

45 表現ヒッグス場をもつ拡張 $SU(5)$ 大統一理論
におけるゲージ結合定数の統一と陽子崩壊の解析
(Analysis of Gauge Coupling Unification and Proton Decay
in an Extended $SU(5)$ Grand Unification Theory
with 45-Dimensional Higgs Field)

令和 7 年 1 月

長野 佳輔

島根大学大学院自然科学研究科

目次

第 1 章	導入	1
第 2 章	Minimal $SU(5)$ GUT	3
第 3 章	45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT	16
3.1	ラグランジアン	16
3.2	Georgi-Jarlsokg 型の質量行列	19
3.3	スカラー粒子による陽子崩壊	25
第 4 章	45 表現ヒッグス場を持つ $SU(5)$ GUT でのゲージ結合定数の統一	28
第 5 章	45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT での陽子崩壊	33
5.1	45 表現ヒッグス場が第 2 世代のみと相互作用する場合の陽子崩壊	33
5.2	45 表現ヒッグスが全ての世代と相互作用する場合の陽子崩壊	39
第 6 章	結論	47
付録 A	Georgi-Jarlsokg 型の質量行列を仮定した場合のフレーバー混合行列	48
A.1	近似を行った Georgi-Jarlsokg 型の質量行列	48
A.2	それぞれの粒子に対するフレーバー混合行列	49
A.3	フレーバー混合行列の性質	53
付録 B	陽子崩壊の部分崩壊幅	55
B.1	バリオン数を破るラグランジアン	55
B.2	バリオン数を保存するラグランジアン	65
B.3	陽子崩壊の部分崩壊幅	66
付録 C	45 表現ヒッグスを含んだ $SU(5)$ GUT での湯川相互作用項のベータ関数	73
C.1	45 表現ヒッグスが与える湯川行列のベータ関数	73
参考文献		77

第 1 章

導入

素粒子物理学の標準模型 (SM) は, 現在の到達可能なエネルギースケールでの現象を非常にうまく記述している. しかし, フェルミオンの質量と混合の起源, 電荷の量子化, および 3 つのゲージ相互作用の統一といった, いくつかの基本的な問題には答えを与えていない. 大統一理論 (GUT) は, SM のゲージ群をより大きな単純群に埋め込むことによってこれらの問題に取り組む魅力的な枠組みを与える [1]-[6].

最も研究されている GUT モデルの 1 つは $SU(5)$ ゲージ群に基づく $SU(5)$ GUT であり, 強い相互作用と電弱相互作用の統一的な記述を可能にする [3]. $SU(5)$ GUT は, ゲージ結合定数の統一 (GCU) と陽子崩壊の概念を提唱し, 実験的検証の機会を与えている. その優雅さにもかかわらず, 最小限の $SU(5)$ モデル (Minimal $SU(5)$ GUT) はいくつかの困難に直面している. GUT スケールにおいてダウNTタイプクォークと荷電レプトンの同じ湯川結合を予測するため, ダウNTタイプクォークと荷電レプトンの質量が同じとなり実験と矛盾することがその一例である. さらに, 超対称性を含まないモデルでは, 3 つのゲージ結合が高エネルギースケールで正確に統一されない. また, LEP 加速器での精密実験は, 3 つのゲージ結合定数が高エネルギーで GCU を実現できないことを明らかにしている. この問題の解決策の一つに, 24 表現の GUT の対称性を自発的に破る場を構成する成分の間に質量階層を仮定することが挙げられ, GCU を実現することできる. しかし, 予測される陽子寿命は Super-Kamiokande による陽子崩壊の探索実験における現在の制限を下回る [7].

これらの問題を解決するため, Minimal $SU(5)$ GUT の拡張が提案されている. その有望な方法の一つに, 特定の種類のヒッグス場の導入する方法がある. 45 次元表現として変換するヒッグス場を導入することで, 45 表現ヒッグスはクォークとレプトンのための別個の湯川行列を生成でき, 観測されたフェルミオンの質量階層および混合パターンを取り入れる可能性がある [8]-[13]. しかし, 超対称性を含まない $SU(5)$ GUT (Non-SUSY $SU(5)$ GUT) においては, 3 つのゲージ結合定数が GCU を実現することができない. GCU 問題に解決するため, SUSY $SU(5)$ GUT が提案されているが [14, 15], LHC 実験で SUSY 粒子が検出されていないことから SUSY の存在に疑問が投げかけられている.

[16] では, 45 表現ヒッグス場を媒介した GCU と陽子崩壊について, 第 2 世代に結合する 45 表現ヒッグスを用いることで, スtrenジクォークとミュー粒子の質量比のような特定の質量比を Georgi-Jarlskog 型質量行列によって説明することに焦点を当てて研究している [13]. さらに, 45 表現ヒッグス場の成分に対して階層的な質量スペクトルを考慮すれば, GCU を実現することもできる.

本論文では, 45 表現ヒッグス場を取り入れた Non-SUSY $SU(5)$ GUT を考える. 最初に, 45 表現ヒッグス場が第 2 世代のフェルミオンにのみ結合すると仮定する. また, 質量行列が Georgi-Jarlskog 型質量行列をとると仮定することでストrenジクォークとミュー粒子の質量比が再現できる [13]. また, GCU を実現させ, 陽子崩壊に対する現在の実験的制限を満たすために, 45 表現ヒッグス場の成分に対して階

層的な質量スペクトルを仮定する [17]. GCU を実現できる階層的な質量スペクトルはくりこみ群方程式 (RGE) を解くことで見つけ出す.

45 表現ヒッグス場の特定の成分が GUT スケールよりもはるかに軽い場合, 様々な実験的な特徴を残す. [18] では, 45 表現ヒッグスの軽い成分がクォークまたはレプトンにおけるフレーバー破れを伴う崩壊に与える影響を調査している. 本論文では, 45 表現ヒッグス場のカラー成分を媒介した陽子崩壊に焦点を当てる. スtrenジクォークとミュー粒子の質量比を説明するために 45 表現ヒッグス場が第 2 世代のフェルミオンにのみ結合するという仮定の下で, 様々な陽子崩壊モードを求めていく. これによって, GCU が実現されると同時に現在の陽子崩壊に関する実験的制限が満たされるパラメータ領域を特定する.

次に, 45 表現ヒッグス場が全 3 世代のフェルミオンと結合する Non-SUSY $SU(5)$ GUT も考慮し, 解析を拡張する. この場合, $SU(5)$ GUT の 45 表現ヒッグス場との湯川結合は, 階層および混合角を含む観測された質量行列の全構造が低エネルギーで再現できるように定められる. この場合でも, GCU を実現させ, 陽子崩壊に対する現在の実験的制限を満たすために, 45 表現ヒッグス場の成分に対して階層的な質量スペクトルを導入する.

陽子崩壊に対する現在の実験的制限を満たすために, 45 表現ヒッグスの成分が GUT スケールよりもはるかに軽いについて考える. 45 表現ヒッグスのうち 3 つの成分 $S_1(\bar{3}, 1)$, $S_3(3, 3)$, $S_8(8, 2)$ が軽い場合に焦点を当てる. 特に, $S_1(\bar{3}, 1)$ によって媒介される陽子崩壊を研究し, Super-Kamiokande 実験によって設定された最新の実験的制限から, $S_1(\bar{3}, 1)$ の下限となる質量を導出する. また, $S_1(\bar{3}, 1)$ との相互作用を表す湯川結合, 45 表現ヒッグス成分の質量階層, およびゲージ結合定数の RGE を解析することで, $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ モードが $S_1(\bar{3}, 1)$ の質量に対して最も厳しい制限を課すことを明らかにする. さらに, 異なる陽子崩壊モードから導出される $S_1(\bar{3}, 1)$ の質量の下限に関する相関も考えていく.

本論文の構成は以下の通りである. 第 2 章では, Minimal $SU(5)$ GUT の概説を行う. 第 3 章では, 45 表現ヒッグス場を取り入れた Non-SUSY $SU(5)$ GUT の概説を行う. 第 4 章では, 論文 [16] に基づき, 45 表現ヒッグス場を持つ $SU(5)$ GUT でのゲージ結合定数の統一について解析する. 第 5 章では, 論文 [16],[19] に基づき, 45 表現ヒッグス場を持つ $SU(5)$ GUT での陽子崩壊について 45 表現ヒッグス場が第 2 世代のみと相互作用する場合と全ての世代で相互作用する場合について解析する. 最後に, 第 6 章で本論文の結論をまとめる.

第 2 章

Minimal $SU(5)$ GUT

2.1 ラグランジアン

標準模型のラグランジアンについて

最初に, $SU(5)$ 大統一理論 (GUT) のラグランジアンを理解しやすくするために, 標準模型のラグランジアンと共変微分の定義を書く. ここで, 添字 $i, j = 1 \sim 3$ を世代数とし, 添字 $\alpha, \beta = 1, 2$ を $SU(2)$ 2重項の添字とする. また, 添字 J については, 「フェルミオンの種類」と定義する. このとき標準模型のラグランジアンは以下のように表される.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ & + \bar{\psi}_J i\gamma^\mu D_\mu \psi^J \\ & - \left\{ (y_u)^{ij} \varepsilon^{\alpha\beta} \left[\overline{Q_{Li}} \right]_\alpha (\phi^\dagger)_\beta u_{Rj} + (y_d)^{ij} \left[\overline{Q_{Li}} \right]_\alpha \phi^\alpha d_{Rj} + (y_e)^{ij} \left[\overline{E_{Li}} \right]_\alpha \phi^\alpha e_{Rj} + \text{h.c.} \right\} \\ & + |D_\mu \phi|^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_s G_\mu^a (T_C)_a + ig W_\mu^a (T_L)_a + ig' B_\mu Y_\psi \quad (2.2)$$

ここで, T_C は $SU(3)$ の生成子, T_L は $SU(2)$ の生成子としている. フェルミオンが対応する群の表現で自明な表現 1 を持つ場合以外の時に作用する. ただし, 本論文ではゲージ固定項とゴースト項については考慮しない. また, 標準模型の粒子については表 2.1 で与える. ただし, Minimal $SU(5)$ GUT 以降の議論では, クォーク 2 重項 Q_L は q_L , レプトン 2 重項 E_L は ℓ_L と表す.

$SU(5)$ GUT ラグランジアン

次に, $SU(5)$ 大統一理論 (GUT) にどのように拡張されるか見ていく. 標準模型のゲージ群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を内包できる群 $SU(5)$ に拡張した Minimal $SU(5)$ GUT での議論を行なっていく. この模型において, 標準模型のラグランジアンがどのように拡張されるかについて確認して, その後自発的対称性の破れからどのように標準模型のラグランジアンを得るかについても見ていく.

最初に, Minimal $SU(5)$ GUT のラグランジアンを見ながら, 標準模型の粒子がどのようにまとめられるか見ていく. $SU(5)$ は群論の議論から

$$SU(5) \ni SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (2.3)$$

と標準模型のゲージ群を含むことができる. この議論から明らかなように, ラグランジアンにおいてはゲージ群の結合定数は一つにまとめられる.

表 2.1 標準模型に含まれる粒子とその表現

Matter	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{6}$
u_R	3	1	$\frac{2}{3}$
d_R	3	1	$-\frac{1}{3}$
$E_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \nu_{eL} \end{pmatrix}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
e_R	1	1	-1
$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$	1	2	$\frac{1}{2}$

実際に, Minimal $SU(5)$ GUT のラグランジアンについて確認する. 先程の議論からゲージ群の結合定数は一つにまとめられる. そのため, ゲージ場の運動項や共変微分は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(V_{\mu\nu}^i)^2 \\
& + i(\overline{\Psi_{10Li}})_{AB} \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{10Li})^{AB} + i(\overline{\Psi_{\bar{5}Li}})^A \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{\bar{5}Li})_A \\
& - \left\{ \frac{1}{8}(Y_5^U)_{ij} \epsilon_{ABCDE} [\overline{(\Psi_{10}^c)_{Ri}}]^{AB} (\Phi_5)^C (\Psi_{10j})^{DE} + (Y_5^D)_{ij} [\overline{(\Psi_{10}^c)_{Ri}}]^{AB} (\Phi_5^\dagger)_A (\Psi_{\bar{5}Lj})_B + \text{h.c.} \right\} \\
& + \frac{1}{2}(D_\mu \Sigma_i)^2 - \left\{ -\frac{\mu^2}{2} \text{tr}(\Sigma^2) + \frac{a}{4} [\text{tr}(\Sigma^2)]^2 + \frac{b}{2} \text{tr}(\Sigma^4) + \frac{c}{2} \text{tr}(\Sigma^3) \right\} \\
& + |D_\mu (\Phi_5)^A|^2 - \left\{ -\frac{(\mu_5)^2}{2} \Phi_5^\dagger \Phi_5 + \frac{\lambda}{4} (\Phi_5^\dagger \Phi_5)^2 \right\} \\
& - \left\{ \alpha \text{tr}(\Sigma^2) \Phi_5^\dagger \Phi_5 + \beta \Phi_5^\dagger \Sigma^2 \Phi_5 + \delta \Phi_5^\dagger \Sigma \Phi_5 \right\}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ただし, フェルミオンは 4 成分スピノルとする. それぞれの標準模型の粒子がどのように Minimal $SU(5)$ GUT に埋め込まれるかについてやそれぞれの場合や場が満たす共変微分についての説明は次節以降に行う.

また, [18] では, 最初に示した Minimal $SU(5)$ GUT の全ての場をテンソルで表記すると以下のラグランジアンで考えることができる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(V^{\mu\nu})^B{}_A (V_{\mu\nu})^A{}_B \\
& + i(\overline{\Psi_{10Li}})_{AB} \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{10Li})^{AB} + i(\overline{\Psi_{\bar{5}Li}})^A \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{\bar{5}Li})_A \\
& - \left\{ \frac{1}{8}(Y_5^U)_{ij} \epsilon_{ABCDE} [\overline{(\Psi_{10}^c)_{Ri}}]^{AB} (\Phi_5)^C (\Psi_{10j})^{DE} + (Y_5^D)_{ij} [\overline{(\Psi_{10}^c)_{Ri}}]^{AB} (\Phi_5^\dagger)_A (\Psi_{\bar{5}Lj})_B + \text{h.c.} \right\} \\
& + \frac{1}{2} [D^\mu \Sigma^B{}_A] [D_\mu \Sigma^A{}_B] - \left\{ -\frac{\mu^2}{2} \text{tr}(\Sigma^2) + \frac{a}{4} [\text{tr}(\Sigma^2)]^2 + \frac{b}{2} \text{tr}(\Sigma^4) + \frac{c}{2} \text{tr}(\Sigma^3) \right\} \\
& + [D^\mu (\Phi_5^\dagger)_A] [D_\mu (\Phi_5)^A] - \left\{ -\frac{(\mu_5)^2}{2} \Phi_5^\dagger \Phi_5 + \frac{\lambda}{4} (\Phi_5^\dagger \Phi_5)^2 \right\} \\
& - \left\{ \alpha \text{tr}(\Sigma^2) \Phi_5^\dagger \Phi_5 + \beta \Phi_5^\dagger \Sigma^2 \Phi_5 + \delta \Phi_5^\dagger \Sigma \Phi_5 \right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

先ほどの表記との違いはゲージ場の運動項と 24 表現ヒッグス場の運動項がテンソル表記で表されている点である。また、全てのラグランジアンに対して Z_2 対称性を課すと係数に制限をかけることができる。

$$c = \delta = 0 \quad (2.6)$$

今後、 $SU(5)$ GUT のラグランジアンを考える際には、これらを係数に持つ項が消えていて問題がないため、ラグランジアンに Z_2 対称性が課されていると考える。

粒子に課される関係式

最初に、 $SU(5)$ GUT に含まれる粒子が満たす関係式について記しておく。10 表現については反対称性を満たす。24 表現のヒッグス粒子 Σ と $SU(5)$ のゲージ場 A_μ については、エルミート性とトレースレスであることを満たす。

$$(\Psi_{10Li})_{AB} = -(\Psi_{10Li})_{BA} \quad (2.7)$$

$$\Sigma^\dagger = \Sigma \quad (2.8)$$

$$\text{Tr } \Sigma = 0 \quad (2.9)$$

$$A_\mu^\dagger = A_\mu \quad (2.10)$$

$$\text{Tr } A_\mu = 0 \quad (2.11)$$

これらの関係は、群論の議論に依存している。また、標準模型の粒子埋め込む際の制限やさまざまな式を展開する際に用いることが多い。

フェルミオン

次に、Minimal $SU(5)$ GUT に含まれるフェルミオンについて見ていく。 $SU(5)$ の基本表現である 5 表現は $SU(3)$, $SU(2)$ の表現によって

$$5 = (3, 1) \oplus (1, 2) \quad (2.12)$$

と分解することができる。5 表現のテンソル積によって 10 表現は以下のように与えられる。

$$10 = (\bar{3}, 1) \oplus (3, 2) \oplus (1, 1) \quad (2.13)$$

ただし、 $(3, 2)$ 表現は反対称である。これにより、標準模型の粒子は $\bar{5}$ 表現に対して右巻きダウNTタイプクォークの反粒子 $(d_R)^c$ と左巻き荷電レプトン E_L が、10 表現に対して右巻きアップタイプクォークの反粒子 $(u_R)^c$ と左巻きクォーク Q_L 、右巻き電子の反粒子 $(e_R)^c$ 埋め込まれる。

$$(\Psi_{\bar{5}Li})_A = \left([(d_R)^c]_{i\hat{a}} \quad \epsilon_{\alpha\beta} [\ell_L]_i^\beta \right) = \left([(d^c)_L]_{i\hat{a}} \quad \epsilon_{\alpha\beta} [\ell_L]_i^\beta \right) \quad (2.14)$$

$$(\Psi_{10Li})^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [(u_R)^c]_{i\hat{c}} & -[q_L]_i^{\hat{a}\beta} \\ [q_L]_i^{\alpha\hat{b}} & -\epsilon^{\alpha\beta} [(e_R)^c]_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [(u^c)_L]_{i\hat{c}} & -[q_L]_i^{\hat{a}\beta} \\ [q_L]_i^{\alpha\hat{b}} & -\epsilon^{\alpha\beta} [(e^c)_L]_i \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

ただし、基本表現が上付き添字で表し、基本表現の複素共役な表現を下付き添字で表すため、 $\bar{5}$ 表現が下付き添字、10 表現が上付き添字となる。ここで、それぞれの表現に対しての 2 つ目の等号では、

$$(\psi_R)^c = (\psi^c)_L \quad (2.16)$$

であることから書き換え行った。

ボソン

一つ目に, ゲージボソンについて見ていく. $SU(N)$ の表現を持つ場に対する共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a t_r^a \quad (2.17)$$

で与えられる. ここで, ゲージ場と群の生成子の着目する. このとき,

$$A_\mu^a t_r^a = \sum_a A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a A_\mu^a \frac{\lambda_a}{\sqrt{2}} \quad (2.18)$$

となる. A_μ を新たに

$$A_\mu \equiv \sum_{i=1}^{24} A_\mu^i \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \quad (2.19)$$

と定義すると行列の成分を用いて

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu)^A{}_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (G_\mu)^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} - \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}} \delta^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} & (\Xi_\mu^*)^{\hat{a}}{}_\beta \\ (\Xi_\mu)^{\alpha}{}_{\hat{b}} & (W_\mu)^\alpha{}_\beta + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}} \delta^\alpha{}_\beta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

と定義することができる. このとき, それぞれのゲージボソンは

$$(G_\mu)^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = \left[\sum_{i=1}^8 A_\mu^i \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right]_{\hat{a}\hat{b}} \quad (2.21)$$

$$(W_\mu)^\alpha{}_\beta = \left[\sum_{i=21}^{23} A_\mu^i \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right]_{AB} \quad (A, B = 4, 5) \quad (2.22)$$

$$(X_\mu)^{\hat{a}}{}_\beta = \left(X_\mu^{(-4/3)\hat{a}}, X_\mu^{(-1/3)\hat{a}} \right) = (\bar{X}_\mu, \bar{Y}_\mu) \quad (2.23)$$

$$(\Xi_\mu^*)^{\hat{a}}{}_\beta = \begin{pmatrix} (\Xi_\mu)^1{}_1 & (\Xi_\mu)^1{}_2 \\ (\Xi_\mu)^2{}_1 & (\Xi_\mu)^2{}_2 \\ (\Xi_\mu)^3{}_1 & (\Xi_\mu)^3{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{X}_\mu)^1 & (\bar{Y}_\mu)^1 \\ (\bar{X}_\mu)^2 & (\bar{Y}_\mu)^2 \\ (\bar{X}_\mu)^3 & (\bar{Y}_\mu)^3 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$(X_\mu)^\alpha{}_{\hat{b}} = \begin{pmatrix} \left(X_\mu^{(4/3)} \right)_{\hat{b}} \\ \left(X_\mu^{(1/3)} \right)_{\hat{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_\mu)_{\hat{b}} \\ (Y_\mu)_{\hat{b}} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$(\Xi_\mu)^\alpha{}_{\hat{b}} = \begin{pmatrix} (\Xi_\mu)^1{}_1 & (\Xi_\mu)^2{}_2 & (\Xi_\mu)^1{}_3 \\ (\Xi_\mu)^2{}_1 & (\Xi_\mu)^2{}_2 & (\Xi_\mu)^2{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_\mu)_1 & (X_\mu)_2 & (X_\mu)_3 \\ (Y_\mu)_1 & (Y_\mu)_2 & (Y_\mu)_3 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$X_\mu \equiv \frac{X_1 + iX_2}{\sqrt{2}} \quad (2.27)$$

と与えられる. ここで, $(C)^a{}_b$ は行列 C の a 行 b 列成分を表すとする.

ここで, ゲージボソンの添字について言及しておく. 本論文では, 基本表現が上付き添字で表し, 基本表現の複素共役な表現を下付き添字で表す. このためゲージ場の添字を固定した場合, 縮約が取れない場合がある. この困難を解決するためにゲージ場を

$$(A_\mu)_{AB} \equiv (A_\mu)_B^A \quad (2.28)$$

とした. ここで, $(A_\mu)_B^A$ を

$$(A_\mu)_B^A \equiv (A_\mu)_{AB} \longrightarrow (A_\mu)^A{}_B \quad (2.29)$$

と定義する. このゲージ場がスカラーボソン $(\Phi_5)^B$ と相互作用している場合について考えると

$$(A_\mu)_B^A (\Phi_5)^B = (A_\mu)_{AB} (\Phi_5)^B \longrightarrow (A_\mu)_B^A (\Phi_5)^B \quad (2.30)$$

と表せる. ここで, ゲージボソンとスカラーボソンは交換するので $(\Phi_5)^B$ が左右両方にある場合を書くと

$$(A_\mu)_B^A (\Phi_5)^B = (A_\mu)^A_B (\Phi_5)^B = (\Phi_5)^B (A_\mu)_B^A \quad (2.31)$$

となる. この場合, スカラーボソン $(\Phi_5)^B$ はゲージボソンの左右どちらにあっても等しいので

$$(A_\mu)_B^A = (A_\mu)_B^A \quad (2.32)$$

が成立する.

2 つ目に, ヒッグスボソンについて見ていく. Minimal $SU(5)$ GUT では 5 表現ヒッグスボソンと 24 表現ヒッグスボソンが含まれている. 5 表現ヒッグスボソン Φ_5 は

$$(\Phi_5)^A = \begin{pmatrix} [S_1^{(5)*}]^{\hat{a}} \\ [H^{(5)}]^\alpha \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

と与えられ, $S_1^{(5)*}$ はカラーヒッグスと呼ばれ $SU(3)$ 対称性を持つ. また, $H^{(5)}$ は標準模型のヒッグス 2 重項と同じ構造をしているため, 真空期待値を持ったとき

$$\langle (\Phi_5)^A \rangle = \frac{v_5}{\sqrt{2}} \delta^A_5 \iff \begin{cases} \langle [S_1^{(5)*}]^{\hat{a}} \rangle = 0 \\ \langle [H^{(5)}]^\alpha \rangle = \frac{v_5}{\sqrt{2}} \delta^\alpha_2 \end{cases} \quad (2.34)$$

となる.

次に, 24 表現ヒッグスボソン Σ について見ていく. 24 表現ヒッグスボソン Σ は随伴表現であるため, 共変微分は

$$(D_\mu \Sigma)_a = \partial_\mu \Sigma_a - ig A_\mu^b (t_G^b)_{ac} \Sigma_c \quad (2.35)$$

$$D_\mu \Sigma_a = \partial_\mu \Sigma_a + gf^{abc} A_\mu^b \Sigma_c \quad (2.36)$$

となる. ここで, 両辺に生成子 t_r^a を作用して, 式変形すると

$$\begin{aligned} D_\mu \Sigma_a t_r^a &= \partial_\mu \Sigma_a t_r^a + gf^{abc} A_\mu^b \Sigma_c t_r^a \\ &= \partial_\mu \Sigma_a t_r^a - ig [t_r^b, t_r^c] A_\mu^b \Sigma_c \\ &= \partial_\mu \Sigma_a t_r^a - ig [A_\mu^b t_r^b, \Sigma_c t_r^c] \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる. ここで, ゲージ場 A_μ^a と同じように

$$\Sigma_a t_r^a = \sum_a \Sigma_a \frac{\lambda_a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a \Sigma_a \frac{\lambda_a}{\sqrt{2}} \quad (2.38)$$

から, 生成子を用いて Σ を定義する.

$$\Sigma \equiv \sum_{i=1}^{24} \Sigma_i \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \quad (2.39)$$

これによって, 24 表現ヒッグスボソン Σ はゲージ場 A_μ と同じように行列で与えることができる.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^A{}_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\Sigma_8)^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} + \left(v_{24} - \frac{2}{\sqrt{30}}\Sigma_1\right)\delta^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} & (\Sigma_G^*)^{\hat{a}}{}_{\beta} \\ (\Sigma_G)^{\alpha}{}_{\hat{b}} & (\Sigma_3)^{\alpha}{}_{\beta} - \left(\frac{3}{2}v_{24} - \frac{3}{\sqrt{30}}\Sigma_1\right)\delta^{\alpha}{}_{\beta} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

また, 24 表現ヒッグスボソン Σ が真空期待値 $\langle \Sigma \rangle$ を持つ場合には

$$\langle \Sigma^A{}_B \rangle = v_{24} \text{diag}(1, 1, 1, -3/2, -3/2) \iff \begin{cases} \langle \Sigma^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} \rangle = v_{24}\delta^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} \\ \langle \Sigma^{\alpha}{}_{\beta} \rangle = -\frac{3}{2}v_{24}\delta^{\alpha}{}_{\beta} \end{cases} \quad (2.41)$$

となる. また, 式 (2.37) に A_μ と Σ の定義を適用すると, 24 表現ヒッグスボソン Σ の共変微分

$$\begin{aligned} D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma \right) &= \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma \right) - ig_5 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}A_\mu, \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma \right] \\ \iff D_\mu \Sigma &= \partial_\mu \Sigma - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} [A_\mu, \Sigma] \end{aligned} \quad (2.42)$$

が得られる.

