化によって 1982-83 年において $l_{x,t}$  が変化したことによって変化しているのである。

実は、 $q_{x,t}$  が変化した 1981 年の $d_{x,t}$  の減少も同じように解釈できる。1981 年において (4) $d_{x,t}^b$  に比べ $d_{x,t}$  が、なぜ全体として小さいのか？それは、死亡の危険にさらされる生存数 $l_{x,t}$  がその死力に比べて相対的に小さいからである。 $l_{x,t}$  が小さい

のは過去における相対的に高い死亡率によって減少しているからと解釈できる。たとえば、1981年の1歳の $d_{x,t}$ の0.27が $d_{x,t}^b$ の0.3より小さいのは、死亡率 $q_{x,t}$  0.3に対する生存数 $l_{x,t}$ 0.9が $l_1^b=1.0$ （表には示されていない）より小さいからである。さらに、死亡の危険にさらされる生存数 $l_{x,t}$ が0.9で、小さいのは1981年の死亡率0.0より高い1980年における0歳の死亡率0.1によってすでに減少したからである。

このように過去において経験した相対的に高い死亡率によって相対的に小さい生存数（死亡の危険にさらされる人口） $l_{x,t}$ が生じること—これがテンポ効果の直接的原因である。つまりTMRの減少とその年の $q_{x,t}$ の減少とは直接の関係がない。これが合計率式(17)が意味することである。

#### 4. おわりに

ある人口動態事象について年齢別発生件数を年齢別事象未経験人口によって除し、年齢別発生確率 $q_x$ 、 $\mu_x$ を求める。これを基にして、コーホート生命表関数および期間生命表関数を求めることができる。つまり、コーホート生命表と期間生命表において時点別年齢別発生確率は同一のものとしている。これを発生確率同一モデルと称する。テンポ効果は導かれたこの2種の生命表の間で発生確率以外の2つの関数（発生密度 $d_x$ 、未経験割合 $l_x$ ）が相互に異なること、つまりその事象についての静止人口でないこと（死亡の場合これがテンポ変化）から生じるものである。このテンポ効果は3つのコーホート生命表関数から導かれる平均経験回数、平均経験年齢、その他の量が相互に異なることとして表れる。このことを3つのコーホート生命表関数から導かれる3つの平均経験年齢、および平均回数についての乖離現象が、上記のテンポ変化の定義により導かれることを証明した。

また、時期的死亡水準を表すのは平均寿命 $e_0$ すなわちM3であり、Bongaarts and Feeneyの提案する、その他のコーホート生命表関数に基づく平均死亡年齢M2あるいはM1でないことを明らかにした。また、M1のある時点からの変化が

ひき起こす発生確率およびこれに基づく平均経験年齢  $M3$  の歪みは、単に不自然な突然の生存割合の変化を忠実に反映するもので、テンポ効果ではないことを示した。

### 付論 1 $M1(t)$ と $M2(t)$ の関係

出生について計算される平均は通常  $M2(t)$  であるから、これが他の平均  $M1(t)$  や  $M3(t)$  の代わりに使える場合があるとすると、大変便利である。Bongaarts and Feeney (2002, 2003) は死亡について  $M1(t)$  と  $M2(t)$  がテンポ変化によって等しくなる条件を求めたが、ここでは出生にも適用可能なようにより一般的に死亡以外の可避事象についてこの両者の間の関係を求める。

三増加の定理 (マッケンドリック・フォン・フェルスター McKendrick-von Foerster 方程式) をコーホート生命表関数に適用し、

$$-d(x,t) = -\mu(x,t)l(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}l(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}l(x,t) \dots\dots\dots (A1-0)$$

両辺に  $x$  を掛けてそれぞれ  $x$  について積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\omega xl(x,t) dx &= -\int_0^\omega \left\{ x \frac{\partial}{\partial t}l(x,t) + x \frac{\partial}{\partial x}l(x,t) \right\} dx \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\omega xl(x,t) dx - \int_0^\omega x \frac{\partial}{\partial x}l(x,t) dx \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\omega xl(x,t) dx - [xl(x,t)]_0^\omega + \int_0^\omega l(x,t) dx \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\omega xl(x,t) dx + \{1-l(\omega,t)\}M1(t) \end{aligned}$$

これは(9)式の右辺の分子である。式(18)を使い、 $M1(t)$  と  $M2(t)$  の関係は以下のように表される。

$$M2(t) = \frac{\int_0^{\omega} x d(x,t) dx}{\int_0^{\omega} d(x,t) dx} = \frac{-\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\omega} xl(x,t) dx + \{1-l(\omega,t)\} M1(t)}{\{1-l(\omega,t)\} \left\{1 - \frac{dM1(t)}{dt}\right\} - \frac{dl(\omega,t)}{dt} \{\omega - M1(t)\}},$$

.....(A1-1)

あるいは、

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\omega} xl(x,t) dx + \{1-l(\omega,t)\} M1(t) \\ & = M2(t) \left[ \{1-l(\omega,t)\} \left\{1 - \frac{dM1(t)}{dt}\right\} - \frac{dl(\omega,t)}{dt} \{\omega - M1(t)\} \right] \dots\dots\dots (A1-2) \end{aligned}$$

この式から、もし  $\frac{dM1(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{dl(\omega,t)}{dt} = 0$  かつ  $-\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\omega} xl(x,t) dx = 0$  ならば、以下が成り立つ。

$$M1(t) = M2(t)$$

このとき、 $\frac{dM1(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{dl(\omega,t)}{dt} = 0$  だけは不十分であることに注意。

ここで、 $\frac{\int_0^{\omega} xl(x,t) dx}{\int_0^{\omega} l(x,t) dx}$  は静止人口の平均年齢であり、その分子である  $\int_0^{\omega} xl(x,t) dx$

も通常の状態ではほとんど一定で、その微分は 0 に近いと考えられる。そこで、

$\frac{dM1(t)}{dt}$ ,  $\frac{dl(\omega,t)}{dt}$  と  $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\omega} xl(x,t) dx$  が一定ならば、(A1-2) の両辺を微分し、

また、2つの微分の積を無視すれば、次のようになる。

$$\{1-l(\omega,t)\} \left\{ \frac{dM1(t)}{dt} - \frac{dM2(t)}{dt} \right\} = \frac{dl(\omega,t)}{dt} \{M1(t) - M2(t)\} \dots\dots\dots (A1-3)$$

もし、ここでさらに、 $\frac{dl(\omega,t)}{dt} = 0$  と見なせるなら、 $\frac{dM1(t)}{dt} = \frac{dM2(t)}{dt}$  とすることができることが分かる。

以上のように、 $\frac{dM1(t)}{dt}$  と  $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\omega} xl(x,t) dx$  が一定、かつ  $\frac{dl(\omega,t)}{dt} = 0$  ならば、

$\frac{dM1(t)}{dt}$  の代わりに  $\frac{dM2(t)}{dt}$  で代用することができる。年齢別出生率の平均年

齢の微分  $\frac{dM_2(t)}{dt}$  を TFR の調整 (Ryder, 1964; Bongaarts and Feeney, 1998)

のために使うことは、以上のような条件のもとで正当化できるだろう。

## [付論 2] 合計出生率への適用

時点  $t$ 、年齢  $x$  歳の年齢別出生率  $d(x,t)$  はパリティ (出生順)  $i$  別出生率によって表すと、 $n$  を最大子ども数として、

$$d(x,t) = \sum_i^n d_i(x,t) \dots\dots\dots (A2-1)$$

合計出生率 TFR、total fertility rate は、これを  $t$  時点において年齢  $x$  について積分したものである。したがって、合計出生率は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{TFR}(t) &= \sum_{i=1}^n \int_0^{\omega} d_i(x,t) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \{1 - l_i(\omega, t)\} \left( 1 - \frac{dM_{1i}(t)}{dt} \right) - \frac{dl_i(\omega, t)}{dt} \{\omega - M_{1i}(t)\} \right] \dots\dots (A2-2) \end{aligned}$$

このように TFR はパリティ別年齢別出生未経験者割合  $l_i(x,t)$  に基づく平均出生年齢  $M_{1i}(t)$  の時間微分などによって表され、定量的に分解することができる。つまり、過去の合計出生率の分解には過去のコーホート出生率以外不要である。

ここでは調整合計出生率 tempo-adjusted total fertility rate (ATFR) は次のように表される。ここでのテンポ効果の除去 (調整) とは  $\frac{dM_{1i}(t)}{dt} = 0$  と置くという定義である。

$$\text{ATFR}(t) = \sum_{i=1}^n \left[ \{1 - l_i(\omega, t)\} - \{\omega - M_{1i}(t)\} \frac{dl_i(\omega, t)}{dt} \right] \dots\dots\dots (A2-3)$$