共変微分とゲージ場の場の強度テンソル

最後に, Minimal $SU(5)$ GUT に含まれるそれぞれの粒子に対して共変微分とゲージ場の場の強度テンソルを与える.

$$D_\mu (\Psi_{\bar{5}Li})_A = \partial_\mu (\Psi_{\bar{5}Li})_A + i \frac{g_5}{\sqrt{2}} (A_\mu)_A{}^B (\Psi_{\bar{5}Li})_B \quad (2.43)$$

$$D_\mu (\Psi_{10Li})^{AB} = \partial_\mu (\Psi_{10Li})^{AB} - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} (A_\mu)^A{}_C (\Psi_{10Li})^{CB} - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} (A_\mu)^B{}_D (\Psi_{10Li})^{AD} \quad (2.44)$$

$$D_\mu (\Phi_5)^A = \partial_\mu (\Phi_5)^A - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} (A_\mu)^A{}_B (\Phi_5)^B \quad (2.45)$$

$$D_\mu \Sigma^A{}_B = \partial_\mu \Sigma^A{}_B - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} \left[(A_\mu)^A{}_C, \Sigma^C{}_B \right] \quad (2.46)$$

$$V_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_5 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.47)$$

これらを基にして, Minimal $SU(5)$ GUT におけるラグランジアン of フェルミオンの運動項と湯川相互作用項について議論していく.

2.2 陽子崩壊

この節では、運動項で求めた X, Y ボソンと $\bar{5}$ 表現, 10 表現の相互作用から陽子崩壊について議論する. 式 (2.4) より, X, Y ボソンが寄与する部分だけを書くと

$$\begin{aligned}
& \left[i \left(\overline{\Psi_{10Li}} \right)_{AB} \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{10Li})^{AB} + i \left(\overline{\Psi_{\bar{5}Li}} \right)^A \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{\bar{5}Li})_A \right] \Big|_{X_\mu, Y_\mu, \bar{X}_\mu, \bar{Y}_\mu} \\
&= \frac{g_5}{\sqrt{2}} (X_\mu)_{\hat{a}} \left[\left[\overline{(e^c)_R} \right]_i \gamma^\mu [d_R]^{j\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^i \gamma^\mu [d_L]_{\hat{a}}^j + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{u_L}]_{\hat{b}}^i \gamma^\mu [(u^c)_L]_{j\hat{c}} \right] \\
&+ \frac{g_5}{\sqrt{2}} (Y_\mu)_{\hat{a}} \left[- \left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_i \gamma^\mu [d_R]^{j\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^i \gamma^\mu [u_L]_{\hat{a}}^j + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{d_L}]_{\hat{b}}^i \gamma^\mu [(u^c)_L]_{j\hat{c}} \right] \\
&+ \frac{g_5}{\sqrt{2}} (\bar{X}_\mu)^{\hat{a}} \left[\left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma^\mu [(e^c)_R]^j + \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{a}}^i \gamma^\mu [(e_R)^c]_j + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{(u^c)_L}]^{i\hat{c}} \gamma^\mu [u_L]_{\hat{b}}^j \right] \\
&+ \frac{g_5}{\sqrt{2}} (\bar{Y}_\mu)^{\hat{a}} \left[- \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma^\mu [(\nu_e^c)_R]^j - [\overline{u_L}]_{\hat{a}}^i \gamma^\mu [(e_R)^c]_j + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{(u^c)_L}]^{i\hat{c}} \gamma^\mu [d_L]_{\hat{b}}^j \right] \quad (2.48)
\end{aligned}$$

となる. ここで, $X, Y, \bar{X}, \bar{Y}$ の添字 $\hat{a}$ を内側にして, 添字 μ を外側にして考える. また, 粒子の部分

$$(J_X)^\mu \equiv \left[\overline{(e^c)_R} \right]_i \gamma^\mu [d_R]^{j\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^i \gamma^\mu [d_L]_{\hat{a}}^j + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{u_L}]_{\hat{b}}^i \gamma^\mu [(u^c)_L]_{j\hat{c}} \quad (2.49)$$

$$(J_Y)^\mu \equiv - \left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_i \gamma^\mu [d_R]^{j\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^i \gamma^\mu [u_L]_{\hat{a}}^j + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{d_L}]_{\hat{b}}^i \gamma^\mu [(u^c)_L]_{j\hat{c}} \quad (2.50)$$

$$(J_{\bar{X}})^\mu \equiv \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma^\mu [(e^c)_R]^j + \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{a}}^i \gamma^\mu [(e_R)^c]_j + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{(u^c)_L}]^{i\hat{c}} \gamma^\mu [u_L]_{\hat{b}}^j \quad (2.51)$$

$$(J_{\bar{Y}})^\mu \equiv - \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma^\mu [(\nu_e^c)_R]^j - [\overline{u_L}]_{\hat{a}}^i \gamma^\mu [(e_R)^c]_j + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{(u^c)_L}]^{i\hat{c}} \gamma^\mu [d_L]_{\hat{b}}^j \quad (2.52)$$

と定義すると

$$\begin{aligned}
& \left[i \left(\overline{\Psi_{10Li}} \right)_{AB} \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{10Li})^{AB} + i \left(\overline{\Psi_{\bar{5}Li}} \right)^A \gamma^\mu D_\mu (\Psi_{\bar{5}Li})_A \right] \Big|_{X_\mu, Y_\mu, \bar{X}_\mu, \bar{Y}_\mu} \\
&= \frac{g_5}{\sqrt{2}} (X^{\hat{a}})_\mu (J_X)^\mu + \frac{g_5}{\sqrt{2}} (Y^{\hat{a}})_\mu (J_Y)^\mu + \frac{g_5}{\sqrt{2}} (\bar{X}^{\hat{a}})_\mu (J_{\bar{X}})^\mu + \frac{g_5}{\sqrt{2}} (\bar{Y}^{\hat{a}})_\mu (J_{\bar{Y}})^\mu \quad (2.53)
\end{aligned}$$

となる. ここで, フェルミ理論の有効ラグランジアンより

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = - \frac{g_2^2}{2m_W^2} J_\rho^\dagger J^\rho \quad (2.54)$$

によって標準模型の $W^\pm$ ボソンが関わる反応過程の部分崩壊幅を求めることができるので, Minimal $SU(5)$ GUT でも同様に行っていく. 有効ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ を考えると

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = - \frac{g_5^2}{2m_X^2} (J_X)_\rho^\dagger (J_X)^\rho - \frac{g_5^2}{2m_Y^2} (J_Y)_\rho^\dagger (J_Y)^\rho \quad (2.55)$$

となる. ここで,

$$J_X^\mu \xleftrightarrow{\text{h.c.}} J_{\bar{X}}^\mu \quad (2.56)$$

$$J_Y^\mu \xleftrightarrow{\text{h.c.}} J_{\bar{Y}}^\mu \quad (2.57)$$

という関係があるので,

$$(J_X)_\rho^\dagger = (J_{\bar{X}})_\rho \quad (2.58)$$

$$(J_Y)_\rho^\dagger = (J_{\bar{Y}})_\rho \quad (2.59)$$

となる. よって, 有効ラグランジアン (2.55) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= -\frac{g_5^2}{2m_X^2} (J_X)_\rho^\dagger (J_X)_\rho - \frac{g_5^2}{2m_Y^2} (J_Y)_\rho^\dagger (J_Y)_\rho \\ &= -\frac{g_5^2}{2m_X^2} (J_{\bar{X}})_\rho (J_X)_\rho - \frac{g_5^2}{2m_Y^2} (J_{\bar{Y}})_\rho (J_Y)_\rho \end{aligned} \quad (2.60)$$

また, 次に有効ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ における X ボソンに関わる項について計算していくと

$$\begin{aligned} (J_{\bar{X}})_\rho (J_X)_\rho &= \left[\overline{d_R}_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(e^c)_R]^j + \overline{d_L}_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{\hat{b}}^j \right] \\ &\quad \times \left[\left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{u_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \\ &= \overline{d_R}_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(e^c)_R]^j \left[\left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{u_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \\ &\quad + \overline{d_L}_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \left[\left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{u_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \\ &\quad + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{\hat{b}}^j \left[\left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{u_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

ここで, バリオン数を破る過程 (Baryon number Viaolation) にのみ着目すると

$$\begin{aligned} (J_{\bar{X}})_\rho (J_X)_\rho \Big|_{\text{BV}} &= \overline{d_R}_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(e^c)_R]^j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{u_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} + \overline{d_L}_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{u_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \\ &\quad + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{\hat{b}}^j \left[\left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

となる. 次に, 有効ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ における Y ボソンに関わる項について計算していく.

$$\begin{aligned} (J_{\bar{Y}})_\rho (J_Y)_\rho &= \left[-\overline{d_R}_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(\nu_e^c)_R]^j - \overline{u_L}_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_{\hat{b}}^j \right] \\ &\quad \times \left[-\left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \\ &= -\overline{d_R}_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(\nu_e^c)_R]^j \left[-\left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \\ &\quad - \overline{u_L}_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \left[-\left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \\ &\quad + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_{\hat{b}}^j \left[-\left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} + \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

ここで, 同様にバリオン数を破る過程 (Baryon number Viaolation) にのみ着目すると

$$\begin{aligned} (J_{\bar{Y}})_\rho (J_Y)_\rho \Big|_{\text{BV}} &= -\overline{d_R}_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(\nu_e^c)_R]^j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} - \overline{u_L}_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \\ &\quad + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_{\hat{b}}^j \left[-\left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{\hat{l}}^{\hat{a}} \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる. 式 (2.63) と式 (2.64) を用いて, $m_X = m_Y$ であるとするとき式 (2.60) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}|_{\text{BV}} = & -\frac{g_5^2}{2m_X^2} \left\{ \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(e^c)_R]^j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{u_L}]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} + \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{u_L}]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right. \\ & + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{l\hat{a}} \right] \\ & - \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(\nu_e^c)_R]^j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} - [\overline{u_L}]_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \\ & \left. + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[-\left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} - \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{l\hat{a}} \right] \right\} \quad (2.65) \end{aligned}$$

となる. ここで, 最後の項を変形すると

$$\begin{aligned} -\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{l\hat{a}} &= -\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{l\hat{a}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \\ &= \epsilon_{\hat{b}\hat{a}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{l\hat{a}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \\ &= \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{l\hat{a}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \end{aligned}$$

となる. ただし, 最初の等式ではフィルツ恒等式

$$\overline{\psi_{1L}} \gamma_\mu \psi_{2L} \overline{\psi_{3L}} \gamma_\rho \psi_{4L} = \overline{\psi_{1L}} \gamma_\mu \psi_{4L} \overline{\psi_{3L}} \gamma_\rho \psi_{2L} \quad (2.66)$$

を用いた. よって, ラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}|_{\text{BV}} = & -\frac{g_5^2}{2m_X^2} \left\{ \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(e^c)_R]^j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{u_L}]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} + \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{u_L}]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \right. \\ & + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{l\hat{a}} \\ & - \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \gamma_\rho [(\nu_e^c)_R]^j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} - [\overline{u_L}]_{\hat{a}}^i \gamma_\rho [(e_R)^c]_j \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_L} \right]_{\hat{b}}^k \gamma^\rho [(u^c)_L]_{l\hat{c}} \\ & \left. - \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{l\hat{a}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \right\} \quad (2.67) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}$ が先頭にある項を最初にして, エルミート共役の部分 h.c. として書き直すと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}|_{\text{BV}} = & -\frac{g_5^2}{2m_X^2} \left\{ \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_{l\hat{a}} \right. \\ & \left. - \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(\nu_e^c)_R} \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{l\hat{a}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_j^{\hat{b}} + \text{h.c.} \right\} \quad (2.68) \end{aligned}$$

となる. さらに, 第 4 項についてフィルツ恒等式を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_{l\hat{a}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_j^{\hat{b}} &= \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{l\hat{a}} \\ &= -\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_{l\hat{a}} \end{aligned}$$

となり, これを用いることで陽子崩壊の有効ラグランジアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}}|_{\text{BV}} &= -\frac{g_5^2}{2m_X^2} \left\{ \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[(e^c)_R \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} - \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[(\nu_e^c)_R \right]_k \gamma^\rho [d_R]^{l\hat{a}} \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_l^{\hat{a}} - \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_l^{\hat{a}} + \text{h.c.} \right\} \\
&= -\frac{g_5^2}{2m_X^2} \left\{ \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(d^c)_L} \right]^{l\hat{a}} \gamma^\rho [e_L]_k - \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(d^c)_L} \right]^{l\hat{a}} \gamma^\rho [\nu_{eL}]_k \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [u_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [d_L]_l^{\hat{a}} - \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho [d_L]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho [u_L]_l^{\hat{a}} + \text{h.c.} \right\} \\
&= -\frac{g_5^2}{2m_X^2} \left\{ \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho \left[(Q_L)^\alpha \right]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(d^c)_L} \right]^{l\hat{a}} \gamma^\rho \left[(E_L)^\beta \right]_k \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(u^c)_L} \right]^{i\hat{c}} \gamma_\rho \left[(Q_L)^\alpha \right]_j^{\hat{b}} \left[\overline{(e^c)_L} \right]^k \gamma^\rho \left[(Q_L)^\beta \right]_l^{\hat{a}} + \text{h.c.} \right\} \quad (2.69)
\end{aligned}$$

とまとめることができる.

2.3 ベータ関数

ゲージ結合定数のベータ関数

ゲージ結合定数の 1-loop でのベータ関数は

$$\frac{dg_i}{d \log \mu} = \frac{1}{(4\pi)^2} \beta_{g_i} \quad (2.70)$$

$$\beta_{g_i} = -\frac{11}{3} C_2(G_i) + \frac{4}{3} \kappa \cdot S_2(F_i) + \frac{1}{3} \eta \cdot S_2(S_i) \quad (2.71)$$

と与えられる. ただし, $S_2(R_i)$ は

$$S_2(R_i) \equiv T(R_i) \frac{d(R)}{d(R_i)} \quad (2.72)$$

と与えられる. また, 規約表現 $R = R_1 \otimes \cdots \otimes R_N$ を持つ群 $\mathcal{G}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}_N$ でのベータ関数を考える場合には

$$S_2(R_i) = T(R_i) \frac{d(R_1) \times \cdots \times d(R_N)}{d(R_i)} \quad (2.73)$$

が成立する. つまり, この式は $\mathcal{G}_1$ のときの $T(R_i)$ を $S_2(F_i)$ を用いることで一般化される. 実際に, $R = R_i$ を持つ, 群 $\mathcal{G}_i$ でのベータ関数を考えると

$$S_2(R_i) = T(R_i) \frac{d(R_i)}{d(R_i)} = T(R_i) \quad (2.74)$$

となることから, β_{g_i} は

$$\beta_{g_i} = -\frac{11}{3} C_2(G_i) + \frac{4}{3} \kappa \cdot T(F_i) + \frac{1}{3} \eta \cdot T(S_i) \quad (2.75)$$

となり, 群 $\mathcal{G}_i$ でのベータ関数を再現していることがわかる.

湯川行列のベータ関数

次に、湯川行列のベータ関数について求めていく。[18] の Appendix C に詳細が書いてある。湯川相互作用項のラグランジアンが以下のように与えられるとする。

$$-\mathcal{L}_Y = \left[Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi \right]_{jk} \left[\bar{\psi} \right]_j \phi [\psi']_k \quad (2.76)$$

このとき、湯川行列 $Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi$ のベータ関数は

$$\frac{d}{d \log \mu} Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi = \frac{1}{(4\pi)^2} \beta_{Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \beta_{Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi} = & -3 \sum_j g_j^2 \left[C_2^i(\psi) Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi + Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi C_2^i(\psi') \right] + \frac{1}{2} \left[Y_2(\psi) Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi + Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi Y_2(\psi') \right] + Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi \Theta(\phi) \\ & + 2\Gamma_{Y_{\bar{\psi}\psi'}^\phi} \end{aligned} \quad (2.78)$$

と与えられる。

本論文では、GUT スケールよりも低い場合について議論していく。Minimal $SU(5)$ GUT の議論ができるのは GUT スケールよりも大きい場合なので、この場合は SM の湯川相互作用項のベータ関数について考える。この場合、ベータ関数を構成する 4 つの部分について標準模型でどのようになるか確認していく。

最初に、ゲージボソンのループの寄与は

$$\begin{aligned} \sum_i g_i^2 C_2^i(q_L) &= \frac{4}{3} g_s^2 + \frac{3}{4} g^2 + \frac{1}{36} g'^2, \quad \sum_i g_i^2 C_2^i(u_R) = \frac{4}{3} g_s^2 + \frac{4}{9} g'^2, \quad \sum_i g_i^2 C_2^i(d_R) = \frac{4}{3} g_s^2 + \frac{1}{9} g'^2 \\ \sum_i g_i^2 C_2^i(\ell_L) &= \frac{3}{4} g^2 + \frac{1}{4} g'^2, \quad \sum_i g_i^2 C_2^i(e_R) = g'^2 \end{aligned} \quad (2.79)$$

と与えられる。ただし、反粒子に対しては $C_2^i(\psi^c) = C_2^i(\psi)$ を満たす。

次に、フェルミオンへの自己エネルギー寄与は

$$Y_2(q_L) = Y_U^\dagger Y_U + Y_D^\dagger Y_D \quad (2.80)$$

$$Y_2(u_R) = 2Y_U Y_U^\dagger \quad (2.81)$$

$$Y_2(d_R) = 2Y_D Y_D^\dagger \quad (2.82)$$

$$Y_2(\ell_L) = Y_E^\dagger Y_E \quad (2.83)$$

$$Y_2(e_R) = 2Y_E Y_E^\dagger \quad (2.84)$$

と与えられる。ただし、反粒子に対しては $Y_2(\psi^c) = [Y_2(\psi)]^T$ を満たす。

また、スカラーへの自己エネルギー寄与は

$$\Theta(H) = \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \quad (2.85)$$

と与えられる。ただし、反粒子に対しては $\Theta(\phi^*) = \Theta(\phi)$ となる。

最後に、頂点補正については

$$\Gamma_{Y_U} = -Y_U Y_D^\dagger Y_D \quad (2.86)$$

$$\Gamma_{Y_D} = -Y_D Y_U^\dagger Y_U \quad (2.87)$$

$$\Gamma_{Y_E} = 0 \quad (2.88)$$

となる。

湯川結合のベータ関数の確認

次に, Minimal $SU(5)$ GUT のそれぞれの湯川行列 Y_U, Y_D, Y_E のベータ関数を導出していく. Minimal $SU(5)$ GUT の湯川相互作用項を標準模型の場で展開すると

$$-\mathcal{L}_Y = (Y_U)_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{u_R}]_{\hat{a}i} H^\alpha [q_L]_j^{\hat{a}\beta} + (Y_D)_{ij} [\overline{d_R}]_{\hat{a}i} (H^*)_\alpha [q_L]_j^{\hat{a}\alpha} + (Y_E)_{ij} [\overline{e_R}]_i (H^*)_\alpha [\ell_L]_j^\alpha \quad (2.89)$$

が得られる.

最初に, Y_U の湯川相互作用項は以下のように与えられる.

$$-\mathcal{L}_{Y_U} = (Y_U)_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{u_R}]_{\hat{a}i} H^\alpha [q_L]_j^{\hat{a}\beta} \quad (2.90)$$

このラグランジアンをもとに (C.3) に当てはめると

$$\beta_{Y_U} = -3 \sum_i g_i^2 \left[C_2^i(u_R) Y_U + Y_U C_2^i(q_L) \right] + \frac{1}{2} \left[Y_2(u_R) Y_U + Y_U Y_2(q_L) \right] + Y_{\psi\psi}^H \Theta(H) + 2\Gamma_{Y_U} \quad (2.91)$$

となる. この式に対して, 該当する 1-loop のベータ関数を構成する要素を代入すると

$$\beta_{Y_U} = -Y_U \left(8g_s^2 + \frac{9}{4}g^2 + \frac{17}{12}g'^2 \right) + \frac{3}{2} \left[Y_U Y_U^\dagger Y_U - Y_U Y_D^\dagger Y_D \right] + Y_U \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \quad (2.92)$$

となる. また, g_s, g, g' を

$$g_s^2 = g_3^2 \quad (2.93)$$

$$g^2 = g_2^2 \quad (2.94)$$

$$g'^2 = \frac{3}{5}g_1^2 \quad (2.95)$$

を用いて書き換えると

$$\beta_{Y_U} = -Y_U \left(8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{20}g_1^2 \right) + \frac{3}{2} \left[Y_U Y_U^\dagger Y_U - Y_U Y_D^\dagger Y_D \right] + Y_U \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \quad (2.96)$$

が得られる.

同様に, Y_U, Y_D の β 関数を求める. Y_E の湯川相互作用項は以下のように与えられる.

$$(Y_D)_{ij} [\overline{d_R}]_{\hat{a}i} (H^*)_\alpha [q_L]_j^{\hat{a}\alpha} \quad (2.97)$$

このラグランジアンをもとに (C.3) に当てはめると

$$\beta_{Y_D} = -3 \sum_i g_i^2 \left[C_2^i(d_R) Y_D + Y_D C_2^i(q_L) \right] + \frac{1}{2} \left[Y_2(d_R) Y_D + Y_D Y_2(q_L) \right] + Y_D \Theta(H^*) + 2\Gamma_{Y_D} \quad (2.98)$$

となる. この式に対して, 該当する 1-loop のベータ関数を構成する要素を代入すると

$$\beta_{Y_D} = -Y_D \left(8g_s^2 + \frac{9}{4}g^2 + \frac{5}{12}g'^2 \right) + \frac{3}{2} \left[Y_D Y_D^\dagger Y_D - Y_D Y_U^\dagger Y_U \right] + Y_D \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \quad (2.99)$$

$$= -Y_D \left(8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{1}{4}g_1^2 \right) + \frac{3}{2} \left[Y_D Y_D^\dagger Y_D - Y_D Y_U^\dagger Y_U \right] + Y_D \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \quad (2.100)$$

となる.

Y_U, Y_D のベータ関数と同様にして求める. Y_E の湯川相互作用項は以下のように与えられる.

$$(Y_E)_{ij} [\overline{e_R}]_i (H^*)_\alpha [\ell_L]_j^\alpha \quad (2.101)$$

このラグランジアンをもとに (C.3) に当てはめると

$$\beta_{Y_E} = -3 \sum_j g_i^2 \left[C_2^i(e_R) Y_E + Y_E C_2^i(\ell_L) \right] + \frac{1}{2} \left[Y_2(e_R) Y_E + Y_E Y_2(\ell_L) \right] + Y_E \Theta(H) + 2\Gamma_{Y_E} \quad (2.102)$$

となる. この式に対して, 該当する 1-loop のベータ関数を構成する要素を代入すると

$$\begin{aligned} \beta_{Y_E} &= -Y_E \left(\frac{9}{4} g^2 + \frac{15}{4} g'^2 \right) + \frac{3}{2} Y_E Y_E^\dagger Y_E + Y_E \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \\ &= -Y_E \left(\frac{9}{4} g_2^2 + \frac{9}{4} g_1^2 \right) + \frac{3}{2} Y_E Y_E^\dagger Y_E + Y_E \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \end{aligned} \quad (2.103)$$

となる.

第 3 章

45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT

前章では, Minimal $SU(5)$ GUT についてのレビューを行った. この章では, 本論文で用いる 45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT について Minimal $SU(5)$ GUT がどのように拡張されるかを確認していく.

3.1 ラグランジアン

45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT のラグランジアン

Minimal $SU(5)$ GUT のラグランジアンは式 (2.4) と与えられる. 45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT は Minimal $SU(5)$ GUT に 45 表現ヒッグス場を追加した理論であるため, 45 表現ヒッグス場に関するラグランジアンの項が追加される.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{SU(5)} + \left[D^\mu (\Phi_{45}^\dagger)_{AB}^C \right] \left[D_\mu (\Phi_{45})_C^{AB} \right] \\ & + \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{ABCDE} (\Psi_{10i})^{AB} (\Phi_{45})_F^{CD} (\Psi_{10j})^{EF} + \frac{1}{2} (Y_{45}^D)_{ij} (\Psi_{10i})^{AB} (\Phi_{45}^\dagger)_{AB}^C (\Psi_{\bar{5}j})_C + \text{h.c.} \\ & + V_{45} + V_{24 \cdot 45} + V_{5 \cdot 45} + V_{24 \cdot 5 \cdot 45} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで, 式 (2.4) で与えられる Minimal $SU(5)$ GUT に関してのラグランジアンを $\mathcal{L}_{SU(5)}$ としている. ここで, 45 表現ヒッグスによるポテンシャル項の具体的な形については [18] の Appendix A に書いてある.

粒子に課される関係式

この節では, 45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT を構成する粒子について見ていく. ただし, Minimal $SU(5)$ GUT と全く同じ場合については省略する.

最初に, $SU(5)$ GUT に含まれる粒子が満たす関係式について記しておく. 45 表現については反対称性とトレースレスであることを満たす.

$$(\Phi_{45})_{AB}^C = -(\Phi_{45})_{BA}^C \quad (3.2)$$

$$(\Phi_{45})_{AB}^A = 0 \quad (3.3)$$

これらの関係は, 群論の議論によって決まるため, 本論文では省略する.

フェルミオン

フェルミオンについては 45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT では 45 表現ヒッグス場のみ追加するので Minimal $SU(5)$ GUT と同じフェルミオンを用いる. ただし, この場合はフェルミオンに対してフレーバー混合行列まで考慮する.

$$\bar{5}: (\Psi_{\bar{5}Li})_A = \left([(d_R)^c]_{i\hat{a}} \quad \epsilon_{\alpha\beta}(V_{DL})_{i^j} [\ell_L]_j^\beta \right) \quad (3.4)$$

$$10: (\Psi_{10Li})^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}(V_{QU})_{i^j} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} & [q_L]_i^{\hat{a}\beta} \\ -[q_L]_i^{\alpha\hat{b}} & \epsilon^{\alpha\beta}(V_{QE})_{i^j} [(e_R)^c]_{j\beta} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ここで, A, B は $SU(5)$ の添字 a, b, c は $SU(3)$ の添字 α, β は $SU(2)$ の添字 i, j は世代の添字である. ユニタリ行列 V_{DL}, V_{QU} および V_{QE} は, GUT スケールにおける GUT フェルミオンセクターと標準模型 (SM) フェルミオンセクターとの整合条件を課すことで決定される.

ボソン

次に, スカラーボソンである 45 表現ヒッグス場について見ていく. 5_H および 45_H ヒッグス場は, 次のように SM の表現に従って成分に分解される.

$$5_H: \Phi_5 = H^{(5)}(1, 2)_{1/2} \oplus S_1^{(5)*}(3, 1)_{-1/3} \quad (3.6)$$

$$45_H: \Phi_{45} = H^{(45)}(1, 2)_{1/2} \oplus S_1^{(45)*}(3, 1)_{-1/3} \oplus S_3^*(3, 3)_{-1/3} \oplus \tilde{S}_1(\bar{3}, 1)_{4/3} \oplus R_2^*(\bar{3}, 2)_{-7/6} \\ \oplus S_6^*(\bar{6}, 1)_{-1/3} \oplus S_8(8, 2)_{1/2} \quad (3.7)$$

ここで, GCU を実現するために, 45_H ヒッグスの成分間に質量階層を考慮し, 一部の成分が GUT スケールよりもはるかに軽いと仮定する.

GUT スケール以下では, スカラーポテンシャルのパラメータに依存するため, 45 表現ヒッグス場の $H^{(45)}(1, 2)_{1/2}$ と $S_1^{(45)*}(3, 1)_{-1/3}$ の成分が³, それぞれ 5 表現ヒッグス場の $H^{(5)}(1, 2)_{1/2}$ と $S_1^{(5)*}(3, 1)_{-1/3}$ の成分と混合する. この混合によって生じる質量固有状態は以下の通りである.

$$\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_H & e^{-i\delta_H} s_H \\ -e^{i\delta_H} s_H & c_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^{(5)} \\ H^{(45)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H_C \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_S & e^{-i\delta_S} s_S \\ -e^{i\delta_S} s_S & c_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{(5)} \\ S_1^{(45)} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

ここで, $c_H = \cos \theta_H$, $s_H = \sin \theta_H$, $c_S = \cos \theta_S$, $s_S = \sin \theta_S$ である.^{*1} また, 45 表現ヒッグス場について具体的な形で書くと次のように表せる.

$$(\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{d}} \left[(\eta_a)_{\hat{c}\hat{d}} S_6^{a*} - \frac{1}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{d}\hat{e}} (S_1^{(45)*})^{\hat{e}} \right], \quad (\Phi_{45})_{\gamma}^{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{d}} (R_2^*)_{\hat{d}\gamma} \quad (3.9)$$

$$(\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\hat{a}\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_a)^{\hat{a}}_{\hat{c}} (S_8^a)^\beta + \frac{1}{2\sqrt{3}} \delta^{\hat{a}}_{\hat{c}} H^{(45)\beta} \right], \quad (\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{\alpha\beta} (\tilde{S}_1)_{\hat{c}} \quad (3.10)$$

$$(\Phi_{45})_{\gamma}^{\alpha\hat{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_a)^{\alpha}_{\gamma} (S_3^{*a})^{\hat{b}} - \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\gamma} (S_1^{(45)*})^{\hat{b}} \right], \quad (\Phi_{45})_{\gamma}^{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} H^{(45)\delta} \quad (3.11)$$

^{*1} 5 表現ヒッグス場を構成するカラーヒッグス $S_1^{(5)}(3, 1)_{-1/3}$ が GUT スケール付近の質量を持ち, 軽い質量固有状態 S_1 が主に $S_1^{(45)}(3, 1)_{-1/3}$ から構成され, 混合角 $\theta_S \sim m_{S_1^{(45)}}^2 / m_{S_1^{(5)}}^2 \ll 1$ が非常に小さいと仮定している.

また, 45 表現ヒッグス場の真空期待値は

$$\langle (\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\hat{a}\hat{b}} \rangle = 0, \quad \langle (\Phi_{45})_{\gamma}^{\hat{a}\hat{b}} \rangle = 0 \quad (3.12)$$

$$\langle (\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\hat{a}\beta} \rangle = \frac{v_{45}}{2\sqrt{6}} \delta^{\hat{a}}_{\hat{c}} \delta^{\beta}_5, \quad \langle (\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\alpha\beta} \rangle = 0 \quad (3.13)$$

$$\langle (\Phi_{45})_{\gamma}^{\alpha\hat{b}} \rangle = 0, \quad \langle (\Phi_{45})_{\gamma}^{\alpha\beta} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} v_{45} \cdot \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma 5} \quad (3.14)$$

と与えられる. ここで, σ_a ($a = 1 \sim 3$) はパウリ行列, λ_a ($a = 1 \sim 3$) はゲルマン行列, η_a ($a = 1 \sim 3$) については以下のような対称行列を指す.

$$\begin{aligned} & \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

45 表現ヒッグス場の湯川相互作用項

最後に, 湯川相互作用項について 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場を用いて展開する. 湯川相互作用項は式 (3.1) で与えられるので 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場のみで書き直すと以下のようになる.

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \frac{1}{8} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{ABCDE} (\Psi_{10i})^{AB} (5_H)^C (\Psi_{10j})^{DE} + (Y_5^D)_{ij} (\Psi_{10i})^{AB} (\bar{5}_H)_A (\Psi_{5j})_B \\ &+ \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{ABCDE} (\Psi_{10i})^{AB} (45_H)^{CD} (\Psi_{10j})^{EF} + \frac{1}{2} (Y_{45}^D)_{ij} (\Psi_{10i})^{AB} (\bar{45}_H)^C_{AB} (\Psi_{5j})_C + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.16)$$

式 (3.16) の $SU(5)$ 不変の湯川相互作用は分解すると次のように表される [18].

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= (Y_U)_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{u}_R]_{i\hat{a}} H^\alpha [q_L]_j^{\beta\hat{a}} + (Y_D)_{ij} [\bar{d}_R]_{i\hat{a}} (H^*)_\alpha [q_L]_j^{\alpha\hat{a}} + (Y_E)_{ij} [\bar{e}_R]_i (H^*)_\alpha [\ell_L]_j^\alpha \\ &+ (Y'_U)_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{u}_R]_{i\hat{a}} (H')^\alpha [q_L]_j^{\beta\hat{a}} + (Y'_D)_{ij} [\bar{d}_R]_{i\hat{a}} (H'^*)_\alpha [q_L]_j^{\alpha\hat{a}} + (Y'_E)_{ij} [\bar{e}_R]_i (H'^*)_\alpha [\ell_L]_j^\alpha \\ &+ (Y_C^{QL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{(q_L)^c}]_i^{\alpha\hat{a}} (H_C)_{\hat{a}} [\ell_L]_j^\beta + (Y_C^{UE})_{ij} [\bar{u}_R]_{i\hat{a}} (H_C^*)^{\hat{a}} [(e_R)^c]_j \\ &+ (Y_C^{DU})_{ij} \epsilon^{abc} [\bar{d}_R]_{i\hat{a}} (H_C)_{\hat{b}} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} + \frac{(Y_C^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{abc} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{(q_L)^c}]_i^{\alpha\hat{a}} (H_C^*)^{\hat{b}} [q_L]_j^{\hat{c}\beta} \\ &+ \frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{abc} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{(q_L)^c}]_i^{\alpha\hat{a}} (S_1^*)^{\hat{b}} [q_L]_j^{\hat{c}\beta} + (Y_1^{QL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{(q_L)^c}]_i^{\alpha\hat{a}} (S_1)_{\hat{a}} [\ell_L]_j^\beta \\ &+ (Y_1^{UE})_{ij} [\bar{u}_R]_{i\hat{a}} (S_1^*)^{\hat{a}} [(e_R)^c]_j + (Y_1^{DU})_{ij} \epsilon^{abc} [\bar{d}_R]_{i\hat{a}} (S_1)_{\hat{b}} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} \\ &+ (\tilde{Y}_1^{ED})_{ij} [\bar{e}_R]_i (\tilde{S}_1^*)^{\hat{a}} [(d_R)^c]_{j\hat{a}} + \frac{(\tilde{Y}_1^{UU})_{ij}}{2} \epsilon^{abc} [\bar{u}_R]_{i\hat{a}} (\tilde{S}_1^*)_{\hat{b}} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} \\ &+ (Y_2^{UL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{u}_R]_{i\hat{a}} (R_2)^{\hat{a}\alpha} [\ell_L]_j^\beta + (Y_2^{EQ})_{ij} [\bar{e}_R]_i (R_2^*)_{\hat{a}\alpha} [q_L]_j^{\hat{a}\alpha} \\ &+ (Y_3^{QL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{(q_L)^c}]_i^{\gamma\hat{a}} (\sigma_A)^\alpha_\gamma (S_3^A)_{\hat{a}} [\ell_L]_j^\beta + \frac{(Y_3^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{abc} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{(q_L)^c}]_i^{\alpha\hat{a}} (\sigma_A)^\beta_\gamma (S_3^{*A})^{\hat{b}} [q_L]_j^{\hat{c}\gamma} \\ &+ (Y_6^{DU})_{ij} [\bar{d}_R]_{i\hat{a}} (\eta_A)^{ab} S_6^A [(u_R)^c]_{j\hat{b}} + \frac{(Y_6^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{(q_L)^c}]_i^{\alpha\hat{a}} (\eta_A)_{ab} S_6^{A*} [q_L]_j^{\hat{b}\beta} \\ &+ (Y_8^{UQ})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\bar{u}_R]_{i\hat{a}} (\lambda_A)^a_b (S_8^A)^\alpha [q_L]_j^{\hat{b}\beta} + (Y_8^{DQ})_{ij} [\bar{d}_R]_{i\hat{a}} (\lambda_A)^a_b (S_8^{A*})_\alpha [q_L]_j^{\hat{b}\alpha} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで, 上記の湯川結合は GUT スケールにおいて GUT 湯川結合と次のように一致する.

$$\begin{aligned}
Y_U &= -\frac{1}{2} V_{QU}^T \left(c_H Y_5^U + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\delta_H} s_H Y_{45}^U \right)^T, & Y'_U &= \frac{1}{2} V_{QU}^T \left(e^{-i\delta_H} s_H Y_5^U - \sqrt{\frac{2}{3}} c_H Y_{45}^U \right)^T, \\
Y_D &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_H Y_5^D - \frac{1}{2\sqrt{6}} e^{-i\delta_H} s_H Y_{45}^D \right)^T, & Y'_D &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\delta_H} s_H Y_5^D + \frac{1}{2\sqrt{6}} c_H Y_{45}^D \right)^T, \\
Y_E &= -\frac{1}{\sqrt{2}} V_{QE}^T \left(c_H Y_5^D + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{-i\delta_H} s_H Y_{45}^D \right) V_{DL}, & Y'_E &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_{QE}^T \left(e^{i\delta_H} s_H Y_5^D - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} c_H Y_{45}^D \right) V_{DL}, \\
Y_C^{QL} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_S Y_5^D + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\delta_S} s_S Y_{45}^D \right) V_{DL}, & Y_1^{QL} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-e^{-i\delta_S} s_S Y_5^D + \frac{1}{2\sqrt{2}} c_S Y_{45}^D \right) V_{DL}, \\
Y_C^{UE} &= \frac{1}{2} V_{QU}^T \left(c_S Y_5^U - \sqrt{2} e^{-i\delta_S} s_S Y_{45}^U \right) V_{QE}, & Y_1^{UE} &= -\frac{1}{2} V_{QU}^T \left(e^{i\delta_S} s_S Y_5^U + \sqrt{2} c_S Y_{45}^U \right) V_{QE}, \\
Y_C^{DU} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-c_S Y_5^D + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\delta_S} s_S Y_{45}^D \right)^T V_{QU}, & Y_1^{DU} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\delta_S} s_S Y_5^D + \frac{1}{2\sqrt{2}} c_S Y_{45}^D \right)^T V_{QU}, \\
Y_C^{QQ} &= \frac{1}{2} c_S Y_5^U, \quad Y_1^{QQ} = -\frac{1}{2} e^{i\delta_S} s_S Y_5^U, & \tilde{Y}_1^{UU} &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_{QU}^T Y_{45}^U V_{QU}, \quad \tilde{Y}_1^{ED} = \frac{1}{2} V_{QE}^T Y_{45}^D, \\
Y_2^{EQ} &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_{QE}^T Y_{45}^U, \quad Y_2^{UL} = \frac{1}{2} V_{QU}^T Y_{45}^D V_{DL}, & Y_3^{QQ} &= \frac{1}{2} Y_{45}^U, \quad Y_3^{QL} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} Y_{45}^D V_{DL}, \\
Y_6^{QQ} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} Y_{45}^U, \quad Y_6^{DU} = \frac{1}{2} (Y_{45}^D)^T V_{QU}, & Y_8^{UQ} &= -\frac{1}{2} V_{QU}^T Y_{45}^U, \quad Y_8^{DQ} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (Y_{45}^D)^T.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

アップタイプクォークと荷電レプトンがそれぞれの質量固有状態となる基底を取ると, GUT 湯川行列 Y_5^U, Y_{45}^U, Y_5^D , および Y_{45}^D は次のように表される.

$$\begin{aligned}
Y_5^U &= -\frac{1}{c_H} \left(V_{QU}^* \hat{Y}_U + \hat{Y}_U V_{QU}^\dagger \right), & Y_{45}^U &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} e^{i\delta_H} s_H} \left(V_{QU}^* \hat{Y}_U - \hat{Y}_U V_{QU}^\dagger \right), \\
Y_5^D &= -\frac{1}{2\sqrt{2} c_H} \left(3 V_{CKM}^* \hat{Y}_D + V_{QE}^* \hat{Y}_E V_{DL}^\dagger \right), & Y_{45}^D &= \frac{\sqrt{3}}{e^{-i\delta_H} s_H} \left(V_{CKM}^* \hat{Y}_D - V_{QE}^* \hat{Y}_E V_{DL}^\dagger \right),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ここで, $\hat{Y}_U, \hat{Y}_D$, および $\hat{Y}_E$ は質量基底における対角行列を表し, V_{CKM} は観測されたフェルミオン質量と混合角によって決まるカビボ・小林・益川 (CKM) 行列である. 一方で, ユニタリ行列 V_{QE}, V_{QU}, V_{DL} は低エネルギー実験のみでは決定できない. また, これらの行列は $SU(5)$ GUT の枠組みでクォーク-ヒッグスおよびレプトン-ヒッグスの湯川結合を対角化するために必要な回転を表しており, 陽子崩壊の解析において重要である.

3.2 Georgi-Jarlsokg 型の質量行列

この節では, Georgi-Jarlsokg 型の質量行列の導出を見ていく. Georgi-Jarlsokg 型の質量行列とはストレンジクォークとミュー粒子の GUT スケールにおける質量関係を説明できる行列である. ここでは, 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場が真空期待値を取ることでこれらの行列に得られることをそれぞれ

の種類のフェルミオンについて行っていく. 最初に, 5 表現ヒッグス場

$$(\Phi_5)_A = \begin{pmatrix} [S_1^{(5)*}]_{\hat{a}} \\ [H^{(5)}]_{\alpha} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$\langle (\Phi_5)_A \rangle = \frac{v_5}{\sqrt{2}} \delta^A_5 \iff \begin{cases} \langle [S_1^{(5)}]_{\hat{a}} \rangle = 0 \\ \langle [H^{(5)*}]_{\alpha} \rangle = \frac{v_5}{\sqrt{2}} \delta^{\alpha}_2 \end{cases} \quad (3.21)$$

と与えられる. また, 45 表現ヒッグス場の真空期待値は

$$\langle (\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\hat{a}\beta} \rangle = \frac{v_{45}}{2\sqrt{6}} \delta^{\hat{a}}_{\hat{c}} \delta^{\beta}_5 \quad (3.22)$$

$$\langle (\Phi_{45})_{\gamma}^{\alpha\beta} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} v_{45} \cdot \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma 5} \quad (3.23)$$

$$\langle (\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\hat{a}\hat{b}} \rangle = \langle (\Phi_{45})_{\gamma}^{\hat{a}\hat{b}} \rangle = \langle (\Phi_{45})_{\hat{c}}^{\alpha\beta} \rangle = \langle (\Phi_{45})_{\gamma}^{\alpha\hat{b}} \rangle = 0 \quad (3.24)$$

と与えられる. 湯川相互作用項にある 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場に対して, 真空期待値を取ることで質量が得られる. また, 5 表現ヒッグス場, 45 表現ヒッグス場の真空期待値から得られた湯川行列をまとめることで Georgi-Jarlsokg 型の質量行列を求めていく.

3.2.1 アップタイプクォーク

最初に, アップタイプクォークについて求めていく. 5 表現ヒッグス場が真空期待値をとった場合には

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\kappa} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^{\gamma} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\kappa} &= -\frac{v_5}{8\sqrt{2}} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{d}2\kappa} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{u_R}]_{i\hat{c}} \frac{v_5}{\sqrt{2}} [q_L]_j^{\hat{d}\kappa} \\ &= \frac{v_5}{2\sqrt{2}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる. また, もう 1 つの項についても計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^{\gamma} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\hat{e}} &= \frac{v_5}{8\sqrt{2}} \epsilon_{\hat{a}\hat{d}\hat{e}\beta 2} \epsilon^{\hat{d}\hat{e}\hat{f}} [(q_L)^c]_i^{\hat{a}\beta} (Y_5^U)_{ij} [(u_R)^c]_{j\hat{f}} \\ &= \frac{v_5}{2\sqrt{2}} [\overline{(u_L)^c}]_i^{\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} [(u_R)^c]_{j\hat{a}} \\ &= \frac{v_5}{2\sqrt{2}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(Y_5^U)^T]_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる. それに対して, 45 表現ヒッグス場が真空期待値をとった場合には

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_{\lambda}^{\gamma\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\lambda} &= -\frac{\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} v_{45} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{e}\gamma\eta} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \epsilon^{\gamma\eta} \epsilon_{45} [\overline{u_R}]_{i\hat{c}} [q_L]_j^{\hat{e}\lambda} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} v_{45} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \\ &= \frac{v_{45}}{4\sqrt{6}} \cdot (-3) \cdot [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

となる. また, もう 1 つの項についても計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_{\hat{f}}^{\hat{c}\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\hat{f}} &= \frac{v_{45}}{16\sqrt{6}} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{c}\hat{e}\beta 5} [(q_L)^c]_i^{\hat{a}\beta} \cdot \epsilon^{\hat{c}\hat{e}\hat{g}} [(u_R)^c]_{j\hat{g}} \\ &= \frac{v_{45}}{4\sqrt{6}} [\overline{(u_L)^c}]_i^{\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} [(u_R)^c]_{j\hat{a}} \\ &= \frac{v_{45}}{4\sqrt{6}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(Y_{45}^U)^T]_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる. それぞれの項の分母は, 統一している. ここで, 湯川行列 Y_5^U, Y_{45}^U が

$$(Y_5^U)_{ij} = (Y_5^U)_{ji} \quad (3.29)$$

$$(Y_{45}^U)_{ij} = -(Y_{45}^U)_{ji} \quad (3.30)$$

を満たすことから, 先ほど得られたアップタイプクォークの湯川相互作用項のうち 2 つは

$$\frac{v_5}{2\sqrt{2}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} \left[(Y_5^U)^T \right]_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} = \frac{v_5}{2\sqrt{2}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.31)$$

$$\frac{v_{45}}{4\sqrt{6}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} \left[(Y_{45}^U)^T \right]_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} = -\frac{v_{45}}{4\sqrt{6}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.32)$$

と書き換えることができる. よって,

$$\frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\kappa} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\kappa} = \frac{v_5}{2\sqrt{2}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\hat{e}} = \frac{v_5}{2\sqrt{2}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_\lambda^{\gamma\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\lambda} = \frac{v_{45}}{4\sqrt{6}} \cdot (-3) \cdot [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_{\hat{f}}^{\hat{c}\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\hat{f}} = -\frac{v_{45}}{4\sqrt{6}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.36)$$

となる. まとめると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\kappa} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\kappa} + \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\hat{e}} \\ & + \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_\lambda^{\gamma\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\lambda} + \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_{\hat{f}}^{\hat{c}\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\hat{f}} \\ & = \frac{v_5}{\sqrt{2}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} - \frac{v_{45}}{\sqrt{6}} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \\ & = [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_5^U) \cdot v_5 - \frac{1}{\sqrt{6}} (Y_{45}^U) \cdot v_{45} \right]_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる. ここで

$$(M_U)_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_5^U)_{ij} \cdot v_5 - \frac{1}{\sqrt{6}} (Y_{45}^U)_{ij} \cdot v_{45} \quad (3.38)$$

と定義すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\kappa} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\kappa} + \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\hat{e}} \\ & + \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_\lambda^{\gamma\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\lambda} + \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_{\hat{f}}^{\hat{c}\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\hat{f}} \\ & = [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (M_U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

と考えることができる. また, 荷電共役変換を行うことで反粒子の場合を考えると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\kappa} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\kappa} + \frac{1}{4} (Y_5^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_5)^\gamma \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{d}\hat{e}} \\ & + \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_\lambda^{\gamma\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\lambda} + \frac{1}{4} (Y_{45}^U)_{ij} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\eta\hat{e}} (\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}} \langle (\Phi_{45})_{\hat{f}}^{\hat{c}\eta} \rangle (\Psi_{10j})^{\hat{e}\hat{f}} \\ & = [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (M_U)_{ij} [u_L]_j^{\hat{a}} \\ & = \left[(\overline{u_L})^c \right]_i \left[(M_U)^T \right]_{ij} \left[(u_R)^c \right]_{j\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる.

3.2.2 ダウンタイプクォーク

次にダウンタイプクォークについても同様に考えていく。同様に, 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場に対して真空期待値をとると

$$(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} = -\frac{v_5}{2}[\overline{(d_L)^c}]_i^{\hat{a}}(Y_5^D)_{ij}[(d_R)^c]_{j\hat{a}} = -\frac{v_5}{2}[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}[(Y_5^D)^T]_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.41)$$

$$(Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta}\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} = \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}[\overline{(d_L)^c}]_i^{\hat{a}}(Y_{45}^D)_{ij}[(d_R)^c]_{j\hat{a}} = \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}[(Y_{45}^D)^T]_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.42)$$

が得られる。まず, 粒子の場合についてまとめるとダウンタイプクォークの湯川相互作用項は

$$\begin{aligned} & (Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} + (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta}\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} \\ &= -\frac{v_5}{2}[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}[(Y_5^D)^T]_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} + \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}[(Y_{45}^D)^T]_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} \\ &= -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}\left[\frac{v_5}{2}(Y_5^D)^T - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}(Y_{45}^D)^T\right]_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる。ここで, ダウンタイプクォークの質量行列 M_D を

$$(M_D)_{ij} \equiv \frac{v_5}{2}[(Y_5^D)^T]_{ij} - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}[(Y_{45}^D)^T]_{ij} \quad (3.44)$$

と定義すると

$$(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} + (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta}\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} = -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}(M_D)_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} \quad (3.45)$$

と書くことができる。また, 同様にして反粒子の場合についても考えると湯川相互作用項の和は

$$\begin{aligned} & (Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} + (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta}\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} \\ &= -\frac{v_5}{2}[\overline{(d_L)^c}]_i^{\hat{a}}(Y_5^D)_{ij}[(d_R)^c]_{j\hat{a}} + \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}[\overline{(d_L)^c}]_i^{\hat{a}}(Y_{45}^D)_{ij}[(d_R)^c]_{j\hat{a}} \\ &= -[\overline{(d_L)^c}]_{i\hat{a}}\left[\frac{v_5}{2}(Y_5^D) - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}(Y_{45}^D)\right]_{ij}[(d_R)^c]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

となる。ここで, 粒子の場合の質量行列の転置をとることで

$$[(M_D)^T]_{ij} = \frac{v_5}{2}(Y_5^D)_{ij} - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}(Y_{45}^D)_{ij} \quad (3.47)$$

となるため湯川相互作用項は

$$(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} + (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta}\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} = -[\overline{(d_L)^c}]_{i\hat{a}}[(M_D)^T]_{ij}[(d_R)^c]_j^{\hat{a}} \quad (3.48)$$

と書くことができる。まとめると, ダウンタイプクォークで 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場に対して真空期待値をとる場合には

$$\begin{aligned} & (Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} + (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta}\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} \\ &= -[\overline{(d_L)^c}]_{i\hat{a}}[(M_D)^T]_{ij}[(d_R)^c]_j^{\hat{a}} = -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}(M_D)_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

と書くことができる。

3.2.3 荷電レプトン

最後に、荷電レプトンについても同様に議論を行っていく。5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場に対して真空期待値をとると、5 表現ヒッグス場の場合には

$$\begin{aligned} (Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_5^\dagger)_\alpha \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\beta &= (Y_5^D)_{ij} \frac{v_5}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} \delta^\alpha_2 [\overline{e_R}]_i [\ell_L]_j^\gamma \\ &= -\frac{v_5}{2} [\overline{e_R}]_i (Y_5^D)_{ij} [e_L]_j \end{aligned} \quad (3.50)$$

が得られ、45 表現ヒッグス場の場合には

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_{45}^\dagger)_{\alpha\beta}^\gamma \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\gamma &= -\frac{\sqrt{3}}{8} v_{45} (Y_{45}^D)_{ij} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma 5} \epsilon_{\gamma\eta} [\overline{e_R}]_i [\ell_L]_j^\eta \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} v_{45} [\overline{e_R}]_i (Y_{45}^D)_{ij} [e_L]_j \end{aligned} \quad (3.51)$$

が得られる。これらをまとめると

$$(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_5^\dagger)_\alpha \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\beta = -\frac{v_5}{2} [\overline{e_R}]_i (Y_5^D)_{ij} [e_L]_j \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{2} (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_{45}^\dagger)_{\alpha\beta}^\gamma \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{4} v_{45} [\overline{e_R}]_i (Y_{45}^D)_{ij} [e_L]_j \quad (3.53)$$

となる。これらの和から荷電レプトンの湯川相互作用項は

$$\begin{aligned} &(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_5^\dagger)_\alpha \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\beta + \frac{1}{2} (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_{45}^\dagger)_{\alpha\beta}^\gamma \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\gamma \\ &= -\frac{v_5}{2} [\overline{e_R}]_i (Y_5^D)_{ij} [e_L]_j - \frac{\sqrt{3}}{4} v_{45} [\overline{e_R}]_i (Y_{45}^D)_{ij} [e_L]_j \\ &= -[\overline{e_R}]_i \left[\frac{v_5}{2} (Y_5^D) + \frac{\sqrt{3}}{4} v_{45} (Y_{45}^D) \right]_{ij} [e_L]_j \end{aligned} \quad (3.54)$$

となる。ここで、荷電レプトンの質量行列を

$$(M_E)_{ij} \equiv \frac{v_5}{2} (Y_5^D)_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{4} v_{45} (Y_{45}^D)_{ij} \quad (3.55)$$

と定義すると、荷電レプトンの湯川相互作用項は

$$(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_5^\dagger)_\alpha \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\beta + \frac{1}{2} (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_{45}^\dagger)_{\alpha\beta}^\gamma \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\gamma = -[\overline{e_R}]_i (M_E)_{ij} [e_L]_j \quad (3.56)$$

と表すことができる。

3.2.4 Georgi-Jarlsokg 型の質量行列

前節の議論から、5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場の両方が真空期待値を持つ場合について議論をした。前節で得られた質量行列を元に、Georgi-Jarlsokg 型の質量行列が導出できることを確認していく。最初に、アップタイプクォーク、ダウンタイプクォーク、荷電レプトン全てにおける湯川相互作用項を

再掲する. アップタイプクォークに対しては

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(Y_5^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\kappa}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}}\langle(\Phi_5)^\gamma\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{d}\kappa} + \frac{1}{4}(Y_5^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\beta\gamma\hat{d}\hat{e}}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_5)^\gamma\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{d}\hat{e}} \\ & + \frac{1}{4}(Y_{45}^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\eta\hat{e}}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}}\langle(\Phi_{45})_\lambda^\gamma\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{e}\lambda} + \frac{1}{4}(Y_{45}^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\beta\hat{c}\eta\hat{e}}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta}\langle(\Phi_{45})_{\hat{f}}^{\hat{c}\eta}\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{e}\hat{f}} \\ & = [\overline{u_R}]_{i\hat{a}}(M_U)_{ij}[u_L]_j^{\hat{a}} = [\overline{(u_L)^c}]_i^{\hat{a}}[(M_U)^T]_{ij}[(u_R)^c]_{j\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

ダウンタイプクォークに対しては

$$\begin{aligned} & (Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} + (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta}^{\hat{c}}\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} \\ & = -[\overline{(d_L)^c}]_{i\hat{a}}(M_D)_{ij}[(d_R)^c]_j^{\hat{a}} = -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}[(M_D)^T]_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

荷電レプトンに対しては

$$(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta}\langle(\Phi_5^\dagger)_\alpha\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_\beta + \frac{1}{2}(Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta}\langle(\Phi_{45}^\dagger)_{\alpha\beta}^\gamma\rangle(\Psi_{\bar{5}j})_\gamma = -[\overline{e_R}]_i(M_E)_{ij}[e_L]_j \quad (3.59)$$

また, 湯川相互作用項で用いられる質量行列は

$$(M_U)_{ij} = v_5(Y_5^U)_{ij} - \frac{v_{45}}{\sqrt{3}}(Y_{45}^U)_{ij} \iff [(M_U)^T]_{ij} = v_5(Y_5^U)_{ij} + \frac{v_{45}}{\sqrt{3}}(Y_{45}^U)_{ij} \quad (3.60)$$

$$(M_D)_{ij} = \frac{v_5}{2}[(Y_5^D)^T]_{ij} - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}[(Y_{45}^D)^T]_{ij} \iff [(M_D)^T]_{ij} = \frac{v_5}{2}(Y_5^D)_{ij} - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}}(Y_{45}^D)_{ij} \quad (3.61)$$

$$(M_E)_{ij} = \frac{v_5}{2}(Y_5^D)_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{4}v_{45}(Y_{45}^D)_{ij} \quad (3.62)$$

と与えられる. ここで, 後にフレーバー混合行列についての議論も行うため, アップタイプクォークとダウンタイプクォークについては, 反粒子での表記も掲載している.