Bongaarts and Feeney (1998) の AFTR は (A2-3) 式の近似式と考えられる。

ただし、この分解式によって TFR からテンポ効果を除いたものは、 $t$  時点の真の出生力を表しているわけではない。それは  $t$  時点の出生力 force of fertility を基にした  $Q_3(t)$  によらなければならない。そのため、 $i$ -番目の出生確率  $\mu_i(x,t)$  を基にした出生力表により  $Q_3(t)$  ((16)式) を計算することができる。 $i$ -番目の年齢別出生率  $d_i^b(x,t)$  により年齢別出生率  $d^b(x,t)$  は (4)式、(5)式により

以下のように表される。 $d^p(x,t) = \sum_i^n d_i^p(x,t)$ 。

これにより  $Q3(t)$  は(16)式により以下のように表される。

$$Q3(t) = \int_0^{\omega} d^p(x,t) dx = \sum_i^n \int_0^{\omega} d_i^p(x,t) dx \dots\dots\dots (A2-4)$$

この年齢別出生率  $d^p(x,t)$  をつかえば、テンポ効果は起こらない。また、 $\mu_i(x,t)$  や  $d^p(x,t)$  ((11)式) によって平均出生年齢  $M3(t)$  を計算すれば、これは、平均寿命と同様によりよい。ただし、これは出生率と密接な結婚持続期間変化の影響を免れているわけではない。

## 注

- 1) 2004年11月ニューヨーク Population Council において Max Planck 人口研究所と共催で死亡におけるテンポ効果に関する Workshop が開催され、12の報告が行われた(堀内四郎氏より)。この発表論文が *Demographic Research* 誌に順次掲載されている。
- 2) 前者はいわゆる年齢別動態率の第1類 rate of the first kind, 後者は年齢別動態率第2類 rate of the second kind に対応する。前者は、離散時間の生命表の年齢別発生確率  $q_x$  probability of death、連続時間の生命表関数の死力  $\mu(x,t)$  force of mortality, 発生/未経験者比 occurrence/exposure rate, 発生強度, 生起率 intensity, ハザード hazard, hazard rate, 年齢別死亡率 age-specific death rate (Wilmoth, 2005) などと呼ばれ、後者は、年齢別発生割合 incidence rate, 離散時間の生命表関数の年齢別発生数, 死亡数, 発生割合  $d_x$  proportion of death, 連続時間の生命表の死亡密度  $d(x,t)$  density of death, 年齢別死亡率 age-specific death rate (Horiuchi, 2005) などと呼ばれる(山口ほか, 1995 参照)。
- 3) 厳密にはコーホートの  $q_x$  と期間の  $q_x$  とは当然異なる(廣嶋2005) ので、連続時間のある瞬間における  $\mu(x)$  が正しいが、簡単のため以下では  $q_x$  と書き、これらを同一のものとして扱う。
- 4) 筆者は前稿(廣嶋2005) の印刷前にその英語版(シミュレーションを除く、Hiroshima, 2005a) を、またその改訂版(Hiroshima, 2005b, 本稿のシミュレーションを含む) を本稿の印刷前に、*Demographic Research* 誌にそれぞれ投稿し、審査を受けた。その審査員の半分は Bongaarts and Feeney と同じ立場で、その内容をまったく理解しない。
- 5) 死亡によって次第に年齢上昇とともに丈夫な人が生き残るから、人口全体の平均的な死亡率よりも平均寿命は長くなりすぎているというのである。平均寿命が過大であるという Bongaarts and Feeney の想定と歪みの方向が一致している。Vaupel 自身も類似の問題ではないかと推測している(2002, 2005)。
- 6) この文章について注で生命表は人口の均質性の仮定があると問題にしている。ここに人口の非均質性とテンポ効果と関係していると認識していることが現れている。
- 7) ここでは出生を例にして説明する。死亡を例にして説明すると、通常の年齢別死亡率が年齢別死亡確率に近いので紛らわしいからである。また、ここでの出生率および出

- 生確率はパリティ（出生順位）別の出生率および出生確率を意味するものとする。
- 8) この証明は  $x$  歳から  $x+1$  歳について証明されているが、もし年齢幅を 0 歳から  $\omega$  歳（最高年齢）に変えると、その証明としてまったく同様に当てはまる。つまり、合計死亡率 TMR がテンポ変化により上下することの証明となる。
  - 9) この合計率定理は 2004 年 11 月の Workshop on tempo effects on mortality で Guillot が発表した論文 (Guillot, 2006) に別の証明法 (Guillot, 2003, p. 53) に基づいて書かれていると 2005 年 3 月堀内四郎氏から教えられた。ただし、Guillot (2003) は TMR にまったく言及していない。私はこれらとは独立に 2004 年 11 月数値計算により、日本の TMR が平均寿命の変化と関係があるとの予想に反してはるかに 1 より小さく、結局、平均死亡年齢  $M1(t)$  の微分と関係付けられることを見出した。
  - 10) ここでは、Bongaarts and Feeney (2002, 2003) の数値例は  $M1$  の変化を指していると解釈したが、 $M2$  とした場合（実はそのように書いているのだが）、そういうことは一般的には起こらない。たとえば、表 1-A として (2) の  $d_t$  が 1981 年から突然 (1, 3, 4, 2  $\rightarrow$  0, 3, 3, 4) に変化する場合、1982 年の生存数  $l_t$  などが負数になってしまう。