ここで, それぞれの質量行列 M_U , M_D , M_E の, 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場の部分に対して行列を

$$P_{ij} \equiv (Y_5^U)_{ij} \cdot v_5 \quad (3.63)$$

$$Q_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(Y_{45}^U)_{ij} \cdot v_{45} \quad (3.64)$$

$$R_{ij} \equiv \frac{1}{2}(Y_5^D)_{ij} \cdot v_5 \quad (3.65)$$

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{4\sqrt{3}}(Y_{45}^D)_{ij} \cdot v_{45} \quad (3.66)$$

のように定義すると, 質量行列 M_U , M_D , M_E は

$$(M_U)_{ij} = P_{ij} - Q_{ij} \quad (3.67)$$

$$(M_D)_{ij} = (R^T)_{ij} - (S^T)_{ij} \quad (3.68)$$

$$(M_E)_{ij} = R_{ij} + 3S_{ij} \quad (3.69)$$

となる. この議論を, 同様にレプトン係数を同様に A, B, C, D, E, F とまとめ, 離散的対称性や大域的対称性を課すことで許される成分のみを残すと Georgi-Jarlskog 型の質量行列

$$M_U = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ D & 0 & F \\ 0 & F & E \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & C & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad M_E = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & -3C & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

が得られる.

3.3 スカラー粒子による陽子崩壊

次に, 45 表現ヒッグス場による陽子崩壊について考える. 式 (3.17) によって湯川相互作用項が 45 表現ヒッグス場で展開することができた. これを基に S_1 成分が寄与する陽子崩壊について考える. S_1 成分が寄与するラグランジアンは以下ようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{S_1}} = & \frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\hat{a}\alpha} (S_1^*)^{\hat{b}} [q_L]_j^{\beta\hat{c}} + (Y_1^{QL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\alpha\hat{a}} (S_1)_{\hat{a}} [\ell_L]_j^{\beta} \\ & + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (S_1^*)^{\hat{a}} [(e_R)^c]_j + (Y_1^{DU})_{ij} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} [\overline{d_R}]_{i\hat{a}} (S_1)_{\hat{b}} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.71)$$

これを陽子崩壊を議論しやすいように以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{S_1}} = & \frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\hat{c}\alpha} (S_1^*)^{\hat{a}} [q_L]_j^{\beta\hat{b}} + (Y_1^{QL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\alpha\hat{a}} (S_1)_{\hat{a}} [\ell_L]_j^{\beta} \\ & + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (S_1^*)^{\hat{a}} [(e_R)^c]_j + (Y_1^{DU})_{ij} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{i\hat{c}} (S_1)_{\hat{a}} [(u_R)^c]_{j\hat{b}} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.72)$$

また, エルミート共役部分は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \text{h.c.} = & \frac{(Y_1^{QQ*})_{ij}}{2} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon^{\alpha\beta} [\overline{q_L}]_{\beta\hat{b}}^i (S_1)_{\hat{a}} [(q_L)^c]_{\hat{c}\alpha}^j + (Y_1^{QL*})_{ij} \epsilon^{\alpha\beta} [\overline{\ell_L}]_{\beta}^i (S_1^*)^{\hat{a}} [(q_L)^c]_{\alpha\hat{a}}^j \\ & + (Y_1^{UE*})_{ij} [\overline{(e_R)^c}]^i (S_1)_{\hat{a}} [u_R]^{j\hat{a}} + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} (S_1^*)^{\hat{a}} [d_R]^{j\hat{c}} \end{aligned} \quad (3.73)$$

よって, S_1 成分の湯川相互作用項は以下のようになり, S_1 成分でまとめる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{S_1}} = & \frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\hat{c}\alpha} (S_1^*)^{\hat{a}} [q_L]_j^{\beta\hat{b}} + (Y_1^{QL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\alpha\hat{a}} (S_1)_{\hat{a}} [\ell_L]_j^{\beta} \\ & + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} (S_1^*)^{\hat{a}} [(e_R)^c]_j + (Y_1^{DU})_{ij} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{i\hat{c}} (S_1)_{\hat{a}} [(u_R)^c]_{j\hat{b}} \\ & + \frac{(Y_1^{QQ*})_{ij}}{2} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon^{\alpha\beta} [\overline{q_L}]_{\beta\hat{b}}^i (S_1)_{\hat{a}} [(q_L)^c]_{\hat{c}\alpha}^j + (Y_1^{QL*})_{ij} \epsilon^{\alpha\beta} [\overline{\ell_L}]_{\beta}^i (S_1^*)^{\hat{a}} [(q_L)^c]_{\alpha\hat{a}}^j \\ & + (Y_1^{UE*})_{ij} [\overline{(e_R)^c}]^i (S_1)_{\hat{a}} [u_R]^{j\hat{a}} + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} (S_1^*)^{\hat{a}} [d_R]^{j\hat{c}} \\ = & (S_1)_{\hat{a}} \left[\frac{(Y_1^{QQ*})_{ij}}{2} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon^{\alpha\beta} [\overline{q_L}]_{\beta\hat{b}}^i [(q_L)^c]_{\hat{c}\alpha}^j + (Y_1^{UE*})_{ij} [\overline{(e_R)^c}]^i [u_R]^{j\hat{a}} \right. \\ & \left. + (Y_1^{QL})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\alpha\hat{a}} [\ell_L]_j^{\beta} + (Y_1^{DU})_{ij} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{i\hat{c}} [(u_R)^c]_{j\hat{b}} \right] \\ & + (S_1^*)^{\hat{a}} \left[\frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\hat{c}\alpha} [q_L]_j^{\beta\hat{b}} + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(e_R)^c]_j \right. \\ & \left. + (Y_1^{QL*})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{\ell_L}]_{\beta}^{i\hat{a}} [(q_L)^c]_{\alpha\hat{a}}^j + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} \right] \end{aligned} \quad (3.74)$$

ここで、陽子崩壊を議論しやすいように再度、以下のように書き換える。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{S_1}} = & (S_1)_{\hat{a}} \left[\frac{(Y_1^{QQ*})_{kl}}{2} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon^{\gamma\delta} [\overline{q_L}]_{\delta\hat{b}}^k [(q_L)^c]_{\hat{c}\gamma}^l + (Y_1^{UE*})_{kl} [\overline{(e_R)^c}]^k [u_R]^{l\hat{a}} \right. \\
& \left. + (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^\delta + (Y_1^{DU})_{kl} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{k\hat{c}} [(u_R)^c]_{l\hat{b}} \right] \\
& + (S_1^*)_{\hat{a}} \left[\frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{(q_L)^c}]_i^{\hat{c}\alpha} [q_L]_j^{\beta\hat{b}} + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(e_R)^c]_j \right. \\
& \left. + (Y_1^{QL*})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{\ell_L}]^{i\beta} [(q_L)^c]_{\hat{a}}^{j\alpha} + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} \right] \quad (3.75)
\end{aligned}$$

さらに、 X, Y ボソンによる陽子崩壊の議論のときと同様にカレントを以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
(J_{S_1})^{\hat{a}} \equiv & \left[\frac{(Y_1^{QQ*})_{kl}}{2} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon^{\gamma\delta} [\overline{q_L}]_{\delta\hat{b}}^k [(q_L)^c]_{\hat{c}\gamma}^l + (Y_1^{UE*})_{kl} [\overline{(e_R)^c}]^k [u_R]^{l\hat{a}} \right. \\
& \left. + (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^\delta + (Y_1^{DU})_{kl} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{k\hat{c}} [(u_R)^c]_{l\hat{b}} \right] \quad (3.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(J_{S_1})_{\hat{a}}^\dagger \equiv & \left[\frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{(q_L)^c}]_i^{\hat{c}\alpha} [q_L]_j^{\beta\hat{b}} + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(e_R)^c]_j \right. \\
& \left. + (Y_1^{QL*})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{\ell_L}]^{i\beta} [(q_L)^c]_{\hat{a}}^{j\alpha} + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} \right] \quad (3.77)
\end{aligned}$$

この定義を基に、有効ラグランジアンのカレント部分は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
(J_{S_1})_{\hat{a}}^\dagger (J_{S_1})^{\hat{a}} = & \left[\frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{(q_L)^c}]_i^{\hat{c}\alpha} [q_L]_j^{\beta\hat{b}} + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(e_R)^c]_j \right. \\
& \left. + (Y_1^{QL*})_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{\ell_L}]^{i\beta} [(q_L)^c]_{\hat{a}}^{j\alpha} + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} \right] \\
& \times \left[\frac{(Y_1^{QQ*})_{kl}}{2} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon^{\gamma\delta} [\overline{q_L}]_{\delta\hat{b}}^k [(q_L)^c]_{\hat{c}\gamma}^l + (Y_1^{UE*})_{kl} [\overline{(e_R)^c}]^k [u_R]^{l\hat{a}} \right. \\
& \left. + (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^\delta + (Y_1^{DU})_{kl} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{k\hat{c}} [(u_R)^c]_{l\hat{b}} \right] \quad (3.78)
\end{aligned}$$

ここで、バリオン数を破る過程のみに着目すると

$$\begin{aligned}
(J_{S_1})_{\hat{a}}^\dagger (J_{S_1})^{\hat{a}} \Big|_{\text{BV}} = & \frac{(Y_1^{QQ})_{ij}}{2} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\alpha\beta} [\overline{(q_L)^c}]_i^{\hat{c}\alpha} [q_L]_j^{\beta\hat{b}} \times \left[(Y_1^{UE*})_{kl} [\overline{(e_R)^c}]^k [u_R]^{l\hat{a}} + (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^\delta \right] \\
& + (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(e_R)^c]_j \times (Y_1^{DU})_{kl} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{k\hat{c}} [(u_R)^c]_{l\hat{b}} \\
& + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} \times (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^\delta + \text{h.c.} \quad (3.79)
\end{aligned}$$

さらに, 後で議論する $Y_1^{QQ} \simeq 0$ の場合を考えると以下ようになる.

$$\begin{aligned}
(J_{S_1})_{\hat{a}}^{\dagger}(J_{S_1})^{\hat{a}} \Big|_{\text{BV}} &= (Y_1^{UE})_{ij} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} [(e_R)^c]_j \times (Y_1^{DU})_{kl} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{d_R}]_{k\hat{c}} [(u_R)^c]_{l\hat{b}} \\
&\quad + (Y_1^{DU*})_{ij} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} \times (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^{\delta} + \text{h.c.} \\
(J_{S_1})_{\hat{a}}^{\dagger}(J_{S_1})^{\hat{a}} \Big|_{\text{BV}} &= (Y_1^{DU})_{ij} (Y_1^{UE})_{kl} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{u_R}]_{k\hat{a}} [(e_R)^c]_l [\overline{d_R}]_{i\hat{c}} [(u_R)^c]_{j\hat{b}} \\
&\quad + (Y_1^{DU*})_{ij} (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^{\delta} + \text{h.c.} \quad (3.80)
\end{aligned}$$

これらの式を用いて, 45 表現ヒッグス場が媒介する陽子崩壊について考えていく.

第 4 章

45 表現ヒッグス場を持つ $SU(5)$ GUT のゲージ結合定数の統一

この章では, 論文 [16] に基づき, 45 表現ヒッグス場を持つ $SU(5)$ GUT のゲージ結合定数の統一について解析する.

[13] においては, 45 表現ヒッグス場を構成する粒子

$$45_H : \Phi_{45} = H^{(45)}(1, 2)_{1/2} \oplus S_1^{(45)*}(3, 1)_{-1/3} \oplus S_3^*(3, 3)_{-1/3} \oplus \tilde{S}_1(\bar{3}, 1)_{4/3} \oplus R_2^*(\bar{3}, 2)_{-7/6} \\ \oplus S_6^*(\bar{6}, 1)_{-1/3} \oplus S_8(8, 2)_{1/2} \quad (4.1)$$

の質量が縮退している場合を考えている. つまり,

$$M_{H^{(45)}} = M_{S_1^{(45)}} = M_{S_3} = M_{\tilde{S}_1} = M_{R_2} = M_{S_6} = M_{S_8} \quad (4.2)$$

として考えている.

それに対し, 本論文においては, 45 表現ヒッグス場を構成する粒子の質量が縮退しない場合について考える. 45 表現ヒッグス場を構成する粒子が異なる質量を持つ場合については, いずれかを軽い場合を考え, 粒子の数を 1 つずつ増やして考えている. また, どの粒子が異なる質量を持つかについては, GCU が実現できる 45 表現ヒッグス場の質量スペクトルから制限をかけている.

最初に, くりこみ群方程式 (RGE) による発展を用いることでゲージ結合定数の統一について調べていく. ゲージ結合定数の 1 ループ RGE を解くことで, エネルギースケール μ における発展するゲージ結合定数は次のように表される.

$$\alpha_i^{-1}(M_Z) = \alpha_i^{-1}(\mu) - \frac{1}{2\pi} \beta_i^{\text{SM}} \log\left(\frac{M_Z}{\mu}\right), \quad (4.3)$$

ここで, M_Z は Z ボソンの質量であり, β_i^{SM} は, SM におけるゲージ結合定数のベータ関数を表す. SM におけるゲージ結合定数のベータ関数に与える寄与は, 次の式を用いて計算する.

$$\beta_i^{\text{SM}} = -\frac{11}{3}C_2(G_i) + \frac{4}{3}\kappa \cdot S_2(F_i) + \frac{1}{3}\eta \cdot S_2(S_i) \quad (4.4)$$

ここで, [32] と同じ表記を使用している. 次に, 45 表現ヒッグス場を構成するスカラー粒子についての寄与を考える. この場合, ベータ関数は次のようにスカラー粒子の寄与が加わる.

$$\alpha_i^{-1}(M_Z) = \alpha_i^{-1}(\mu) - \frac{1}{2\pi} \beta_{g_i}^{\text{SM}} \log\left(\frac{M_Z}{\mu}\right) - \frac{1}{2\pi} \sum_{\phi} \beta_{g_i}^{\phi} \log\left(\frac{M_{\phi}}{\mu}\right) \quad (4.5)$$

表 4.1 45 表現ヒッグスボソンを持つ $SU(5)$ GUT における粒子のベータ関数

	SM 表現	β_3	β_2	$\beta_1 = 3/5 \cdot \beta_Y$
q_L	$(3, 2)_{1/6}$	2	3	1/5
$(u^c)_L$	$(\bar{3}, 1)_{-2/3}$	1	0	8/5
$(d^c)_L$	$(\bar{3}, 1)_{1/3}$	1	0	2/5
ℓ_L	$(1, 2)_{-1/2}$	0	1	3/5
$(e^c)_L$	$(1, 1)_1$	0	0	6/5
$H^{(5)}$	$(1, 2)_{-1/2}$	0	1/6	1/10
$S_1^{(5)*}$	$(\bar{3}, 1)_{1/3}$	1/6	0	1/15
(X_μ, Y_μ)	$(3, 2)_{-5/6}$	-7	-21/2	-35/2
Σ_8	$(8, 1)_0$	1/2	0	0
Σ_3	$(1, 3)_0$	0	1/3	0
Σ_{24}	$(1, 1)_0$	0	0	0
$H^{(45)*}$	$(1, 2)_{-1/2}$	0	1/6	1/10
$S_1^{(45)}$	$(\bar{3}, 1)_{1/3}$	1/6	0	1/15
S_3	$(\bar{3}, 3)_{1/3}$	1/2	2	1/5
$\tilde{S}_1^*$	$(3, 1)_{-4/3}$	1/6	0	16/15
R_2	$(3, 2)_{7/6}$	1/3	1/2	49/30
S_6	$(6, 1)_{1/3}$	5/6	0	2/15
S_8^*	$(8, 2)_{-1/2}$	2	4/3	4/5

ここで, ϕ を 45 表現ヒッグス場に含まれるスカラー粒子とし, $\beta_{g_i}^\phi$ を 45 表現ヒッグス場を構成するスカラー粒子の寄与を表す. また, SM の場合と同様に, 45 表現ヒッグス場の成分およびその他の粒子がベータ関数に与える寄与は, 次の式を用いて計算する.

$$\beta_i^\phi = -\frac{11}{3}C_2(G_i) + \frac{4}{3}\kappa \cdot S_2(F_i) + \frac{1}{3}\eta \cdot S_2(S_i) \quad (4.6)$$

この式を用いて, 45 表現ヒッグス場を構成するスカラー粒子の寄与を表すベータ関数は, 表 4.1 に示されている.

表 4.1 を用いて, 45 表現ヒッグス場の成分の様々な質量スペクトルで GCU を検討する. これらのベータ関数の値を代入し, 1 ループ RGE を解くことで, 次の解を得る.

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1}(M_Z) = \alpha_1^{-1}(\Lambda) - \frac{1}{2\pi} & \left[\frac{41}{10} \log \frac{M_Z}{\Lambda} + \frac{1}{15} \log \frac{M_{S_1^{(5)}}}{\Lambda} - \frac{35}{2} \log \frac{M_{XY}}{\Lambda} + \frac{1}{10} \log \frac{M_{H^{(45)}}}{\Lambda} + \frac{1}{15} \log \frac{M_{S_1^{(45)}}}{\Lambda} \right. \\ & + \frac{1}{5} \log \frac{M_{S_3}}{\Lambda} + \frac{16}{15} \log \frac{M_{\tilde{S}_1}}{\Lambda} + \frac{49}{30} \log \frac{M_{R_2}}{\Lambda} + \frac{2}{15} \log \frac{M_{S_6}}{\Lambda} \\ & \left. + \frac{4}{5} \log \frac{M_{S_8}}{\Lambda} \right] - \frac{5}{12\pi}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2^{-1}(M_Z) = \alpha_2^{-1}(\Lambda) - \frac{1}{2\pi} & \left[-\frac{19}{6} \log \frac{M_Z}{\Lambda} - \frac{21}{2} \log \frac{M_{XY}}{\Lambda} + \frac{1}{3} \log \frac{M_\Sigma}{\Lambda} + \frac{1}{6} \log \frac{M_{H^{(45)}}}{\Lambda} + 2 \log \frac{M_{S_3}}{\Lambda} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \log \frac{M_{R_2}}{\Lambda} + \frac{4}{3} \log \frac{M_{S_8}}{\Lambda} \right] - \frac{5}{12\pi}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\alpha_3^{-1}(M_Z) = \alpha_3^{-1}(\Lambda) - \frac{1}{2\pi} \left[-7 \log \frac{M_Z}{\Lambda} + \frac{1}{6} \log \frac{M_{S_1^{(5)}}}{\Lambda} - 7 \log \frac{M_{XY}}{\Lambda} + \frac{1}{2} \log \frac{M_\Sigma}{\Lambda} + \frac{1}{6} \log \frac{M_{S_1^{(45)}}}{\Lambda} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \log \frac{M_{S_3}}{\Lambda} + \frac{1}{6} \log \frac{M_{\tilde{S}_1}}{\Lambda} + \frac{1}{3} \log \frac{M_{R_2}}{\Lambda} + \frac{5}{6} \log \frac{M_{S_6}}{\Lambda} \right. \\ \left. + 2 \log \frac{M_{S_8}}{\Lambda} \right] - \frac{5}{12\pi}, \quad (4.9)$$

ここで, M_φ は粒子 φ の質量を表す. これらを用いることで GCU が Λ で実現される場合, 以下の条件が満たされる.

$$\alpha_1(\Lambda) = \alpha_2(\Lambda) = \alpha_3(\Lambda), \quad (4.10)$$

式 (4.7) から式 (4.9) より, 次の方程式が得られる. これらの方程式から, 次の 2 つの独立した方程式を導出する.

$$\alpha_1^{-1}(M_Z) - 3\alpha_2^{-1}(M_Z) + 2\alpha_3^{-1}(M_Z) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{5} \log \frac{M_{H_C}}{M_Z} - \frac{2}{5} \log \frac{M_{H^{(45)}}}{\Lambda} + \frac{2}{5} \log \frac{M_{S_1^{(45)}}}{\Lambda} \right. \\ \left. - \frac{24}{5} \log \frac{M_{S_3}}{\Lambda} + \frac{7}{5} \log \frac{M_{\tilde{S}_1}}{\Lambda} + \frac{4}{5} \log \frac{M_{R_2}}{\Lambda} \right. \\ \left. + \frac{9}{5} \log \frac{M_{S_6}}{\Lambda} + \frac{4}{5} \log \frac{M_{S_8}}{\Lambda} \right], \quad (4.11)$$

$$-5\alpha_1^{-1}(M_Z) + 3\alpha_2^{-1}(M_Z) + 2\alpha_3^{-1}(M_Z) = -\frac{1}{2\pi} \left[-42 \log \frac{M_{XY}}{M_Z} - 2 \log \frac{M_\Sigma}{M_Z} + 6 \log \frac{M_{S_3}}{\Lambda} \right. \\ \left. - 5 \log \frac{M_{\tilde{S}_1}}{\Lambda} - 6 \log \frac{M_{R_2}}{\Lambda} + \log \frac{M_{S_6}}{\Lambda} \right. \\ \left. + 4 \log \frac{M_{S_8}}{\Lambda} \right]. \quad (4.12)$$

上記の方程式では Λ が相殺されるため, それぞれの方程式は Λ に依存しない. この方程式から, GCU を実現する 45 表現ヒッグス場の成分における質量スペクトルを探索する. ここで, X, Y ゲージボソンの媒介した急速な陽子崩壊を避けるため, $M_{XY} \geq 6.0 \times 10^{15}$ GeV となる必要がある. さらに, 45 表現ヒッグス場の S_1 成分の媒介した陽子崩壊の制限を考慮すると, M_{S_1} は $\mathcal{O}(10^{10})$ GeV より大きくなければならない. 全ての 45 表現ヒッグス場の成分が縮退した質量を持つ場合, GCU の実現と陽子寿命の制限を満たすことは不可能である. したがって, 一部の 45 表現ヒッグス場の成分が他の成分よりも階層的に小さな質量を持つ場合を考える. 簡単のため, 45 表現ヒッグス場の粒子のうちで重い成分, X, Y ゲージボソン, 24 表現ヒッグス場の物理成分である $\Sigma_8, \Sigma_3, \Sigma_{24}$, 5 表現ヒッグス場のカラー成分 $S_1^{(5)}$ が縮退した質量を持つと仮定し, その質量を $\overline{M}$ と定義する.

まず, 1 つの成分のみが軽い場合を考える. GCU 条件である式 (4.12) の解が存在するが, 未知数が $\overline{M}$ と軽い成分の質量の 2 つあり, 2 つの方程式があるためである. しかし, $\overline{M}$ がプランクスケール (10^{19} GeV) を超えることが分かるため, この解は棄却する.

次に, 2 つの成分が軽い場合を考える. S_3 および S_8 の成分が軽い場合にのみ解が存在することが分かった. これは, S_3 および S_8 のベータ関数の値が大きいため, ゲージ結合定数に大きく寄与するためである. 他の軽い成分の組み合わせでは, $\overline{M}$ がプランクスケールを上回ることが確認されるため, そのような解は棄却する.

表 4.2 には, 許容される質量スペクトルの 2 つの例を示している. 質量スペクトル (1) は, $\overline{M}$ が X, Y ボソンの質量の下限である 6.0×10^{15} GeV に等しいと仮定して得られたものである. 質量スペクトル (2) は, S_8 の質量を 1 TeV より大きく取った場合に得られたものである. これは, [33] の図 7 から, S_8 の質量の実験的下限を 1 TeV と見積もったためである.

ここで, [33] の図 7 について述べる. この図は, LHC でカラー八重項スカラーが対生成され, その崩壊を通じてボトムクォークの対共鳴を生成するモードを用いて, 中性カラー八重項スカラーの質量を制限している. 本モデルでは, 中性八重項スカラーは主に 2 つのストレンジクォークに崩壊するが, [33] の図 7 の制限はこの場合にも適用可能と考える.

S_8 の質量は $\overline{M}$ を増加させれば低下することに注意する. したがって, GCU を実現するためには, $\overline{M}$ を $\overline{M} < 9.0 \times 10^{15}$ GeV にする必要があると結論づける.

表 4.2 S_3 および S_8 が軽い場合に GCU 条件を満たす 45 表現ヒッグス場の成分および他の GUT 粒子の質量スペクトル

	M_{XY}	M_{H_C}	M_Σ	$M_{H^{(45)}}$	$M_{S_1^{(45)}}$	M_{S_3}	$M_{\tilde{S}_1}$	M_{R_2}	M_{S_6}	M_{S_8}
(1)	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	8.9×10^7	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	2.5×10^4
(2)	9.0×10^{15}	9.0×10^{15}	9.0×10^{15}	9.0×10^{15}	9.0×10^{15}	7.6×10^7	9.0×10^{15}	9.0×10^{15}	9.0×10^{15}	1.0×10^3

図 4.1 では, 表 4.2 に示された質量スペクトルに対するゲージ結合定数のエネルギー依存性を示す. この図から, 2 つの軽い成分の存在により GCU が可能であることが明らかである.

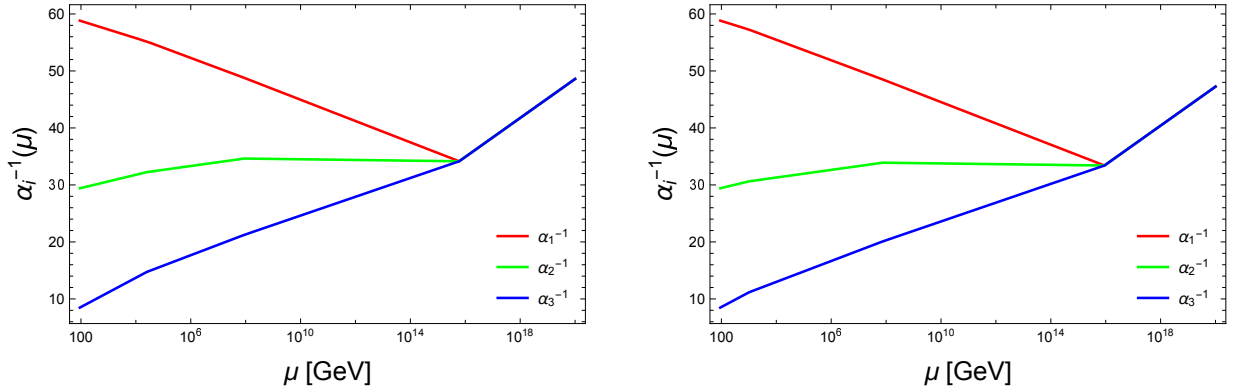


図 4.1 2 つの軽い成分を持つ 45 表現ヒッグス場で GCU を実現するゲージ結合定数のエネルギー依存性. 左図は質量スペクトル (1), 右図は質量スペクトル (2) に対応する.

一般に, 2 つの成分 S_3 と S_8 が軽い場合, GCU 条件である式 (4.12) には無限の解が存在する. これは, 未知数が $\overline{M}$, M_{S_3} , M_{S_8} の 3 つであり, 方程式が 2 つしかないためである. この場合, GCU 条件を満たす解は, 3 つの未知数のうち 2 つで定義される平面上に直線を形成する.

図 4.2 には, GCU 条件の解をそれぞれ $\overline{M} - M_{S_8}$, $\overline{M} - M_{S_3}$, $M_{S_8} - M_{S_3}$ 平面上にプロットしている.

表 4.3 S_3 , S_8 , S_1 の成分が軽い場合に GCU 条件を満たす 45 表現ヒッグス場の成分の質量スペクトル

	M_{XY}	M_{H_C}	M_Σ	$M_{H^{(45)}}$	$M_{S_1^{(45)}}$	M_{S_3}	$M_{\tilde{S}_1}$	M_{R_2}	M_{S_6}	M_{S_8}
(1)	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	1.0×10^{13}	5.8×10^7	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	6.0×10^{15}	4.7×10^4
(2)	8.2×10^{15}	8.2×10^{15}	8.2×10^{15}	8.2×10^{15}	1.0×10^{12}	5.0×10^7	8.2×10^{15}	8.2×10^{15}	8.2×10^{15}	4.2×10^4

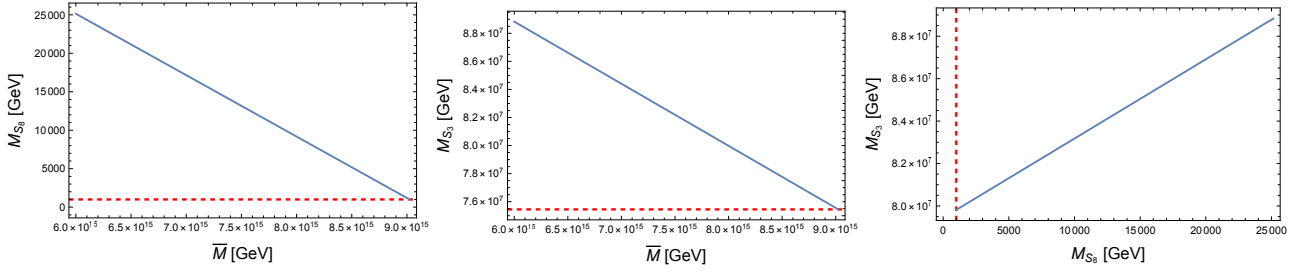


図 4.2 青色の実線は GCU 条件の解を示す. 左図では, $\overline{M} - M_{S_8}$ 平面での解, 中央図では $\overline{M} - M_{S_3}$ 平面での解, 右図では $M_{S_8} - M_{S_3}$ 平面での解を示す. 赤色の破線は, S_8 の質量が 1 TeV より大きくなければならないという LHC による制限を表す.

次に, 45 表現ヒッグス場の成分のうち 3 つが軽い場合を考える. 2 つの成分が軽い場合と同様に, GCU 条件を満たすために S_3 および S_8 が軽くなる傾向がある. ここでは, S_1, S_3, S_8 が軽い場合に注目する. S_1 が軽い場合には急速な陽子崩壊を引き起こす可能性があるため, GCU 条件に加えて陽子崩壊の実験からも制限を得ることができる. 次節では, S_1 成分が媒介した陽子崩壊について議論する. 表 4.3 には, S_1, S_3, S_8 が軽く, GCU 条件を満たす質量スペクトルの 2 つの例を示している. 図 4.3 では, 表 4.3 に示された質量スペクトルに対するゲージ結合定数のエネルギー依存性を示している. 図から, 3 つの軽い成分の存在により GCU がうまく実現されていることが明らかである.

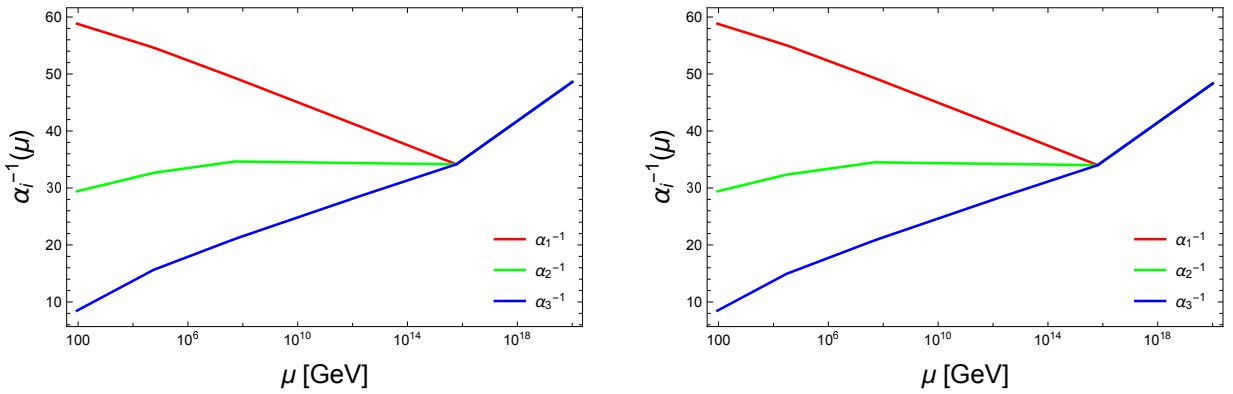


図 4.3 ゲージ結合定数のエネルギー依存性を示し, 45 表現ヒッグスの 3 つの軽い成分で GCU を実現する質量スペクトル (1) を左図, 質量スペクトル (2) を右図に描いている.

また次の章で, 図 5.2 において, 3 つの軽い成分を含む場合において GCU が実現され, 陽子崩壊の実験的制限が満たされる領域を $\overline{M} - M_{S_1}$ を図示する. この図には陽子崩壊の解析が必要なため, 陽子崩壊を議論した後で図示を行う.

第 5 章

45 表現ヒッグス場を含んだ $SU(5)$ GUT での陽子崩壊

この章では, 論文 [16],[19] に基づき, 45 表現ヒッグス場を持つ $SU(5)$ GUT での陽子崩壊について 45 表現ヒッグス場が第 2 世代のみと相互作用する場合と全ての世代で相互作用する場合について解析する.

5.1 45 表現ヒッグス場が第 2 世代のみと相互作用する場合の陽子崩壊

この章では, S_1 成分の媒介した陽子崩壊に焦点を当てる. 陽子崩壊の部分崩壊幅および湯川結合や S_1 成分の質量といったモデルパラメータへの依存性を詳細に調べる. 45 表現ヒッグス場の成分のうち, 陽子崩壊に寄与するのは S_1 成分のみである [34, 35]. S_1 成分による陽子崩壊を考えると, 有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{g_5^2}{2m_X^2}(J_X)^\dagger_\rho(J_X)^\rho - \frac{g_5^2}{2m_Y^2}(J_Y)^\dagger_\rho(J_Y)^\rho - \frac{1}{2m_{S_1}^2}(J_{S_1})^\dagger_{\hat{a}}(J_{S_1})^{\hat{a}} \quad (5.1)$$

と与えられ, S_1 成分の寄与が追加される. ここで, $m_{S_1} \ll m_X, m_Y$ の場合を考える有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \simeq -\frac{1}{2m_{S_1}^2}(J_{S_1})^\dagger_{\hat{a}}(J_{S_1})^{\hat{a}} \quad (5.2)$$

となる. つまり, S_1 成分の質量が GUT スケールを下回る場合, S_1 成分が寄与する図 5.1 に示すダイアグラムから急速な陽子崩壊を引き起こす可能性がある. そのため, 本模型が陽子寿命の制限を満たさないような陽子崩壊を引き起こさないかを確認する必要がある.

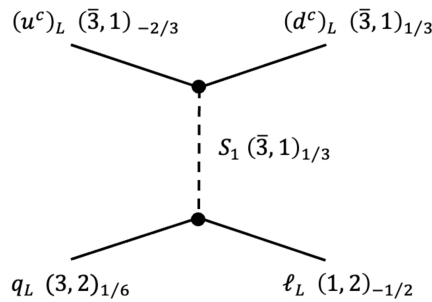


図 5.1 45 表現ヒッグスボソン内の S_1 成分が媒介する陽子崩壊のファインマンダイアグラム

45 表現ヒッグス場の $S_1^{(45)}$ 成分は, 5 表現ヒッグス場の $S_1^{(5)}$ 成分と混合する.

$$\begin{pmatrix} H_C \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_S & e^{-i\delta_S} s_S \\ -e^{i\delta_S} s_S & c_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{(5)} \\ S_1^{(45)} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

ここで, 5 表現ヒッグス場を構成するカラーヒッグス $S_1^{(5)}$ が GUT スケール付近の質量を持ち, 軽い質量固有状態 S_1 が主に $S_1^{(45)}$ から構成される. $S_1^{(5)}$ と $S_1^{(45)}$ の混合角である θ_S は以下のように近似すると

$$\theta_S \sim \frac{m_{S_1^{(45)}}^2}{m_{S_1^{(5)}}^2} \ll 1 \quad (5.4)$$

となり, 混合角 θ_S が非常に小さくなる. これによって, 本解析では陽子崩壊の解析においてこの混合が無視できる程度に, 45 表現 および 5 表現ヒッグス場の混合項が十分に小さいと仮定する.

次に, 45 表現ヒッグス場に含まれる S_1 成分が媒介した陽子崩壊の部分幅を見積もる. S_1 成分は, 45 表現ヒッグス場との湯川結合 Y_{45} を通じてクォークやレプトンと結合する. したがって, Y_{45} を見積もる必要がある. 前章で見たように, 45 表現ヒッグス場が第 2 世代のフェルミオンにのみ結合することを仮定しており, Georgi-Jarlskog 型の質量行列が次のように与えられる [13].

$$M_U = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ D & 0 & F \\ 0 & F & E \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & C & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad M_E = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & -3C & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

さらに, 観測されたフェルミオンの質量階層を実現するために, これらの質量行列を階層構造を持つように次のように近似する.

$$M_U \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^6 & 0 \\ \lambda^6 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v, \quad M_D \sim M_E \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v, \quad (5.6)$$

ここで, λ は Wolfenstein パラメータを表し, $\lambda \simeq 0.22$ となる. また, ここでは $\mathcal{O}(1)$ の係数は省略している. 真空期待値 v は, 5 表現ヒッグス場の真空期待値 v_5 と 45 表現ヒッグス場の真空期待値 v_{45} により以下の関係を満たす.

$$v^2 = v_{45}^2 + v_5^2 \quad (5.7)$$

これらを用いることで近似した質量行列は次のように対角化される.

$$M_U \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^6 & 0 \\ \lambda^6 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v, \quad (5.8)$$

$$M_D \sim M_E \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v. \quad (5.9)$$

ここで, 左側および右側の対角化行列は, フェルミオンの質量固有状態と, 45 表現ヒッグス場が第 2 世代のフェルミオンにのみ結合するフレーバー基底とを結びつけるフレーバー混合行列としてみなすことができる. また, これらの対角化行列を用いることで, S_1 成分とクォークまたはレプトンが寄与する相互作用におけるフレーバー混合の大きさを考えることができる.

これらの議論を基に S_1 成分を媒介する陽子崩壊について議論する. 今回の場合は, $Y_{45}^U = 0$ の場合で考えるため, 陽子崩壊に寄与する過程は

$$(J_{S_1})_a^\dagger (J_{S_1})^{\hat{a}} \Big|_{\text{BV}} = \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\gamma\delta} \left[\overline{(u_R)^c} \right]^{i\hat{b}} (Y_1^{DU*})_{ij} [d_R]^{j\hat{c}} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_k^{\gamma\hat{a}} (Y_1^{QL})_{kl} [\ell_L]_l^\delta + \text{h.c.} \quad (5.10)$$

のみとなる. ここで, 2つの湯川行列を δ^L として, 以下のように

$$\delta_{ijk}^L = (Y_1^{DU*})_{ij} (Y_1^{QL})_{kl} \quad (5.11)$$

と定義して考える. S_1 成分を媒介する陽子崩壊を展開して, それぞれの場からのフレーバー混合行列を考える. この場合, 展開すると

$$\begin{aligned} (J_{S_1})_{\hat{a}}^\dagger (J_{S_1})_{\hat{a}} \Big|_{\text{BV}} &= \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\gamma\delta} \left[\overline{(u_R)^c} \right]^{i\hat{b}} (Y_1^{DU*})_{ij} [d_R]^{j\hat{c}} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_k^{\gamma\hat{a}} (Y_1^{QL})_{kl} [\ell_L]_l^\delta + \text{h.c.} \\ &= \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \left[\overline{(u_R)^c} \right]^{i\hat{b}} (Y_1^{DU*})_{ij} [d_R]^{j\hat{c}} \left[\overline{(u_L)^c} \right]_k^{\hat{a}} (Y_1^{QL})_{kl} [e_L]_l \\ &\quad - \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \left[\overline{(u_R)^c} \right]^{i\hat{b}} (Y_1^{DU*})_{ij} [d_R]^{j\hat{c}} \left[\overline{(d_L)^c} \right]_k^{\hat{a}} (Y_1^{QL})_{kl} [\nu_{eL}]_l + \text{h.c.} \\ &= \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{a}} \left[\overline{(u_R)^c} \right]^{i\hat{b}} (Y_1^{DU*})_{ij} [d_R]^{j\hat{c}} \left[\overline{(u_L)^c} \right]_k^{\hat{a}} (Y_1^{QL})_{kl} [e_L]_l \\ &\quad + \epsilon_{\hat{c}\hat{b}\hat{a}} \left[\overline{(u_R)^c} \right]^{i\hat{b}} (Y_1^{DU*})_{ij} [d_R]^{j\hat{c}} \left[\overline{(d_L)^c} \right]_k^{\hat{a}} (Y_1^{QL})_{kl} [\nu_{eL}]_l + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (5.12)$$

となる. 今回の場合では, 45 表現ヒッグス場のみが陽子崩壊を引き起こすと考えるので, Y_1^{QL} , Y_1^{DU} は, 45 表現ヒッグス場の部分のみの寄与を考えれば良いので

$$Y_1^{QL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-e^{-i\delta_S} s_S Y_5^D + \frac{1}{2\sqrt{2}} c_S Y_{45}^D \right) V_{DL} \propto Y_{45}^D \quad (5.13)$$

$$Y_1^{DU} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\delta_S} s_S Y_5^D + \frac{1}{2\sqrt{2}} c_S Y_{45}^D \right)^T V_{QU} \propto (Y_{45}^D)^T \quad (5.14)$$

となる. 陽子崩壊の過程はラグランジアン of 湯川相互作用項の組み合わせで書かれる. 陽子崩壊に寄与する Y_1^{QL} , Y_1^{DU} に対してフレーバー混合行列を考慮することは, ラグランジアン of 湯川相互作用項を Y_{45}^D で書き換え, フレーバー混合行列を考慮することと等価である. ここで, フレーバー混合行列については付録 A の表記に基づく. また, ラグランジアンでは, S_1 を $S_1^{(45)}$ で展開すると以下のようなになる.

$$-\mathcal{L}_Y = \frac{1}{2} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \left[(Y_{45}^D)^T \right]_{ij} (V_{QU})_j^l (S_1^{(45)})_{\hat{b}} [(u_R)^c]_{l\hat{c}} + \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\alpha\hat{a}} (Y_{45}^D)_{ij} (V_{DL})_j^l (S_1^{(45)})_{\hat{a}} [\ell_L]_l^\beta \quad (5.15)$$

最初に第 1 項について書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d_R} \right]_{i\hat{a}} \left[(Y_{45}^D)^T \right]_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{b}} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d'_R} \right]_{i\hat{a}} V_{d_R} \left[(Y_{45}^D)^T \right]_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{b}} V_{(u_R)^c} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \left[\overline{d'_R} \right]_{i\hat{a}} \left[V_{d_R} (Y_{45}^D)^T V_{(u_R)^c} \right]_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{b}} [(u_R)^c]_{j\hat{c}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

となり, 湯川相互作用項の部分はそれぞれのフレーバーのフレーバー混合行列を考慮する. 式 (5.8) およ

び式 (5.9) から得られる対角化行列と, $C \sim \lambda^2$ の推定値から, 湯川結合行列は次のように推定される.

$$\begin{aligned}
 V_{d_R}(Y_{45}^D)^T V_{(u_R)^c} &= V_{d_R}^T (Y_{45}^D)^T V_{(u_R)^c}^T \\
 &= \left[V_{(u_R)^c} \cdot Y_{45}^D \cdot V_{d_R} \right]^T \\
 &= \left[\frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^T \\
 &= \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^3 & \lambda^5 \\ \lambda^4 & \lambda^2 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

次に, 第 2 項についても同様にして湯川相互作用項の部分にフレーバー混合行列を考慮すると

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\overline{(q_L)^c} \right]_i^{\alpha\hat{a}} (Y_{45}^D)_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{a}} [\ell_L]_j^\beta \\
 &= \frac{1}{4} \left[\overline{(u_L)^c} \right]_i^{\hat{a}} (Y_{45}^D)_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{a}} [e_L]_j - \frac{1}{4} \left[\overline{(d_L)^c} \right]_i^{\hat{a}} (Y_{45}^D)_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{a}} [\nu_{eL}]_j \\
 &= \frac{1}{4} \left[\overline{(u'_L)^c} \right]^{i\hat{a}} V_{(u_L)^c} (Y_{45}^D)_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{a}} V_{eL} [e'_L]_j - \frac{1}{4} \left[\overline{(d'_L)^c} \right]_i^{\hat{a}} V_{(d_L)^c} (Y_{45}^D)_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{a}} V_{\nu_{eL}} [\nu'_{eL}]_j \\
 &= \frac{1}{4} \left[\overline{(u'_L)^c} \right]^{i\hat{a}} \left[V_{(u_L)^c} Y_{45}^D V_{eL} \right]_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{a}} [e'_L]_j - \frac{1}{4} \left[\overline{(d'_L)^c} \right]_i^{\hat{a}} \left[V_{(d_L)^c} Y_{45}^D V_{\nu_{eL}} \right]_{ij} (S_1^{(45)})_{\hat{a}} [\nu'_{eL}]_j \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 計算を行っていくことで荷電レプトンまたはニュートリノが寄与する場合で湯川結合行列は, 同様にして次のように得られる.

$$V_{(u_L)^c} Y_{45}^D V_{eL} = \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$V_{(u_L)^c} Y_{45}^D V_{\nu_{eL}} = \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

と与えられる.

これらのフレーバー混合行列を考慮した湯川結合行列を用いて, 陽子崩壊に寄与する δ^L を計算する. まず, 崩壊過程にニュートリノが寄与しない場合について考える. この場合の δ_{ijkl}^L は,

$$\begin{aligned}
 \delta_{ijkl}^L &= (Y_1^{DU*})_{ij} (Y_1^{QL})_{kl} = \left[V_{d_R} (Y_{45}^D)^T V_{(u_R)^c} \right]_{ij} \left[V_{(u_L)^c} Y_{45}^D V_{eL} \right]_{kl} \\
 &= \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^3 & \lambda^5 \\ \lambda^4 & \lambda^2 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{v}{v_{45}} \right)^2 \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^3 & \lambda^5 \\ \lambda^4 & \lambda^2 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

また, ニュートリノが崩壊過程に寄与する場合には, δ_{ijkl}^L は

$$\begin{aligned}\delta_{ijkl}^L &= (Y_1^{DU*})_{ij} (Y_1^{QL})_{kl} = [V_{dR} (Y_{45}^D)^T V_{(uR)^c}]_{ij} [V_{(uL)^c} Y_{45}^D V_{\nu eL}]_{kl} \\ &= \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^3 & \lambda^5 \\ \lambda^4 & \lambda^2 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{v}{v_{45}} \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{v}{v_{45}} \right)^2 \begin{pmatrix} \lambda^5 & \lambda^3 & \lambda^5 \\ \lambda^4 & \lambda^2 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)\end{aligned}$$

となる. これらを用いて陽子崩壊の部分崩壊幅を求めていく.

上記の δ_{ijkl}^L の推定値を利用して, S_1 成分の媒介する陽子崩壊の部分幅を計算する. 実験によって比較的厳しく制限されているため, 表 5.1 にリストされた 6 つの崩壊モードに注目する. 部分幅は次のように計算される [21]-[23].

$$\Gamma(p \rightarrow \mu^+ K^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} (1 + D - F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{|\delta_{2112}^L|^2}{M_{S_1}^4} \quad (5.23)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \mu^+ \pi^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \frac{1}{2} (1 + D + F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{|\delta_{1112}^L|^2}{M_{S_1}^4} \quad (5.24)$$

$$\Gamma(p \rightarrow e^+ K^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} (1 + D - F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{|\delta_{2111}^L|^2}{M_{S_1}^4} \quad (5.25)$$

$$\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \frac{1}{2} (1 + D + F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{|\delta_{1111}^L|^2}{M_{S_1}^4} \quad (5.26)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \bar{\nu} K^+) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} \left| \delta_{2111}^L \frac{2D}{3} + \delta_{1122}^L \left(1 + \frac{D}{3} + F\right) \right|^2 \quad (5.27)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} (1 + D + F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{|\delta_{1111}^L|^2}{M_{S_1}^4} \quad (5.28)$$

陽子崩壊に荷電レプトンが寄与する場合には式 (5.21), ニュートリノが寄与する場合には式 (5.22) を用いる. 部分崩壊幅は以下のように与えられる.

$$\Gamma(p \rightarrow \mu^+ K^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} (1 + D - F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} (\lambda^4 \cdot \lambda^4)^2 \left(\frac{v}{v_{45}}\right)^4, \quad (5.29)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \mu^+ \pi^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \frac{1}{2} (1 + D + F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} (\lambda^5 \cdot \lambda^4)^2 \left(\frac{v}{v_{45}}\right)^4, \quad (5.30)$$

$$\Gamma(p \rightarrow e^+ K^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} (1 + D - F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} (\lambda^4 \cdot \lambda^5)^2 \left(\frac{v}{v_{45}}\right)^4, \quad (5.31)$$

$$\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \frac{1}{2} (1 + D + F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} (\lambda^5 \cdot \lambda^5)^2 \left(\frac{v}{v_{45}}\right)^4, \quad (5.32)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \bar{\nu} K^+) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} \left\{ \lambda^4 \cdot \lambda^3 \frac{2D}{3} + \lambda^5 \cdot \lambda^2 \left(1 + \frac{D}{3} + F\right) \right\}^2 \left(\frac{v}{v_{45}}\right)^4, \quad (5.33)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} (1 + D + F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} (\lambda^5 \cdot \lambda^3)^2 \left(\frac{v}{v_{45}}\right)^4, \quad (5.34)$$

ここで, m_p, m_K, m_π, M_{S_1} はそれぞれ陽子, K 中間子, π 中間子, S_1 成分の質量を示す. また, f は π 中間子の崩壊定数, D, F はバリオンのカイラルラグランジアンのパラメータを示す. さらに, α_H はハドロ

ンの形状因子, A_{RL} は次元 6 の演算子に対するくりこみ群方程式によるエネルギー依存性を考慮した値とする. m_p, m_K, m_π については Particle Data Group [24] の値を使用し, $D = 0.80$, $F = 0.46$, $f = 0.093$ GeV の値を用いる. α_H については, [25] の結果を用い, $\alpha_H(2 \text{ GeV}) = -0.0144 \text{ GeV}^3$ とする. また, 陽子崩壊演算子の有効結合定数に対する 1 ループ RGE を解くことで A_{RL} を評価し, $A_{RL} = 2.6$ の値を得た.

Super-Kamiokande [7], [27], [28], [29], [30] によって設定された陽子寿命の制限から S_1 成分の質量に対する制限を求めていく. 現在の陽子寿命の実験的制限と各モードに対して得られた質量の下限は表 5.1 にまとめている. また, λ の因子の部分幅への依存性についても示す. この解析では, $v/v_{45} = \sqrt{2}$ に固定している. しかし, トップクォークの湯川結合は 5 表現ヒッグス場の結合からのみ生じるため, v/v_5 によって増強される. GUT スケール以下で RG 発展によりトップクォークの湯川結合が非摂動的にならないようにするためには $v/v_5 \lesssim \sqrt{2}$ である必要があるため, $v/v_{45} \gtrsim \sqrt{2}$ となる. したがって, $v/v_{45} = \sqrt{2}$ とすることにより S_1 成分の質量に対する最も穏やかな制限が得られる.

表 5.1 90% CL における陽子部分寿命の制限から得られる S_1 成分の質量の下限

崩壊モード	$p \rightarrow \mu^+ K^0$	$p \rightarrow \mu^+ \pi^0$	$p \rightarrow e^+ K^0$	$p \rightarrow e^+ \pi^0$	$p \rightarrow \bar{\nu} K^+$	$p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+$
部分幅	$\propto (\lambda^8)^2$	$\propto (\lambda^9)^2$	$\propto (\lambda^9)^2$	$\propto (\lambda^{10})^2$	$\propto (\lambda^7)^2$	$\propto (\lambda^8)^2$
90% CL bound [years]	3.6×10^{33}	1.6×10^{34}	1.0×10^{33}	2.4×10^{34}	5.9×10^{33}	3.9×10^{32}
質量の下限 [GeV]	1.1×10^{13}	9.5×10^{12}	3.7×10^{12}	4.9×10^{12}	3.4×10^{13}	9.5×10^{12}

表 5.1 から, $p \rightarrow \bar{\nu} K^+$ モードが S_1 成分の質量に対して最も厳しい制限を課し, その下限は $M_{S_1} > 3.4 \times 10^{13} \text{ GeV}$ であることが分かる.