## 文献

- Bongaarts, John and Griffith Feeney, 1998, On the quantum and tempo of fertility, *Population and Development Review*, 24(2), 271-91.
- Bongaarts, John and Griffith Feeney, 2002, How long do we live? *Population and Development Review*, 28(1): 13-29.
- Bongaarts, John and Griffith Feeney, 2003, Estimating mean lifetime, *Proceedings of the National Academy of Sciences of The United States of America*, 100(23): 13127-13133.
- Bongaarts, John and Griffith Feeney, 2005, The quantum and tempo of life-cycle events. *Policy Research Division Working Papers 207*. Population Council, New York.
- Feeney, Griffith 2003, Mortality Tempo: A Guide for the Skeptic, Unpublished paper. <http://www.gfeeney.com/papers/2003-mortality-tempo-skeptic/>
- Feeney, Griffith, 2006, Increments to life and mortality tempo, *Demographic Research*, 14(2), 27-46, [25 Jan. 2006]
- Guillot, Michel, 2003, The cross-sectional average length of life (CAL): A cross-sectional mortality measure that reflects the experience of cohorts, *Population Studies*, 57(1): 41-54.
- Guillot, Michel, 2006, Tempo effects in mortality: An appraisal, *Demographic Research*, 14(1), 1-26, [24 Jan 2006]
- 廣嶋清志, 2000 「1970年代半ばからの合計出生率低下：コーホート出生率によるシミュレーション分析」『経済科学論集』26, 3月, 1-39.
- 廣嶋清志, 2005 「平均寿命は過大か？合計率定理の死亡への適用」『経済科学論集』31, 3月, 1-25.
- Hirosima, Kiyosi, 2005a, Is life expectancy overestimated? Total vital rate theorem applied to mortality, Unpublished paper, Submitted to a journal on February 24.
- Hirosima, Kiyosi, 2005b, Two tempo effects in mortality, Unpublished paper, Submitted to a journal on November 18.

- Horiuchi, Shiro, 2005, Tempo effect on age-specific death rates, *Demographic Research*, 13(8) [04. Nov. 2005]
- Kohler, Hans-Peter and Jose A. Ortega, 2004. Old Insights and New Approaches: Fertility Analysis and Tempo Adjustment in the Age-Parity Model. *Vienna Yearbook of Population Research*, 2, 57-89.
- Rodriguez, German, 2006, Demographic translation and tempo effects: An accelerated failure time perspective, *Demographic Research*, 14(6), 85-110 [17 Feb 2006]
- Ryder, Norman B., 1964, The process of demographic translation, *Demography*, 1 : 74-82.
- Vaupel, James W., 2002, Life expectancy at current rates vs. current conditions: A reflexion stimulated by Bongaarts and Feeney's "How long do we live?", *Demographic Research*, 7(8), 365-378.
- Vaupel, James W. 2005, Lifesaving, lifetimes and lifetables, *Demographic Research*, 13(24) [15. Dec. 2005]
- Wachter, Kenneth W. 2005, Tempo and its tribulations, *Demographic Research*, Vol 13(9) [11. Nov. 2005]
- Wilmoth, John R. 2005, On the relationship between period and cohort mortality, *Demographic Research*, 13(11) [17. Nov. 2005]
- 山口喜一・南条善治・重松峻夫・小林和正編、1995、『生命表研究』、古今書院。

(hirosima@soc.shimane-u.ac.jp)

訂正：『経済科学論集』第31号（2005年3月）（11ページ，廣嶋2005）

**表 3 B 最高死亡年齢が1歳上昇した場合  
のコーホート死亡率と年次別死亡率**

(4) 期間死亡割合  $D_x$

年齢	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
0	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3
2	4	4	4	3	3	3	3
3	2	2	2	3	2	2	2
4	0	0	0	0	0	1	1
t 3	10	10	10	10	9	10	10
m 3	2.2	2.2	2.2	2.3	2.17	2.4	2.4