図 5.2 では, 3 つの軽い成分を持つ場合において GCU が実現され, 陽子寿命の制限が満たされる領域を $\overline{M} - M_{S_1}$ 平面上に図示している. このとき, $\overline{M}$ は S_1, S_3, S_8 を除いた 45 表現ヒッグス場の粒子, X, Y ゲージボソン, 24 表現ヒッグス場の物理成分である $\Sigma_8, \Sigma_3, \Sigma_{24}$, 5 表現ヒッグス場のカラー成分 $S_1^{(5)}$ が縮退した質量とする. 緑色の領域が許される範囲を示している. 破線は, 表 5.1 に示される様々な陽子崩壊モードから得られる M_{S_1} に対する制限に対応している. 色付き領域の左側は, X, Y ゲージボソンの媒介した陽子崩壊の制限により除外されており, 右側は M_{S_8} が LHC によって設定された現在の下限を下回るために除外されている.*¹

*¹ 水平線の上側の領域, $M_{S_1} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$ より上の領域は, S_1 成分の質量がプランクスケールを超えるため除外される.

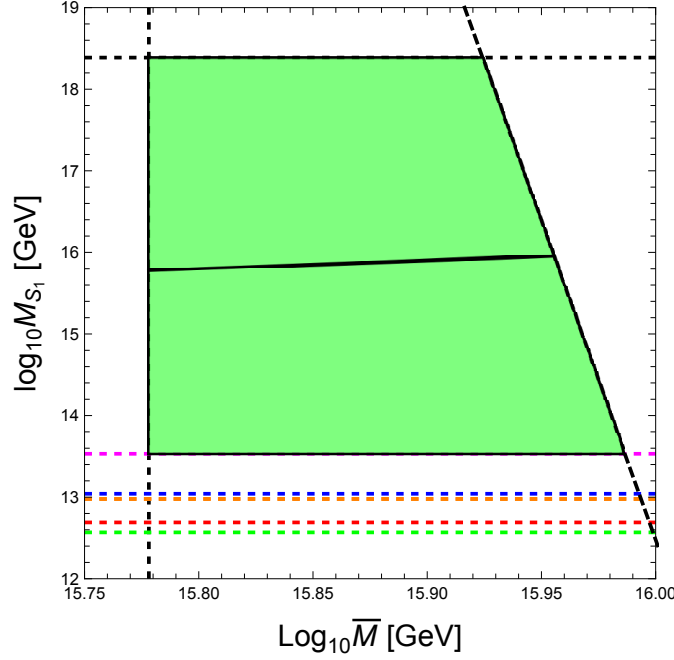


図 5.2 45 表現ヒッグス場の 3 つの成分が軽い場合において、GCU が実現し陽子寿命の制限を満たす $\overline{M} - M_{S_1}$ 平面上の領域を示す。色付きの領域が許される範囲である。破線は表 5.1 の各陽子崩壊モードから得られる M_{S_1} の制限を表し、そのうち $p \rightarrow \bar{\nu} K^+$ モードが最も厳しい制限を与え、 $M_{S_1} > 3.4 \times 10^{13}$ GeV という制限が課される。色付きの領域の左側は X, Y ゲージボソンの媒介した陽子崩壊の制限により除外され、右側は M_{S_8} が LHC によって設定された現在の下限を下回るため除外される。上側は、 M_{S_1} のプランクスケールの制限であり、中央線は $\overline{M} = M_{S_1}$ を示す。

5.2 45 表現ヒッグスが全ての世代と相互作用する場合の陽子崩壊

45 表現ヒッグス場の S_1, S_3 , および S_8 の成分が GUT スケールよりも大幅に軽い場合、 S_1 成分と S_3 成分を媒介して陽子崩壊が引き起こされる。[16] で議論されているように、 S_3 成分の媒介した陽子崩壊は、 S_3 成分とクォークおよびレプトンとの相互作用を表す湯川結合 Y_3^{QQ} と Y_3^{QL} の存在によって厳しい制限が課される。これらの湯川結合は陽子崩壊の不変散乱振幅に直接寄与する。

陽子崩壊の探索による実験的制限、特に $p \rightarrow e^+ \pi^0$ の過程に対する制限は、これらの湯川結合の積に次のような制限を課す。

$$\left| (Y_3^{QQ})_{12} (Y_3^{QL})_{11} \right| < 10^{-17} s_H, \quad (5.35)$$

ここで、 $M_{S_3} = 5 \times 10^7$ GeV の場合には、GUT と SM の湯川結合の整合条件（式 (3.18)）を適用する。

$$\left| \frac{1}{2} (Y_{45}^U)_{12} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} (Y_{45}^D V_{DL})_{11} \right) \right| < 10^{-17} s_H \quad (5.36)$$

さらに、 Y_3^{QL} を構成する $Y_{45}^D V_{DL}$ が $(1, 1)$ 成分であるので以下のように考えることができる。

$$\left| (Y_{45}^D V_{DL})_{11} \right| \approx \frac{M_D}{v} = \frac{4 \times 10^6 \text{ eV}}{246 \times 10^9 \text{ eV}} \approx 10^{-5} \quad (5.37)$$

この値を用いることで、 $p \rightarrow e^+ \pi^0$ の過程に対する制限を 45 表現ヒッグス場に関連する GUT 湯川結合に変換できる。

$$\left| (Y_{45}^U)_{12} \right| < 10^{-12} s_H \quad (5.38)$$

次に, S_3 成分が媒介した陽子崩壊率を抑制し, 実験的な制限を満たすために, GUT 湯川結合 Y_{45}^U を GUT スケールで禁止する仮定を採用する ([18] での方法を採用する). つまり, GUT スケールで $Y_{45}^U = 0$ を仮定する.

$$Y_3^{QQ} = \frac{1}{2} Y_{45}^U \quad (5.39)$$

よって, 式 (3.18) より GUT スケールで $Y_3^{QQ} = 0$ となる. さらに, Y_3^{QQ} は S_1 成分を含む 1 ループ RGE を確認する.

$$\begin{aligned} \beta_{Y_3^{QQ}} = & -Y_3^{QQ} \left(8g_3^2 + \frac{9}{2}g_2^2 + \frac{1}{10}g_1^2 \right) \\ & + \frac{1}{2}(Y_U)^T Y_U^* Y_3^{QQ} + \frac{1}{2}(Y_D)^T Y_D^* Y_3^{QQ} + \frac{1}{2}Y_3^{QL} Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QQ} + (Y_3^{QQ})^T Y_3^{QQ*} Y_3^{QQ} \\ & + 3(Y_3^{QQ})^T Y_3^{QQ*} Y_3^{QQ} + \frac{3}{2}Y_3^{QL} Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QQ} + \frac{8}{3}(Y_8^{UQ})^T Y_8^{UQ*} Y_3^{QQ} + \frac{8}{3}(Y_8^{DQ})^T Y_8^{DQ*} Y_3^{QQ} \\ & + \frac{1}{2}Y_3^{QQ} Y_U^\dagger Y_U + \frac{1}{2}Y_3^{QQ} Y_D^\dagger Y_D + \frac{1}{2}Y_3^{QQ} Y_1^{QL*} (Y_1^{QL})^T + Y_3^{QQ} Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QQ} \\ & + 3Y_3^{QQ} Y_3^{QQ\dagger} Y_3^{QQ} + \frac{3}{2}Y_3^{QQ} Y_3^{QL*} (Y_3^{QL})^T + \frac{8}{3}Y_3^{QQ} Y_8^{UQ\dagger} Y_8^{UQ} + \frac{8}{3}Y_3^{QQ} Y_8^{DQ\dagger} Y_8^{DQ} \\ & + Y_3^{QQ} \cdot \text{tr} \left(2Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QL} + 2Y_3^{QQ\dagger} Y_3^{QQ} \right) \\ & - 2Y_1^{QQ} Y_3^{QL*} (Y_1^{QL})^T + 2Y_1^{QL} Y_3^{QL\dagger} Y_1^{QQ} + 2Y_3^{QQ} Y_3^{QL*} (Y_3^{QL})^T + 2Y_3^{QL} Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QQ} \end{aligned} \quad (5.40)$$

この式から, 頂点補正 $\Gamma_{Y_3^{QQ}}$ の部分から Y_3^{QQ} に比例しない項が現れ, Y_{45}^U が GUT スケールで禁止された場合でも, Y_3^{QQ} が S_1 成分を含む 1 ループ RGE 効果によって生成される可能性がある. ここで, Y_3^{QQ} の 1 ループベータ関数の対応する項に着目すると Y_3^{QQ} に比例しない項は $(Y_1^{QL})(Y_3^{QL})^*(Y_1^{QQ})$ の積に比例している.

ここで, S_1 成分が主に 45 次元のヒッグス場 S_1^{SM} から構成されると仮定しているため, Y_1^{QQ} は小さな混合角 θ_S によって大幅に抑制される. $\theta_S \ll 1$ となっていることを用いて Y_1^{QQ} を考える.

$$Y_1^{QQ} = -\frac{1}{2} e^{i\delta_S} \cdot \sin \theta_S \cdot Y_5^U \simeq -\frac{1}{2} e^{i\delta_S} \cdot \theta_S \cdot Y_5^U \longrightarrow 0 \quad (\because \theta_S \ll 1) \quad (5.41)$$

したがって, Y_3^{QQ} への 1 ループ寄与は無視でき, 陽子崩壊率が十分に抑制されることが保証される. この仮定を用いると, 拡張された GUT モデルの枠組み内で現実的なフェルミオンの質量と混合を再現することが可能である. この解析でも S_1 成分が媒介される陽子崩壊に焦点を当てる. 陽子崩壊の過程は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} (J_{S_1})_{\hat{a}}^\dagger (J_{S_1})_{\hat{a}} \Big|_{\text{BV}} = & (Y_1^{DU})_{ij} (Y_1^{UE})_{kl} \epsilon^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} [\overline{u_R}]_{k\hat{a}} [(e_R)^c]_l [\overline{d_R}]_{i\hat{c}} [(u_R)^c]_{j\hat{b}} \\ & + (Y_1^{DU*})_{ij} (Y_1^{QL})_{kl} \epsilon_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \epsilon_{\gamma\delta} [\overline{(u_R)^c}]^{i\hat{b}} [d_R]^{j\hat{c}} [\overline{(q_L)^c}]_k^{\gamma\hat{a}} [\ell_L]_l^\delta + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (5.42)$$

ただし, $\theta_S \ll 1$ より $Y_1^{QQ} \simeq 0$ となるため, Y_1^{QQ} の寄与する過程は無視している. これらの過程の部分崩壊幅は, 前節と同様に, 有効ラグランジアンを用いて, 関連するハドロン行列要素および形状因子を考慮

して次のように計算される [23].

$$\Gamma(p \rightarrow \mu^+ K^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} A_{RL}^2 \left\{ (1 + D - F)^2 \alpha_H^2 \frac{|\delta_{2112}^L|^2}{M_{S_1}^4} + (1 - D + F)^2 \beta_H^2 \frac{|\delta_{2112}^R|^2}{M_{S_1}^4} \right\}, \quad (5.43)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \mu^+ \pi^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \frac{1}{2} (1 + D + F)^2 A_{RL}^2 \left\{ \alpha_H^2 \frac{|\delta_{1112}^L|^2}{M_{S_1}^4} + \beta_H^2 \frac{|\delta_{1112}^R|^2}{M_{S_1}^4} \right\}, \quad (5.44)$$

$$\Gamma(p \rightarrow e^+ K^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} A_{RL}^2 \left\{ (1 + D - F)^2 \alpha_H^2 \frac{|\delta_{2111}^L|^2}{M_{S_1}^4} + (1 - D + F)^2 \beta_H^2 \frac{|\delta_{2111}^R|^2}{M_{S_1}^4} \right\}, \quad (5.45)$$

$$\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \frac{1}{2} (1 + D + F)^2 A_{RL}^2 \left\{ \alpha_H^2 \frac{|\delta_{1111}^L|^2}{M_{S_1}^4} + \beta_H^2 \frac{|\delta_{1111}^R|^2}{M_{S_1}^4} \right\}, \quad (5.46)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \bar{\nu} K^+) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{1}{M_{S_1}^4} \left| \frac{2D}{3} \delta_{2111}^L + \left(1 + \frac{D}{3} + F\right) \delta_{1122}^L \right|^2, \quad (5.47)$$

$$\Gamma(p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+) = \frac{1}{64\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \frac{m_p}{f^2} (1 + D + F)^2 \alpha_H^2 A_{RL}^2 \frac{|\delta_{1111}^L|^2}{M_{S_1}^4}, \quad (5.48)$$

また、フェルミオンの湯川結合を表す混合パラメータ $\delta_{ijkl}^{L,R}$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} \delta_{ijkl}^L &= (Y_1^{DU})_{ij}^* (Y_1^{QL})_{kl}, \\ \delta_{ijkl}^R &= (Y_1^{DU})_{ij} (Y_1^{UE})_{kl}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

ここで、 Y_1^{DU} , Y_1^{QL} , Y_1^{UE} は質量基底における湯川結合行列であり、これらの混合パラメータはエネルギースケール M_{S_1} において対応する RGE を解くことで評価される. S_1 成分が主に 45 表現ヒッグス場で構成され、 Y_1^{QQ} が小さな混合角 θ_S によって大きく抑制されるため、 Y_1^{QQ} 結合による陽子崩壊は無視できる.

次に、陽子崩壊率を数値的に計算するために、系統的な手順をとる. 最初に、一つ目の手順として、SM の湯川結合に対する RGE

$$\frac{dY_i}{d \log \mu} = \frac{1}{(4\pi)^2} \beta_{Y_i} \quad (i = U, D, E) \quad (5.50)$$

$$\beta_{Y_U} = -Y_U \left[\left(8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{20}g_1^2 \right) + \frac{3}{2} \left[Y_U^\dagger Y_U - Y_D^\dagger Y_D \right] + \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \right] \quad (5.51)$$

$$\beta_{Y_D} = -Y_D \left[\left(8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{1}{4}g_1^2 \right) + \frac{3}{2} \left[Y_D^\dagger Y_D - Y_U^\dagger Y_U \right] + \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \right] \quad (5.52)$$

$$\beta_{Y_E} = -Y_E \left[\left(\frac{9}{4}g_2^2 + \frac{9}{4}g_1^2 \right) + \frac{3}{2} Y_E^\dagger Y_E + \text{tr} \left(3Y_U^\dagger Y_U + 3Y_D^\dagger Y_D + Y_E^\dagger Y_E \right) \right] \quad (5.53)$$

を解き、電弱スケールから GUT スケール $\Lambda = 6.5 \times 10^{15}$ GeV まで発展させる. 電弱スケールでの入力パラメータには、表 5.2 [24] に示された値を使用する.

表 5.2 アップタイプクォーク, ダウンタイプクォーク, 荷電レプトンの湯川結合定数および CKM 行列の Wolfenstein パラメータ (ただし, M_Z スケールでの値とする) [24]

y_u	y_c	y_t	y_d	y_s	y_b	y_e	y_μ	y_τ
7.05×10^{-6}	0.00363	0.955	1.54×10^{-5}	0.000306	0.0163	2.79×10^{-6}	0.000590	0.0100
λ	A	$\bar{\rho}$	$\bar{\eta}$					
0.225	0.826	0.159	0.352					

RGE を解くことにより, GUT スケールにおける湯川結合行列 Y_U, Y_D, Y_E の値を得る. ここで GUT スケールでの Y_U, Y_D, Y_E の値を他のスケールのものと区別するため, $(Y_U)_{\text{GUT}}, (Y_D)_{\text{GUT}}, (Y_E)_{\text{GUT}}$ と表記する.

次に, 二つ目の手順として, 得られた GUT スケールでの湯川結合行列から, 式 (3.19) の整合条件を用いて GUT スケールの湯川結合 $Y_5^U, Y_5^D, Y_{45}^U, Y_{45}^D$ を計算できる. 式 (3.19) に対して適用すると以下のようになる.

$$(Y_5^U)_{\text{GUT}} = -\frac{1}{c_H} \left[V_{QU}^* (\hat{Y}_U)_{\text{GUT}} + (\hat{Y}_U)_{\text{GUT}} V_{QU}^\dagger \right] \quad (5.54)$$

$$(Y_{45}^U)_{\text{GUT}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}e^{i\delta_H} s_H} \left[V_{QU}^* (\hat{Y}_U)_{\text{GUT}} - (\hat{Y}_U)_{\text{GUT}} V_{QU}^\dagger \right] \quad (5.55)$$

$$(Y_5^D)_{\text{GUT}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}c_H} \left[3(V_{\text{CKM}}^*)_{\text{GUT}} (\hat{Y}_D)_{\text{GUT}} + V_{QE}^* (\hat{Y}_E)_{\text{GUT}} V_{DL}^\dagger \right] \quad (5.56)$$

$$(Y_{45}^D)_{\text{GUT}} = \frac{\sqrt{3}}{e^{-i\delta_H} s_H} \left[(V_{\text{CKM}}^*)_{\text{GUT}} (\hat{Y}_D)_{\text{GUT}} - V_{QE}^* (\hat{Y}_E)_{\text{GUT}} V_{DL}^\dagger \right] \quad (5.57)$$

前述の議論に基づき, GUT スケールで湯川結合 Y_{45}^U が $(Y_{45}^U)_{\text{GUT}} = 0$ であると仮定する. この仮定から整合条件を満たすために, ユニタリ行列 V_{QU} が単位行列でなければならない. その他のユニタリ行列 V_{QE} と V_{DL} に関しては, 低エネルギーの観測量によって直接制限されないため, [26] に従って, Haar 測度に従って分布するランダムなユニタリ行列であると仮定する. また, δ_H と θ_H はランダムな値と仮定する.

最後に, 三つ目の手順として, GUT スケールでの湯川結合が決定されると, 整合条件 (3.18) に基づき, 45 表現ヒッグス場の軽いスカラー成分である S_8, S_3, S_1 の湯川結合を得ることができる. これによって得られた S_8, S_3, S_1 の湯川結合を GUT スケールで境界条件とみなして考える. この境界条件を用いて, 湯川結合に対する RGE

$$\frac{d}{d \log \mu} Y_{\psi\psi'}^\phi = \frac{1}{(4\pi)^2} \beta_{Y_{\psi\psi'}^\phi}, \quad (Y_{\psi\psi'}^\phi = Y_1^{QL}, Y_1^{UE}, Y_1^{DU}, Y_1^{QQ}) \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \beta_{Y_1^{QL}} = & -Y_1^{QL} \left(4g_3^2 + \frac{9}{2}g_2^2 + \frac{1}{2}g_1^2 \right) \\ & + \frac{1}{2}(Y_U)^T Y_U^* Y_1^{QL} + \frac{1}{2}(Y_D)^T Y_D^* Y_1^{QL} + \frac{1}{2}Y_1^{QL} Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QL} + (Y_1^{QQ})^T Y_1^{QQ*} Y_1^{QL} \\ & + 3(Y_3^{QQ})^T Y_3^{QQ*} Y_1^{QL} + \frac{3}{2}Y_3^{QL} Y_3^{QL\dagger} Y_1^{QL} + \frac{8}{3}(Y_8^{UQ})^T Y_8^{UQ*} Y_1^{QL} + \frac{8}{3}(Y_8^{DQ})^T Y_8^{DQ*} Y_1^{QL} \\ & + \frac{1}{2}Y_1^{QL} Y_E^\dagger Y_E + \frac{3}{2}Y_1^{QL} Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QL} + \frac{9}{2}Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QL} Y_1^{QL} \\ & + Y_1^{QL} \cdot \text{tr} \left(2Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QL} + Y_1^{UE\dagger} Y_1^{UE} + 2Y_1^{DU\dagger} Y_1^{DU} + 2Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QQ} \right) \\ & - 2(Y_U)^T Y_1^{UE*} Y_E - 4Y_1^{QQ} Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QL} + 12Y_3^{QQ} Y_1^{QQ\dagger} Y_3^{QL} \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
\beta_{Y_1^{UE}} = & -Y_1^{UE} \left(4g_3^2 + \frac{39}{20}g_1^2 \right) \\
& + Y_U Y_U^\dagger Y_1^{UE} + \frac{1}{2} Y_1^{UE} Y_1^{UE\dagger} Y_1^{UE} + (Y_1^{DU})^T Y_1^{DU*} Y_1^{UE} + \frac{16}{3} Y_8^{UQ} Y_8^{UQ\dagger} Y_1^{UE} \\
& + Y_E^* Y_1^{UE} (Y_E)^T + \frac{3}{2} Y_1^{UE} Y_1^{UE\dagger} Y_1^{UE} \\
& + Y_1^{UE} \cdot \text{tr} \left(2Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QL} + Y_1^{UE\dagger} Y_1^{UE} + 2Y_1^{DU\dagger} Y_1^{DU} + 2Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QQ} \right) \\
& - 4Y_U Y_1^{QL*} (Y_E)^T - 4(Y_1^{DU})^T Y_1^{DU*} Y_1^{UE}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{Y_1^{DU}} = & -Y_1^{DU} \left(8g_3^2 + g_1^2 \right) \\
& + Y_D Y_D^\dagger Y_1^{DU} + Y_1^{DU} Y_1^{DU\dagger} Y_1^{DU} + \frac{16}{3} Y_8^{DQ} Y_8^{DQ\dagger} Y_1^{DU} \\
& + Y_1^{DU} Y_U^* (Y_U)^T + \frac{1}{2} Y_1^{DU} Y_1^{UE*} (Y_1^{UE})^T + Y_1^{DU} Y_1^{DU\dagger} Y_1^{DU} + \frac{16}{3} Y_1^{DU} Y_8^{UQ*} (Y_8^{UQ})^T \\
& + Y_1^{DU} \cdot \text{tr} \left(2Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QL} + Y_1^{UE\dagger} Y_1^{UE} + 2Y_1^{DU\dagger} Y_1^{DU} + 2Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QQ} \right) \\
& + 4Y_D Y_1^{QQ\dagger} (Y_U)^T - 2Y_1^{DU} Y_1^{UE*} (Y_1^{UE})^T - \frac{32}{3} Y_8^{DQ} Y_1^{QQ\dagger} (Y_8^{UQ})^T
\end{aligned} \tag{5.61}$$

を解き, 45 表現ヒッグス場の軽いスカラー成分からの寄与も含めて, GUT スケールから S_1 成分の質量スケールまで発展させることで, M_{S_1} スケールでの湯川結合が得ることができる.

M_{S_1} スケールでの湯川結合を用いて, 式 (5.43)-(5.48) を用いて, $p \rightarrow \mu^+ K^0$ および $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ などの様々な陽子崩壊モードに対する部分崩壊幅を計算する. これらの部分崩壊幅は, 湯川結合, スカラー質量, およびハドロン行列要素と形状因子に関連する他の入力パラメータに依存する.

また, これらの湯川結合は, M_{S_1} スケールから電弱スケールまでさらに発展させると, 結果として得られる湯川結合行列 Y_U, Y_D, Y_E は電弱スケールでの初期入力値と異なる. この差は, まず SM RGE を用いて湯川結合を電弱スケールから GUT スケールまで発展させ, その後 GUT スケールから M_{S_1} スケールまでの発展において 45 表現ヒッグス場のスカラー成分からの追加の寄与を導入したためである. この差は存在するが, M_{S_1} スケールでの湯川結合に主に依存する陽子崩壊率の推定に大きな影響を与えることはないと予想される. よって, 本論文では単純化のために, この差は無視し, 陽子崩壊率の計算には M_{S_1} スケールでの湯川結合を用いる.

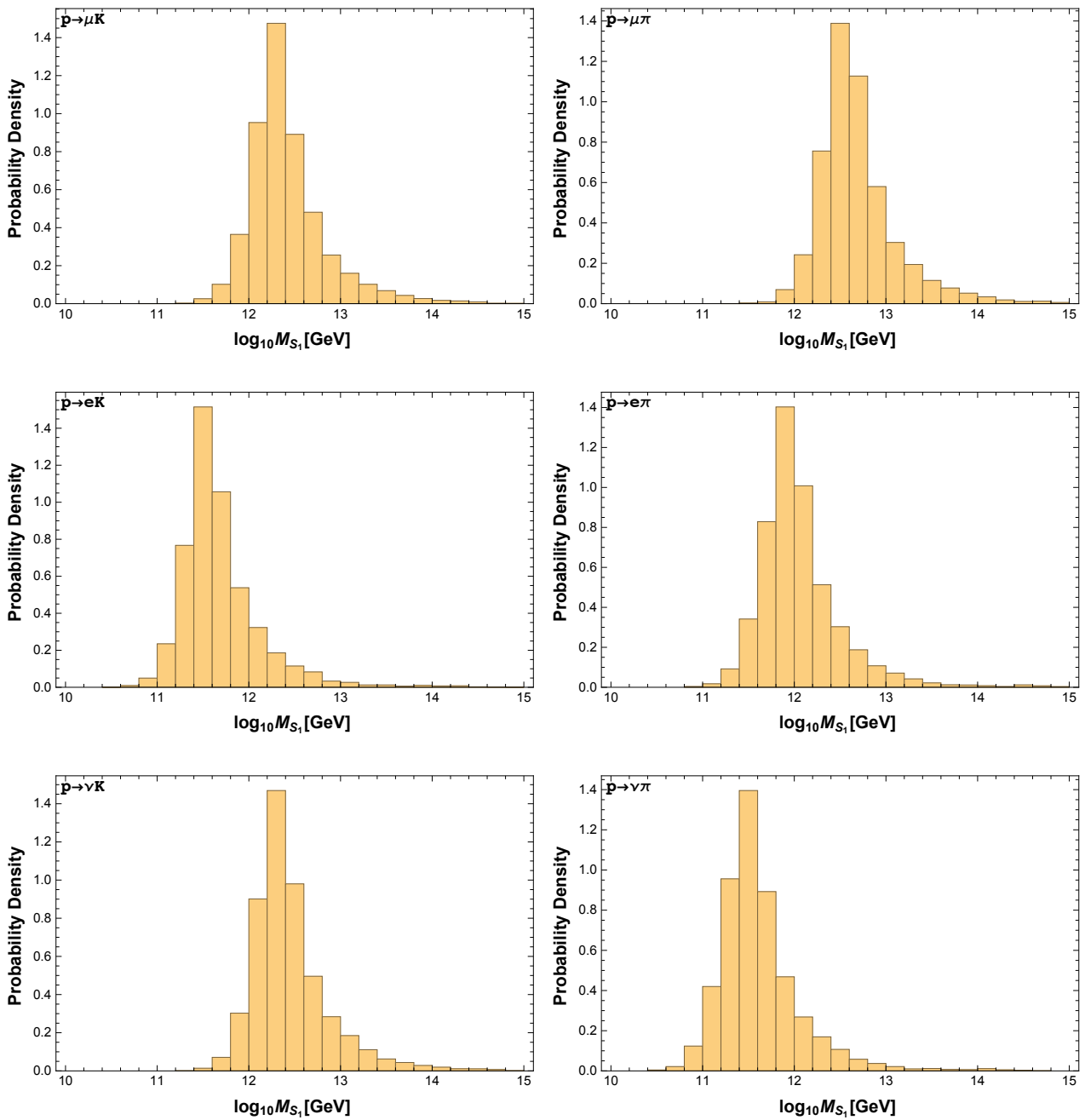


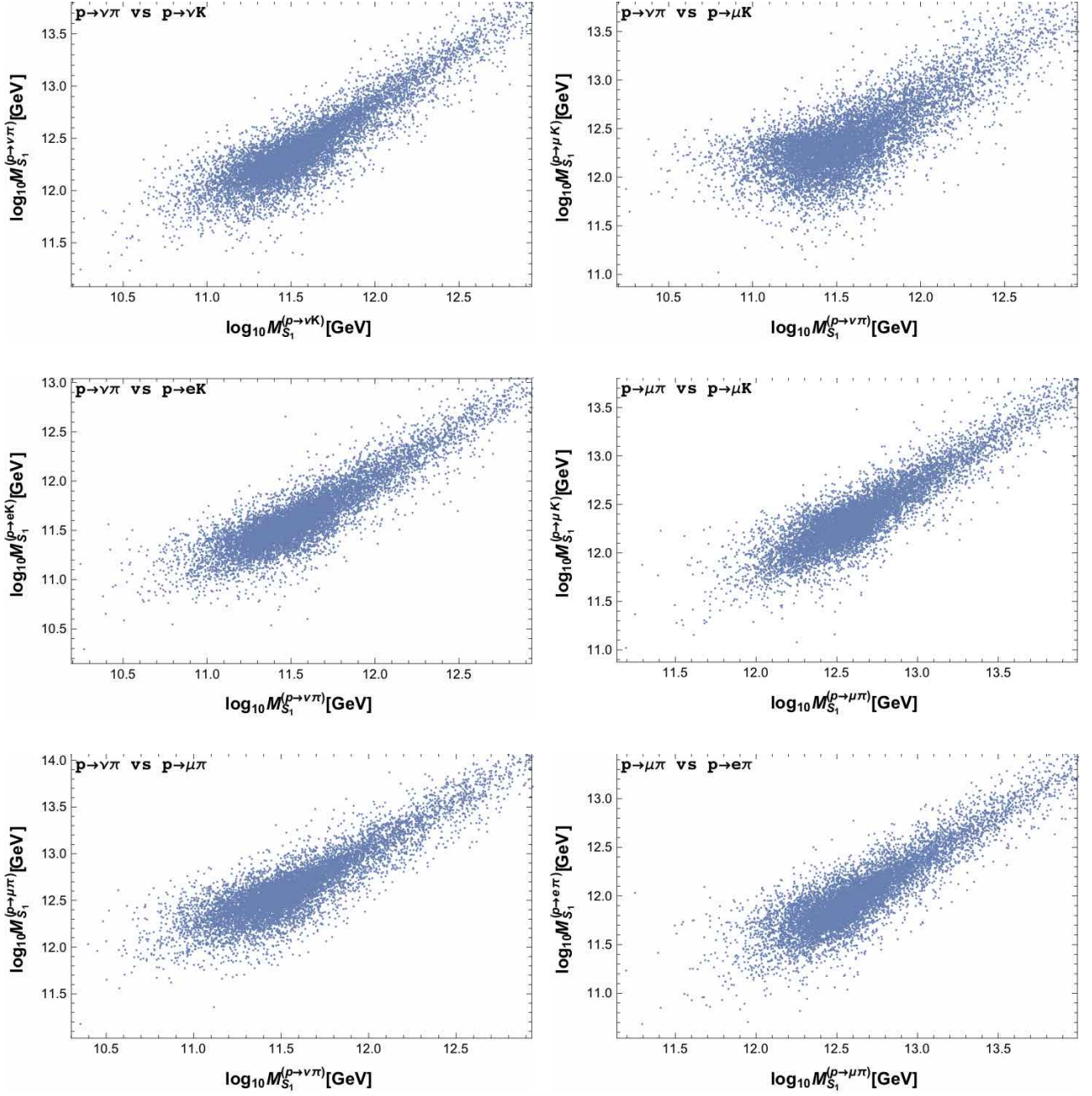
図 5.3 様々な陽子崩壊モードに対する実験的制限から導出された質量スケール M_{S_1} の下限に関する確率分布

図 5.3 では、様々な陽子崩壊モードに対する実験的な制限から導出された質量 M_{S_1} の下限についての確率分布を示す。また、これらの崩壊モードは表 5.3 にまとめている。

表 5.3 Super-Kamiokande による様々な陽子崩壊モードの寿命に対する実験的制限 [7][27][28][29][30]

Decay mode	$p \rightarrow \mu^+ K^0$	$p \rightarrow \mu^+ \pi^0$	$p \rightarrow e^+ K^0$	$p \rightarrow e^+ \pi^0$	$p \rightarrow \bar{\nu} K^+$	$p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+$
90% C.L. (years)	3.6×10^{33}	1.6×10^{34}	1.0×10^{33}	2.4×10^{34}	5.9×10^{33}	3.9×10^{32}

これらの解析により、 $p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+$ モードが M_{S_1} の下限に対して最も低いピーク位置（約 3×10^{11} GeV）を持つ一方で、 $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ モードは最も高いピーク位置（約 3×10^{12} GeV）を示すことが分かった。 $p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+$ モードが M_{S_1} に対して最も厳しい制限を課すことが分かった。

図 5.4 様々な陽子崩壊モードから導出された M_{S_1} の下限に関する相関関係

次に、図 5.4 では、様々な陽子崩壊モードに対する実験的制限から導出された M_{S_1} の下限に関する相関を示している。 $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ モードと $p \rightarrow \mu^+K^0$ モードのプロットにおけるデータ点には散らばりが見られる。この散らばりは、これら 2 つのモードに対する部分崩壊幅への異なる寄与に起因する。 $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ モードの部分崩壊幅は主に左カイラルの混合パラメータ δ_{ijkl}^L からの寄与を表す項 $|\delta^L|^2$ によって決まる。一方、 $p \rightarrow \mu^+K^0$ モードの部分崩壊幅には $|\delta^L|^2$ と $|\delta^R|^2$ の両方の項からの寄与が含まれる。 $|\delta^R|^2$ 項は右カイラルの混合パラメータ δ_{ijkl}^R からの寄与を表す。 $p \rightarrow \mu^+K^0$ 部分崩壊幅には $|\delta^L|^2$ と $|\delta^R|^2$ の両方の寄与があるため、 $|\delta^L|^2$ のみに依存する $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ モードと比較して、 M_{S_1} の下限の値における散らばりが大きくなる。

さらに、 $p \rightarrow \mu^+K^0$ の左カイラル混合パラメータである $\delta_{2112}^L = (Y_1^{DU})_{21}^* (Y_1^{QL})_{12}$ は、2 つの湯川行

列の非対角要素の積を含む. 他の崩壊モードでは, 少なくとも 1 つの要素が対角であることと対照的である. 非対角要素は対角要素よりも広い分布を持つ傾向があるため, $p \rightarrow \mu^+ K^0$ モードは全ての崩壊モードの中で最も顕著な散らばりを示す. この混合パラメータへの依存性の違いが, プロット上のデータ点の散らばりとして観測される結果となる.

これらのプロットは, 異なる陽子崩壊モードからの実験データを使用してこれらのパラメータを適切に制限することが, 質量スケール M_{S_1} に対する信頼性の高い制限を得るために重要であることを示している.

第 6 章

結論

本論文では, 45 表現ヒッグス場を取り入れた超対称性を含まない $SU(5)$ 大統一理論における陽子崩壊について研究した. この解析により, 45 表現ヒッグス場を導入することで, 現実的なフェルミオンの質量階層を生成できない点や, 陽子の安定性が不十分であるといった Minimal $SU(5)$ GUT のいくつかの欠点を解決するための枠組みを与えることを示した. 最初に, 「45 表現ヒッグス場が第 2 世代のフェルミオンにのみ結合すること」, 「質量行列が Georgi-Jarlskog 型であること」という 2 つの仮定の下で解析を行った. ゲージ結合定数の統一 (GCU) を実現するために, 「45 表現ヒッグス場の成分が階層的な質量スペクトルを持つ」と仮定し, 質量スペクトルをくりこみ群方程式から調査した. この解析によって, GCU 条件を満たすためには, 45 表現ヒッグス場の少なくとも 2 つの成分が階層的に小さな質量を持つ必要があることが分かった. 45 表現ヒッグス場の成分のうち 2 つが他の GUT スケールよりも軽い場合には, $S_3(\bar{3}, 3)$ 成分 および $S_8(8, 2)$ 成分が軽い場合에만 GCU が実現されることが分かった. これは, $S_3(\bar{3}, 3)$ 成分 および $S_8(8, 2)$ 成分がベータ関数に対して大きく寄与するためである. また, 軽い粒子以外の質量 $\bar{M}$ を用いて, GCU 条件の解を $\bar{M} - M_{S_8}$, $\bar{M} - M_{S_3}$, $M_{S_8} - M_{S_3}$ 平面上の直線として示した. 次に, 45 表現ヒッグス場の成分のうち 3 つが軽い場合には, 2 成分が軽い場合と同様に S_3 成分 および S_8 成分が軽い傾向があることが分かった.

次に, S_1 , S_3 , S_8 の成分が軽い場合には, S_1 のみが陽子崩壊を引き起こすため, 陽子寿命を求め Super-Kamiokande 実験から S_1 成分の質量に対して制限を課した. この場合, $p \rightarrow \mu^+ K^0$ が支配的な陽子崩壊モードであり, 実験的制限から S_1 成分の質量に対して $M_{S_1} > 3.4 \times 10^{13}$ GeV であることを明らかにした. また, GCU が実現され, 陽子寿命の制限が満たされる $\bar{M} - M_{S_1}$ 平面上の実現可能なパラメータ領域を特定した.

最後に, 「45 表現ヒッグス場が全ての世代のフェルミオンと結合する場合」かつ「質量行列が任意の場合」について解析した. この場合には, 電弱スケールから GUT スケールまでのくりこみ群方程式による発展および $SU(5)$ GUT における湯川結合との整合条件から得られる境界条件をもとに 45 表現ヒッグス場の湯川結合をそれぞれの粒子のエネルギースケールまでくりこみ群方程式を発展させることで値を得た. また, これらの値を用いて陽子崩壊率を計算し, 崩壊率のモデルパラメータへの依存性と, それぞれの崩壊モードの相関を調べた. その結果, $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ モードが M_{S_1} に対して最も厳しい制限を課することが分かった. 特に, $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ および $p \rightarrow \mu^+ K^0$ モードから導出された M_{S_1} スケールの下限に関する相関は, モデルのパラメータ空間の複雑さを持つことが分かった. $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ モードと $p \rightarrow \mu^+ K^0$ モードの相関プロットに見られる散らばりは, 本モデルの陽子崩壊率が湯川結合および混合パラメータに対して高い依存性を持つことを示している. これは, これらのパラメータを精密に測定し, 様々な陽子崩壊モードからの実験データを用いて M_{S_1} に対する信頼性の高い制限を課することの重要性を強調するものである.

付録 A

Georgi-Jarlsokg 型の質量行列を仮定した場合のフレーバー混合行列

A.1 近似を行った Georgi-Jarlsokg 型の質量行列

Georgi-Jarlsokg 型の質量行列を仮定した場合には, Wolfenstein パラメータ λ での近似を用いることで質量行列に対して

$$M_U \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^6 & 0 \\ \lambda^6 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \quad (\text{A.1})$$

$$M_D \sim M_E \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \quad (\text{A.2})$$

のような近似を行う. ただし, v は 5 表現ヒッグス場の真空期待値 v_5 と 45 表現ヒッグス場の真空期待値 v_{45} により以下の関係を満たす.

$$v^2 = v_{45}^2 + v_5^2 \quad (\text{A.3})$$

という関係を満たす. また, M_U , M_D , M_E の定義から

$$M_U = M_U^T \quad (\text{A.4})$$

$$M_D = M_D^T \quad (\text{A.5})$$

$$M_E = M_E^T \quad (\text{A.6})$$

を満たす. M_U , M_D , M_E に対して特異値分解を行うと

$$M_U \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^6 & 0 \\ \lambda^6 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \quad (\text{A.7})$$

$$M_D \sim M_E \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \quad (\text{A.8})$$

とすることができる. これらを用いて, アップタイプクォーク, ダウンタイプクォーク, 荷電レプトンがどのように変化するかについてそれぞれ見ていく.

A.2 それぞれの粒子に対するフレーバー混合行列

A.2.1 アップタイプクォーク

これまでの議論から, アップタイプクォークの湯川相互作用項は 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場が真空期待値を持つことで

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(Y_5^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\kappa}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}}\langle(\Phi_5)^\gamma\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{d}\kappa} + \frac{1}{4}(Y_5^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\hat{d}\hat{e}}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}}\langle(\Phi_5)^\gamma\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{d}\hat{e}} \\
& + \frac{1}{4}(Y_{45}^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\gamma\eta\hat{e}}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}}\langle(\Phi_{45})_\lambda^{\gamma\eta}\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{e}\lambda} + \frac{1}{4}(Y_{45}^U)_{ij}\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\eta\hat{e}}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\hat{b}}\langle(\Phi_{45})_{\hat{f}}^{\hat{c}\eta}\rangle(\Psi_{10j})^{\hat{e}\hat{f}} \\
& = [\overline{u_R}]_{i\hat{a}}(M_U)_{ij}[u_L]_j^{\hat{a}} \\
& = [\overline{(u_L)^c}]_i[(M_U)^T]_{ij}[(u_R)^c]_{j\hat{a}}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

と与えられることがわかった. 最初に粒子の場合について見ていく. このとき, M_U を近似した Georgi-Jarlsokg 型の質量行列として考えると

$$\begin{aligned}
[\overline{u_R}]_{i\hat{a}}(M_U)_{ij}[u_L]_j^{\hat{a}} &= [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [u_L]_j^{\hat{a}} \\
&\equiv [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} V_{u_R}^\dagger \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot V_{u_L} [u_L]_j^{\hat{a}}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

と書くことができる. ここで, 左右の行列をそれぞれのフレーバーのフレーバー混合行列としてみなすと

$$[\overline{u'_R}]_{i\hat{a}} = [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} V_{u_R}^\dagger = [\overline{u_R}]_{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

$$[u'_L]_j^{\hat{a}} = V_{u_L} [u_L]_j^{\hat{a}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} [u_L]_j^{\hat{a}} \tag{A.12}$$

と考えることができる. 同様にして, 反粒子に対しても M_U を近似した Georgi-Jarlsokg 型の質量行列として考えると

$$\begin{aligned}
[\overline{(u_L)^c}]_i^{\hat{a}}[(M_U)^T]_{ij}[(u_R)^c]_{j\hat{a}} &= [\overline{(u_L)^c}]_i^{\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [(u_R)^c]_{j\hat{a}} \\
&\equiv [\overline{(u_L)^c}]_i^{\hat{a}} V_{(u_L)^c}^\dagger \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot V_{(u_R)^c} [(u_R)^c]_{j\hat{a}}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

となる. これによって, それぞれの粒子のフレーバー混合行列は

$$[\overline{(u'_L)^c}]^{i\hat{a}} = [\overline{(u_L)^c}]^{i\hat{a}} V_{(u_L)^c}^\dagger = [\overline{(u_L)^c}]^{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

$$[(u'_R)^c]_{\hat{a}}^j = V_{(u_R)^c} [(u_R)^c]_{\hat{a}}^j = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} [(u_R)^c]_{\hat{a}}^j \tag{A.15}$$

と与えられる. アップタイプクォークのフレーバー混合行列を確認すると, アップタイプクォークの全ての場合でフレーバー混合行列が

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

となることが確認される.

次に, M_U を近似した Georgi-Jarlsokg 型の質量行列として考えたときに, 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場に対しての湯川結合行列がどのように表されるかについて議論していく. 前節の議論からアップタイプクォークの質量行列 M_U は

$$(M_U)_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_5^U)_{ij} \cdot v_5 - \frac{1}{\sqrt{6}}(Y_{45}^U)_{ij} \cdot v_{45} \quad (\text{A.17})$$

と与えられることをみた. フレーバーのフレーバー混合行列によって粒子と反粒子の再定義を行うことで

$$[\overline{u_R}]_{i\hat{a}}(M_U)_{ij}[u_L]_j^{\hat{a}} = [\overline{u'_R}]_{i\hat{a}} \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [u'_L]_j^{\hat{a}} \quad (\text{A.18})$$

と書くことができる. 質量行列が先述のように与えられるので代入して, 湯川結合行列の部分だけで近似すると

$$\begin{aligned} [\overline{u_R}]_{i\hat{a}}(M_U)_{ij}[u_L]_j^{\hat{a}} &= [\overline{u'_R}]_{i\hat{a}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_5^U)_{ij} \cdot v_5 - \frac{1}{\sqrt{6}}(Y_{45}^U)_{ij} \cdot v_{45} \right] [u'_L]_j^{\hat{a}} \\ &\sim [\overline{u'_R}]_{i\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} \cdot v_5 [u'_L]_j^{\hat{a}} - [\overline{u'_R}]_{i\hat{a}} (Y_{45}^U)_{ij} \cdot v_{45} [u'_L]_j^{\hat{a}} \\ &\sim [\overline{u'_R}]_{i\hat{a}} (Y_5^U)_{ij} \cdot v_5 [u'_L]_j^{\hat{a}} \quad (\because Y_{45}^U = 0) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

となる. また, 今回の場合は GUT スケールでは 45 表現ヒッグス場の湯川結合行列が 0 であることを仮定するので $Y_{45}^U = 0$ とした. よって, Y_5^U は

$$(Y_5^U)_{ij} \sim \frac{v}{v_5} \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

となる.

A.2.2 ダウンタイプクォーク

次に, ダウンタイプクォークについても同様に考える. ダウンタイプクォークの湯川相互作用項は

$$\begin{aligned} &(Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\hat{b}} \langle (\Phi_5^\dagger)_\alpha \rangle (\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{b}} + (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\hat{a}\beta} \langle (\Phi_{45}^\dagger)_{\hat{a}\beta} \rangle (\Psi_{\bar{5}j})_{\hat{c}} \\ &= - [\overline{d_R}]_{i\hat{a}} (M_D)_{ij} [d_L]_j^{\hat{a}} \\ &= - [\overline{(d_L)^c}]^{i\hat{a}} (M_D^T)_{ij} [(d_R)^c]_{\hat{a}}^j \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

と書ける. 次に, 粒子の場合について考え, M_D を近似した Georgi-Jarlsokg 型の質量行列として考えると

$$\begin{aligned} -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}} (M_D)_{ij} [d_L]_j^{\hat{a}} &= -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [d_L]_j^{\hat{a}} \\ &\equiv -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}} V_{d_R}^\dagger \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot V_{d_L} [d_L]_j^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となる. 左右の行列がそれぞれの場のフレーバー混合行列とみなすことができるので

$$[\overline{d'_R}]_{i\hat{a}} = [\overline{d_R}]_{i\hat{a}} V_{d_R}^\dagger = [\overline{d_R}]_{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$[d'_L]_j^{\hat{a}} = V_{d_L} [d_L]_j^{\hat{a}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [d_L]_j^{\hat{a}} \quad (\text{A.24})$$

とする. 同様にして, 反粒子の場合も考えると

$$\begin{aligned} -[(d_L)^c]^{i\hat{a}} (M_D^T)_{ij} [(d_R)^c]_{\hat{a}}^j &= -[(d_L)^c]^{i\hat{a}} (M_D)_{ij} [(d_R)^c]_{\hat{a}}^j \quad (\because M_D^T = M_D) \\ &= -[(d_L)^c]^{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [(d_R)^c]_{\hat{a}}^j \\ &\equiv -[(d_L)^c]^{i\hat{a}} V_{(d_L)^c}^\dagger \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot V_{(d_R)^c} [(d_R)^c]_{\hat{a}}^j \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

とすることができる. 左右の行列がそれぞれの場のフレーバー混合行列とみなすことができるので, 同様に

$$[(d'_L)^c]^{i\hat{a}} = [(d_L)^c]^{i\hat{a}} V_{(d_L)^c}^\dagger = [(d_L)^c]^{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$[(d'_R)^c]_{\hat{a}}^j = V_{(d_R)^c} [(d_R)^c]_{\hat{a}}^j = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [(d_R)^c]_{\hat{a}}^j \quad (\text{A.27})$$

と定義すると, ダウンタイプクォークのフレーバー混合行列は全て

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

と書けることになる.

次に, M_D を近似した Georgi-Jarlsokg 型の質量行列として考えたときに, 5 表現ヒッグス場と 45 表現ヒッグス場に対しての湯川結合行列がどのように表されるかについて議論していく. 前節の議論からダウンタイプクォークの質量行列 M_D は

$$(M_D)_{ij} = \frac{v_5}{2} [(Y_5^D)^T]_{ij} - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}} [(Y_{45}^D)^T]_{ij} \quad (\text{A.29})$$

と与えられる. ここで, ダウンタイプクォークの場合は 45 表現ヒッグス場とも相互作用をするのでアップタイプクォークの場合のように $Y_{45}^D = 0$ としては考えない. 現在の模型では 45 表現ヒッグス場は 2 世代のみの相互作用するので行列の (2,2) 成分のみを別々に分けると

$$\begin{aligned} -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}(M_D)_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} &= -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}} \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [d'_L]_j^{\hat{a}} \\ &= -[\overline{d'_R}]_{k\hat{a}} \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [d'_L]_l^{\hat{a}} - [\overline{d'_R}]_{2\hat{a}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [d'_L]_2^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

となる. ここで, 質量行列を構成する湯川行列で湯川相互作用項を表し, 湯川行列の部分のみで近似すると

$$\begin{aligned} -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}}(M_D)_{ij}[d_L]_j^{\hat{a}} &= -[\overline{d_R}]_{i\hat{a}} \left[\frac{v_5}{2} (Y_5^D)^T - \frac{v_{45}}{4\sqrt{3}} (Y_{45}^D)^T \right]_{ij} [d_L]_j^{\hat{a}} \\ &\sim -[\overline{d'_R}]_{k\hat{a}} \left[(Y_5^D)^T \right]_{kl} \cdot v_5 \cdot [d'_L]_l^{\hat{a}} - [\overline{d'_R}]_{2\hat{a}} \left[(Y_{45}^D)^T \right]_{22} \cdot v_{45} \cdot [d'_L]_2^{\hat{a}} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

となる. これらの式から, 湯川行列には

$$\left[(Y_5^D)^T \right]_{kl} \cdot v_5 \sim \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \iff \left[(Y_5^D)^T \right]_{kl} \sim \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{v}{v_5} \sim (Y_5^D)_{kl} \quad (k, l \neq 2) \quad (\text{A.32})$$

$$\left[(Y_{45}^D)^T \right]_{22} \cdot v_{45} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v \iff \left[(Y_{45}^D)^T \right]_{22} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{v}{v_{45}} \sim (Y_{45}^D)_{22} \quad (\text{A.33})$$

という関係が成立することとなる. これを基に S_1 を媒介する陽子崩壊について議論をしていく.

A.2.3 荷電レプトン

最後に, 荷電レプトンについても同様にしてフレーバー混合行列と湯川行列がどのように与えられるか見ていく. 荷電レプトンの湯川相互作用項は

$$\begin{aligned} (Y_5^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_5^\dagger)_\alpha \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\beta + \frac{1}{2} (Y_{45}^D)_{ij}(\Psi_{10i})^{\alpha\beta} \left\langle (\Phi_{45}^\dagger)_{\alpha\beta}^\gamma \right\rangle (\Psi_{\bar{5}j})_\gamma \\ = -[\overline{e_R}]_i (M_E)_{ij} [e_L]_j \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

と書ける. 次に, 粒子の場合について考え, M_E を近似した Georgi-Jarlsokg 型の質量行列として考えると

$$\begin{aligned} -[\overline{e_R}]_i (M_E)_{ij} [e_L]_j &= -[\overline{e_R}]_i \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [e_L]_j \\ &= -[\overline{e_R}]_i V_{e_R}^\dagger \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot V_{e_L} [e_L]_j \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

となる. ここで, 左右の行列をそれぞれの場のフレーバー混合行列として考え,

$$[\overline{e'_R}]_{i\hat{a}} = [\overline{e_R}]_{i\hat{a}} V_{e_R}^\dagger = [\overline{e_R}]_{i\hat{a}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$[e'_L]_j^{\hat{a}} = V_{e_L} [e_L]_j^{\hat{a}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [e_L]_j^{\hat{a}} \quad (\text{A.37})$$

と定義する. また, 前節の議論から荷電レプトンの質量行列 M_E は

$$(M_E)_{ij} = \frac{v_5}{2} (Y_5^D)_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{4} v_{45} (Y_{45}^D)_{ij} \quad (\text{A.38})$$

と与えられる. ダウンタイプクォークのときと同様に, 今回の場合では 45 表現ヒッグス場は 2 世代のみの相互作用するので行列の (2,2) 成分のみを別々に分けると

$$\begin{aligned} -[\overline{e_R}]_i (M_E)_{ij} [e_L]_j &= -[\overline{e'_R}]_i \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [e'_L]_j \\ &= -[\overline{e'_R}]_i \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [e'_L]_j - [\overline{e'_R}]_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v \cdot [e'_L]_2 \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

となる. ここで質量行列を湯川行列で表し, 湯川行列の部分で定数を見捨てる近似を行うと

$$\begin{aligned} -[\overline{e_R}]_i (M_E)_{ij} [e_L]_j &= -[\overline{e_R}]_i \left[\frac{v_5}{2} (Y_5^D) + \frac{\sqrt{3}}{4} v_{45} (Y_{45}^D) \right]_{ij} [e_L]_j \\ &= -\frac{1}{2} [\overline{e_R}]_i (Y_5^D)_{ij} \cdot v_5 \cdot [e_L]_j - \frac{\sqrt{3}}{4} [\overline{e_R}]_2 (Y_{45}^D)_{22} \cdot v_{45} \cdot [e_L]_2 \\ &\sim -[\overline{e_R}]_i (Y_5^D)_{ij} \cdot v_5 \cdot [e_L]_j - [\overline{e_R}]_2 (Y_{45}^D)_{22} \cdot v_{45} \cdot [e_L]_2 \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

となる. これによって, 荷電レプトンの湯川行列は

$$(Y_5^D)_{kl} \cdot v_5 \sim \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \iff (Y_5^D)_{kl} \sim \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{v}{v_5} \quad (k, l \neq 2) \quad (\text{A.41})$$

$$(Y_{45}^D)_{22} \cdot v_{45} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v \iff (Y_{45}^D)_{22} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{v}{v_{45}} \quad (\text{A.42})$$

と表すことができる.

A.3 フレーバー混合行列の性質

ここで, 前節で得られたフレーバー混合行列について述べる. アップタイプクォークとダウンタイプクォーク, 荷電レプトンのフレーバー混合行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

で与えられる. これらは, エルミート共役と転置で等しいことがわかる. また, $\lambda \ll 1$ の場合にのみ, ユニタリーであることがわかる.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \ll 1) \quad (\text{A.46})$$

を満たす. よって, エルミート行列と転置行列であること用いると

$$\left[\overline{(u'_L)^c} \right]^{i\hat{a}} = \left[\overline{(u_L)^c} \right]^{i\hat{a}} V_{(u_L)^c}^\dagger = \left[\overline{(u_L)^c} \right]^{i\hat{a}} V_{(u_L)^c} = \left[\overline{(u_L)^c} \right]^{i\hat{a}} V_{(u_L)^c}^T \quad (\text{A.47})$$

$$\left[\overline{(d'_L)^c} \right]^{i\hat{a}} = \left[\overline{(d_L)^c} \right]^{i\hat{a}} V_{(d_L)^c}^\dagger = \left[\overline{(d_L)^c} \right]^{i\hat{a}} V_{(d_L)^c} = \left[\overline{(d_L)^c} \right]^{i\hat{a}} V_{(d_L)^c}^T \quad (\text{A.48})$$

$$\left[\overline{e'_R} \right]_{i\hat{a}} = \left[\overline{e_R} \right]_{i\hat{a}} V_{e_R}^\dagger = \left[\overline{e_R} \right]_{i\hat{a}} V_{e_R} = \left[\overline{e_R} \right]_{i\hat{a}} V_{e_R}^T \quad (\text{A.49})$$

と考えることができる.

付録 B

陽子崩壊の部分崩壊幅

B.1 バリオン数を破るラグランジアン

B.1.1 陽子崩壊における次元 6 演算子

この付録では, 陽子崩壊における次元 6 演算子の部分崩壊幅について求めていく. 最初に, $\Delta S = 0$ の次元 6 演算子は以下のようになる. ここで, ΔS は反応の前後でストレンジネス S の変化を表し, k は世代の添字とする. また, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ はカラーの添字とする.

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})^c} u_{R\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})^c} \nu_{kL} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})^c} u_{L\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})^c} \nu_{kL} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})^c} u_{R\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})^c} e_{kL} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})^c} u_{L\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})^c} e_{kR} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})^c} u_{L\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})^c} e_{kL} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})^c} u_{R\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})^c} e_{kR} \quad (\text{B.6})$$

また, 同様に, $\Delta S = 1$ の次元 6 演算子を考えると以下のようになる.

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{R\hat{a}})^c} u_{R\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})^c} \nu_{kL} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{L\hat{a}})^c} u_{L\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})^c} \nu_{kL} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{R\hat{a}})^c} u_{R\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})^c} e_{kL} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{L\hat{a}})^c} u_{L\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})^c} e_{kR} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{L\hat{a}})^c} u_{L\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})^c} e_{kL} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{R\hat{a}})^c} u_{R\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})^c} e_{kR} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)112k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})^c} u_{R\hat{b}} \overline{(s_{L\hat{c}})^c} \nu_{kL} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)112k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})^c} u_{L\hat{b}} \overline{(s_{L\hat{c}})^c} \nu_{kL} \quad (\text{B.14})$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{R\hat{a}})^c} d_{R\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})^c} \nu_{kL} = -\tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)211k} \quad (\text{B.15})$$

よって, 陽子崩壊に関するラグランジアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{BV}} = & C_{SRL}^{(\nu)111k} \mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)111k} + C_{SLL}^{(\nu)111k} \mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)111k} + C_{SRL}^{(e)111k} \mathcal{O}_{SRL}^{(e)111k} + C_{SLR}^{(e)111k} \mathcal{O}_{SLR}^{(e)111k} \\
& + C_{SLL}^{(e)111k} \mathcal{O}_{SLL}^{(e)111k} + C_{SRR}^{(e)111k} \mathcal{O}_{SRR}^{(e)111k} \\
& + C_{SRL}^{(\nu)121k} \mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)121k} + C_{SLL}^{(\nu)121k} \mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)121k} + C_{SRL}^{(e)121k} \mathcal{O}_{SRL}^{(e)121k} + C_{SLR}^{(e)121k} \mathcal{O}_{SLR}^{(e)121k} \\
& + C_{SLL}^{(e)121k} \mathcal{O}_{SLL}^{(e)121k} + C_{SRR}^{(e)121k} \mathcal{O}_{SRR}^{(e)121k} + C_{SRL}^{(\nu)112k} \mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)112k} + C_{SLL}^{(\nu)112k} \mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)112k} \\
& + \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} \tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)121k} + \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)211k}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

となる. 次に, [23] のように, $\Delta S = 0, \Delta S = 1$ の次元 6 演算子を以下のように置き換える. 最初に, $\Delta S = 0$ の次元 6 演算子については

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})}^c u_{R\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})}^c \nu_{kL} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})}^c \text{Tr}(P' \xi B_L \xi) \tag{B.17}$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})}^c u_{L\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})}^c \nu_{kL} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})}^c \text{Tr}(P' \xi B_L \xi^\dagger) \tag{B.18}$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})}^c u_{R\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})}^c e_{kL} = \alpha_H \overline{(e_{kL})}^c \text{Tr}(P \xi B_L \xi) \tag{B.19}$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})}^c u_{L\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})}^c e_{kR} = \alpha_H \overline{(e_{kR})}^c \text{Tr}(P \xi^\dagger B_R \xi^\dagger) \tag{B.20}$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})}^c u_{L\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})}^c e_{kL} = \beta_H \overline{(e_{kL})}^c \text{Tr}(P \xi B_L \xi^\dagger) \tag{B.21}$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)111k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})}^c u_{R\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})}^c e_{kR} = \beta_H \overline{(e_{kR})}^c \text{Tr}(P \xi^\dagger B_R \xi) \tag{B.22}$$

となるのに対して, $\Delta S = 1$ の次元 6 演算子は

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{R\hat{a}})}^c u_{R\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})}^c \nu_{kL} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})}^c \text{Tr}(\tilde{P}' \xi B_L \xi) \tag{B.23}$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{L\hat{a}})}^c u_{L\hat{b}} \overline{(d_{L\hat{c}})}^c \nu_{kL} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})}^c \text{Tr}(\tilde{P}' \xi B_L \xi^\dagger) \tag{B.24}$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{R\hat{a}})}^c u_{R\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})}^c e_{kL} = \alpha_H \overline{(e_{kL})}^c \text{Tr}(\tilde{P} \xi B_L \xi) \tag{B.25}$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{L\hat{a}})}^c u_{L\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})}^c e_{kR} = \alpha_H \overline{(e_{kR})}^c \text{Tr}(\tilde{P} \xi^\dagger B_R \xi^\dagger) \tag{B.26}$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{L\hat{a}})}^c u_{L\hat{b}} \overline{(u_{L\hat{c}})}^c e_{kL} = \beta_H \overline{(e_{kL})}^c \text{Tr}(\tilde{P} \xi B_L \xi^\dagger) \tag{B.27}$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)121k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(s_{R\hat{a}})}^c u_{R\hat{b}} \overline{(u_{R\hat{c}})}^c e_{kR} = \beta_H \overline{(e_{kR})}^c \text{Tr}(\tilde{P} \xi^\dagger B_R \xi) \tag{B.28}$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)112k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{R\hat{a}})}^c u_{R\hat{b}} \overline{(s_{L\hat{c}})}^c \nu_{kL} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})}^c \text{Tr}(\tilde{P}'' \xi B_L \xi) \tag{B.29}$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)112k} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \overline{(d_{L\hat{a}})}^c u_{L\hat{b}} \overline{(s_{L\hat{c}})}^c \nu_{kL} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})}^c \text{Tr}(\tilde{P}'' \xi B_L \xi^\dagger) \tag{B.30}$$

となる. ここで, M はスカラーメソンの行列表示であり,

$$\xi = \exp \left[\frac{iM}{f} \right] \tag{B.31}$$

$$M = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix} = M^\dagger \tag{B.32}$$

となる. ここで, λ_a はゲルマン行列とする. また, それぞれの次元 6 演算子の崩壊過程のみを取り出す射影行列は以下になっている.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{P}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.33}$$

$$\tilde{P}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{P}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.34}$$

次に, それぞれの行列を求める際に共通して計算する部分について先に求める.

$$\xi B_{L/R} \xi \simeq B_{L/R} + \frac{i}{f} B_{L/R} M + \frac{i}{f} M B_{L/R} \quad (\text{B.35})$$

$$\xi B_{L/R} \xi^\dagger \simeq B_{L/R} - \frac{i}{f} B_{L/R} M + \frac{i}{f} M B_{L/R} \quad (\text{B.36})$$

$$\xi^\dagger B_{L/R} \xi \simeq B_{L/R} + \frac{i}{f} B_{L/R} M - \frac{i}{f} M B_{L/R} \quad (\text{B.37})$$

$$\xi^\dagger B_{L/R} \xi^\dagger \simeq B_{L/R} - \frac{i}{f} B_{L/R} M - \frac{i}{f} M B_{L/R} \quad (\text{B.38})$$

ここで, B はバリオンの行列表示であり,

$$B = \sum_{a=1}^8 \lambda_a B_a = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

としている. また, $B_{L/R}$ はバリオン B の左巻きと右巻きを示す.

B.1.2 次元 6 演算子のトレース部分による導出

B.1.2.1 P' のトレース部分

次に, それぞれの行列のトレース部分を (B.35)~(B.38) とそれぞれの射影行列との積を考えて求めていく. (B.35)~(B.38) に P' を掛けた場合には

$$P' \xi B_{L/R} \xi \simeq P' B_{L/R} + \frac{i}{f} P' B_{L/R} M + \frac{i}{f} P' M B_{L/R} \quad (\text{B.40})$$

$$P' \xi B_{L/R} \xi^\dagger \simeq P' B_{L/R} - \frac{i}{f} P' B_{L/R} M + \frac{i}{f} P' M B_{L/R} \quad (\text{B.41})$$

となる. ここで, ξ にエルミート共役がない場合を考えるとトレース部分は

$$\text{Tr}(P' \xi B_{L/R} \xi) \simeq \text{Tr}(P' B_{L/R}) + \frac{i}{f} \text{Tr}(P' B_{L/R} M) + \frac{i}{f} \text{Tr}(P' M B_{L/R}) \quad (\text{B.42})$$

となるため, $P' B_{L/R}$ と $B_{L/R} P'$ が必要になる. これを計算すると

$$P' B_{L/R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \end{pmatrix}_{L/R} \quad (\text{B.43})$$

$$P' M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.44})$$

となる. これを基にトレース部分を求めると

$$\text{Tr}(P' B_{L/R}) = n_{L/R} \quad (\text{B.45})$$

$$\text{Tr}(P' B_{L/R} M) = \Sigma_{L/R}^- K^+ + \left(-\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) K^0 + n_{L/R} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} \eta \right) \quad (\text{B.46})$$

$$\text{Tr}(P' M B_{L/R}) = \pi^- p_{L/R} + \left(-\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) n_{L/R} + K^0 \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda_{L/R} \right) \quad (\text{B.47})$$

となる. ここで, 今回の場合は陽子崩壊を考えているため, 1 次の部分と陽子の項のみに着目し, ξ がエルミート共役を含む部分に対しても求めると

$$\text{Tr}(P'\xi B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = n_{L/R} + \frac{i}{f}\pi^- p_{L/R} \quad (\text{B.48})$$

$$\text{Tr}(P'\xi B_{L/R}\xi^\dagger) \Big|_{1\text{st},p} = n_{L/R} + \frac{i}{f}\pi^- p_{L/R} \quad (\text{B.49})$$

となる. よって, $\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)111k}$ と $\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)111k}$ の置き換えは以下のようになる.

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)111k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(P'\xi B_L \xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[n_L + \frac{i}{f}\pi^- p_L \right] \quad (\text{B.50})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)111k} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(P'\xi B_L \xi^\dagger) = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[n_L + \frac{i}{f}\pi^- p_L \right] \quad (\text{B.51})$$

B.1.2.2 P のトレース部分

同様に, P が関わる行列のトレース部分を求めていく. ここで, ξ にエルミート共役がない場合を考えるとトレース部分は

$$\text{Tr}(P\xi B_{L/R}\xi) \simeq \text{Tr}(PB_{L/R}) + \frac{i}{f}\text{Tr}(PB_{L/R}M) + \frac{i}{f}\text{Tr}(PMB_{L/R}) \quad (\text{B.52})$$

となるため, $PB_{L/R}$ と $B_{L/R}P$ が必要になる. これを計算すると

$$PB_{L/R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \end{pmatrix}_{L/R} \quad (\text{B.53})$$

$$PM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \end{pmatrix} \quad (\text{B.54})$$

となる. これを基にトレース部分を求めると

$$\text{Tr}(PB_{L/R}) = p_{L/R} \quad (\text{B.55})$$

$$\text{Tr}(PB_{L/R}M) = \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) K^+ - \Sigma_{L/R}^+ K^0 + p_{L/R} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \right) \quad (\text{B.56})$$

$$\text{Tr}(PMB_{L/R}) = \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_{L/R} + \pi^+ n_{L/R} + K^+ \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda_{L/R} \right) \quad (\text{B.57})$$

となる. ここで, 今回の場合では陽子崩壊を考えているため, 1 次の部分と陽子の項のみに着目し, ξ がエルミート共役を含む部分に対しても求めると

$$\text{Tr}(P\xi B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = p_{L/R} + \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_{L/R} \quad (\text{B.58})$$

$$\text{Tr}(P\xi B_{L/R}\xi^\dagger) \Big|_{1\text{st},p} = p_{L/R} + \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_{L/R} \quad (\text{B.59})$$

$$\text{Tr}(P\xi^\dagger B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = p_{L/R} - \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_{L/R} \quad (\text{B.60})$$

$$\text{Tr}(P\xi^\dagger B_{L/R}\xi^\dagger) \Big|_{1\text{st},p} = p_{L/R} - \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_{L/R} \quad (\text{B.61})$$

となる. よって, P が関係するトレースによる置き換えは以下ようになる.

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)111k} = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(P\xi B_L \xi) = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \left[p_L + \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L \right] \quad (\text{B.62})$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)111k} = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(P\xi^\dagger B_R \xi^\dagger) = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \left[p_R - \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R \right] \quad (\text{B.63})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)111k} = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(P\xi B_L \xi^\dagger) = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \left[p_L + \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L \right] \quad (\text{B.64})$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)111k} = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(P\xi^\dagger B_R \xi) = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \left[p_R - \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R \right] \quad (\text{B.65})$$

B.1.2.3 $\tilde{P}$ のトレース部分

同様にして, $\tilde{P}$ が関わる部分の行列のトレース部分を求めていく. ここで, ξ にエルミート共役がない場合を考えるとトレース部分は

$$\text{Tr}(\tilde{P}\xi B_{L/R}\xi) \simeq \text{Tr}(\tilde{P}B_{L/R}) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\tilde{P}B_{L/R}M) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\tilde{P}MB_{L/R}) \quad (\text{B.66})$$

となるため, $\tilde{P}B_{L/R}$ と $B_{L/R}\tilde{P}$ が必要になる. これを計算すると

$$\tilde{P}B_{L/R} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{L/R} \quad (\text{B.67})$$

$$\tilde{P}M = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.68})$$

となる. これを基にトレース部分を求めると

$$\text{Tr}(\tilde{P}B_{L/R}) = -\Sigma_{L/R}^+ \quad (\text{B.69})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}B_{L/R}M) = - \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) \pi^+ - \Sigma_{L/R}^+ \left(-\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) - p_{L/R} \bar{K}^0 \quad (\text{B.70})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}MB_{L/R}) = - \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) \Sigma_{L/R}^+ - \pi^+ \left(-\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) + K^+ \Xi_{L/R}^0 \quad (\text{B.71})$$

となる. ここで, 今回の場合では陽子崩壊を考えているため, 1 次の部分と陽子の項のみに着目し, ξ がエルミート共役を含む部分に対しても求めると

$$\text{Tr}(\tilde{P}\xi B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = -\Sigma_{L/R}^+ - \frac{i}{f} p_{L/R} \bar{K}^0 \quad (\text{B.72})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}\xi B_{L/R}\xi^\dagger) \Big|_{1\text{st},p} = -\Sigma_{L/R}^+ + \frac{i}{f} p_{L/R} \bar{K}^0 \quad (\text{B.73})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}\xi^\dagger B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = -\Sigma_{L/R}^+ - \frac{i}{f} p_{L/R} \bar{K}^0 \quad (\text{B.74})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}\xi^\dagger B_{L/R}\xi^\dagger) \Big|_{1\text{st},p} = -\Sigma_{L/R}^+ + \frac{i}{f} p_{L/R} \bar{K}^0 \quad (\text{B.75})$$

となる. よって, $\tilde{P}$ が関係するトレースによる置き換えは以下ようになる.

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)121k} = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi B_L \xi) = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \left[-\Sigma_L^+ - \frac{i}{f} p_L \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.76})$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)121k} = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi^\dagger B_R \xi^\dagger) = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \left[-\Sigma_R^+ + \frac{i}{f} p_R \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.77})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)121k} = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi B_L \xi^\dagger) = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \left[-\Sigma_L^+ + \frac{i}{f} p_L \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.78})$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)121k} = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi^\dagger B_R \xi) = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \left[-\Sigma_R^+ - \frac{i}{f} p_R \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.79})$$

B.1.2.4 $\tilde{P}'$ のトレース部分

同様にして, それぞれの行列のトレース部分を求めていく. ここで, ξ にエルミート共役がない場合を考えるとトレース部分は

$$\text{Tr}(\tilde{P}'\xi B_{L/R}\xi) \simeq \text{Tr}(\tilde{P}'B_{L/R}) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\tilde{P}'B_{L/R}M) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\tilde{P}'MB_{L/R}) \quad (\text{B.80})$$

となるため, $\tilde{P}'B_{L/R}$ と $B_{L/R}\tilde{P}'$ が必要になる. これを計算すると

$$\tilde{P}'B_{L/R} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{L/R} \quad (\text{B.81})$$

$$\tilde{P}'M = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.82})$$

となる. これを基にトレース部分を求めると

$$\text{Tr}(\tilde{P}'B_{L/R}) = \frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \quad (\text{B.83})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}'B_{L/R}M) = -\Sigma_{L/R}^-\pi^+ - \left(-\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) \left(-\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) - n_{L/R}\bar{K}^0 \quad (\text{B.84})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}'MB_{L/R}) = -\pi^-\Sigma_{L/R}^+ - \left(-\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) \left(-\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) - K^0\Xi_{L/R}^0 \quad (\text{B.85})$$

となる. ここで, では陽子崩壊を考えているため, 1 次の部分と陽子の項のみに着目し, ξ がエルミート共役を含む部分に対しても求めると

$$\text{Tr}(\tilde{P}'\xi B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) \quad (\text{B.86})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}'\xi B_{L/R}\xi^\dagger) \Big|_{1\text{st},p} = \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) \quad (\text{B.87})$$

となる. よって, $\tilde{P}'$ が関係するトレースによる置き換えは以下ようになる.

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)121k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}'\xi B_L \xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left(\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} \right) \quad (\text{B.88})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)121k} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}'\xi B_L \xi^\dagger) = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left(\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} \right) \quad (\text{B.89})$$

B.1.2.5 $\tilde{P}''$ のトレース部分

同様にして、トレース部分を求めていく。ここで、 ξ にエルミート共役がない場合を考えるとトレース部分は

$$\text{Tr}(\tilde{P}'' \xi B_{L/R} \xi) \simeq \text{Tr}(\tilde{P}'' B_{L/R}) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\tilde{P}'' B_{L/R} M) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\tilde{P}'' M B_{L/R}) \quad (\text{B.90})$$

となるため、 $\tilde{P}'' B_{L/R}$ と $B_{L/R} \tilde{P}''$ が必要になる。これを計算すると

$$\tilde{P}'' B_{L/R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix}_{L/R} \quad (\text{B.91})$$

$$\tilde{P}'' M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix} \quad (\text{B.92})$$

となる。これを基にトレース部分を求めると

$$\text{Tr}(\tilde{P}'' B_{L/R}) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda_{L/R} \quad (\text{B.93})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}'' B_{L/R} M) = \Xi_{L/R}^- K^+ + \Xi_{L/R}^0 K^0 + \frac{2}{3}\Lambda_{L/R}\eta \quad (\text{B.94})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}'' M B_{L/R}) = K^- p_{L/R} + \bar{K}^0 n_{L/R} + \frac{2}{3}\eta\Lambda_{L/R} \quad (\text{B.95})$$

となる。ここで、では陽子崩壊を考えているため、1 次の部分と陽子の項のみに着目し、 ξ がエルミート共役を含む部分に対しても求めると

$$\text{Tr}(\tilde{P}'' \xi B_{L/R} \xi) \Big|_{1\text{st},p} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda_{L/R} + \frac{i}{f} K^- p_{L/R} \quad (\text{B.96})$$

$$\text{Tr}(\tilde{P}'' \xi B_{L/R} \xi^\dagger) \Big|_{1\text{st},p} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda_{L/R} + \frac{i}{f} K^- p_{L/R} \quad (\text{B.97})$$

となる。よって、 $\tilde{P}''$ が関係するトレースによる置き換えは以下のようにになる。

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)112k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}'' \xi B_L \xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda_L + \frac{i}{f} K^- p_L \right] \quad (\text{B.98})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)112k} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}'' \xi B_L \xi^\dagger) = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda_L + \frac{i}{f} K^- p_L \right] \quad (\text{B.99})$$

B.1.2.6 $\hat{P}$ のトレース部分

それぞれの行列のトレース部分を求めていく。ここで、 ξ にエルミート共役がない場合を考えるとトレース部分は

$$\text{Tr}(\hat{P} \xi B_{L/R} \xi) \simeq \text{Tr}(\hat{P} B_{L/R}) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\hat{P} B_{L/R} M) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\hat{P} M B_{L/R}) \quad (\text{B.100})$$

となるため, $\hat{P}B_{L/R}$ と $B_{L/R}\hat{P}$ が必要になる. これを計算すると

$$\hat{P}B_{L/R} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{L/R} \quad (\text{B.101})$$

$$\hat{P}M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.102})$$

となる. これを基にトレース部分を求めると

$$\text{Tr}(\hat{P}B_{L/R}) = \frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \quad (\text{B.103})$$

$$\text{Tr}(\hat{P}B_{L/R}M) = \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) + \Sigma_{L/R}^+ \pi^- + p_{L/R} K^- \quad (\text{B.104})$$

$$\text{Tr}(\hat{P}MB_{L/R}) = \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) + \pi^+ \Sigma_{L/R}^- + K^- \Xi_{L/R}^- \quad (\text{B.105})$$

となる. ここで, では陽子崩壊を考えているため, 1 次の部分と陽子の項のみに着目し, ξ がエルミート共役を含む部分に対しても求めると

$$\text{Tr}(\hat{P}\xi B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = \frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} + \frac{i}{f} p_{L/R} K^- \quad (\text{B.106})$$

となる. よって, $\hat{P}$ が関係するトレースによる置き換えは以下のようになる.

$$\tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)121k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\hat{P}\xi B_L \xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} + \frac{i}{f} p_L K^- \right] \quad (\text{B.107})$$

B.1.2.7 $\hat{P}'$ のトレース部分

最後に, $\hat{P}'$ が関わる部分の行列のトレース部分を求めていく. ここで, ξ にエルミート共役がない場合を考えるとトレース部分は

$$\text{Tr}(\hat{P}'\xi B_{L/R}\xi) \simeq \text{Tr}(\hat{P}'B_{L/R}) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\hat{P}'B_{L/R}M) + \frac{i}{f} \text{Tr}(\hat{P}'MB_{L/R}) \quad (\text{B.108})$$

となるため, $\hat{P}'B_{L/R}$ と $B_{L/R}\hat{P}'$ が必要になる. これを計算すると

$$\hat{P}'B_{L/R} = - \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{L/R} \quad (\text{B.109})$$

$$\hat{P}'M = - \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.110})$$

となる. これを基にトレース部分を求めると

$$\text{Tr}(\hat{P}'B_{L/R}) = - \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) \quad (\text{B.111})$$

$$\text{Tr}(\hat{P}'B_{L/R}M) = - \left\{ \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) + \Sigma_{L/R}^+ \pi^- + p_{L/R} K^- \right\} \quad (\text{B.112})$$

$$\text{Tr}(\hat{P}'MB_{L/R}) = - \left\{ \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) \left(\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} \right) + \pi^+ \Sigma_{L/R}^- + K^- \Xi_{L/R}^- \right\} \quad (\text{B.113})$$

となる. ここで, 今回の場合では陽子崩壊を考えているため, 1 次の部分と陽子の項のみに着目し, ξ がエルミート共役を含む部分に対しても求めると

$$\text{Tr}(\hat{P}'\xi B_{L/R}\xi) \Big|_{1\text{st},p} = - \left[\frac{\Sigma_{L/R}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_{L/R}}{\sqrt{6}} + \frac{i}{f} p_{L/R} K^- \right] \quad (\text{B.114})$$

となる. よって, $\hat{P}'$ が関係するトレースによる置き換えは以下ようになる.

$$\tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)211k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\hat{P}'\xi B_L\xi) = -\alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} + \frac{i}{f} p_L K^- \right] \quad (\text{B.115})$$

B.1.3 次元 6 演算子のトレース部分のまとめ

以上の議論から, $\Delta S = 0$ の次元 6 演算子については

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)111k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(P'\xi B_L\xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[n_L + \frac{i}{f} \pi^- p_L \right] \quad (\text{B.116})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)111k} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(P'\xi B_L\xi^\dagger) = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[n_L + \frac{i}{f} \pi^- p_L \right] \quad (\text{B.117})$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)111k} = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(P\xi B_L\xi) = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \left[p_L + \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L \right] \quad (\text{B.118})$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)111k} = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(P\xi^\dagger B_R\xi^\dagger) = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \left[p_R - \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R \right] \quad (\text{B.119})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)111k} = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(P\xi B_L\xi^\dagger) = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \left[p_L + \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L \right] \quad (\text{B.120})$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)111k} = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(P\xi^\dagger B_R\xi) = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \left[p_R - \frac{i}{f} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R \right] \quad (\text{B.121})$$

となる. それに対して, $\Delta S = 1$ の次元 6 演算子については, 以下のように与えられる.

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)121k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}'\xi B_L\xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left(\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} \right) \quad (\text{B.122})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)121k} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}'\xi B_L\xi^\dagger) = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left(\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} \right) \quad (\text{B.123})$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(e)121k} = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi B_L\xi) = \alpha_H \overline{(e_{kL})^c} \left[-\Sigma_L^+ - \frac{i}{f} p_L \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.124})$$

$$\mathcal{O}_{SLR}^{(e)121k} = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi^\dagger B_R\xi^\dagger) = \alpha_H \overline{(e_{kR})^c} \left[-\Sigma_R^+ + \frac{i}{f} p_R \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.125})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(e)121k} = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi B_L\xi^\dagger) = \beta_H \overline{(e_{kL})^c} \left[-\Sigma_L^+ + \frac{i}{f} p_L \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.126})$$

$$\mathcal{O}_{SRR}^{(e)121k} = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \text{Tr}(\tilde{P}\xi^\dagger B_R\xi) = \beta_H \overline{(e_{kR})^c} \left[-\Sigma_R^+ - \frac{i}{f} p_R \bar{K}^0 \right] \quad (\text{B.127})$$

$$\mathcal{O}_{SRL}^{(\nu)112k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}''\xi B_L\xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda_L + \frac{i}{f} K^- p_L \right] \quad (\text{B.128})$$

$$\mathcal{O}_{SLL}^{(\nu)112k} = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\tilde{P}''\xi B_L\xi^\dagger) = \beta_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda_L + \frac{i}{f} K^- p_L \right] \quad (\text{B.129})$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)121k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\hat{P}\xi B_L\xi) = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} + \frac{i}{f} p_L K^- \right] \quad (\text{B.130})$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{SRL}^{(\nu)211k} = \alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \text{Tr}(\hat{P}'\xi B_L\xi) = -\alpha_H \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} + \frac{i}{f} p_L K^- \right] \quad (\text{B.131})$$

B.1.4 陽子崩壊のラグランジアン

前節で得た, $\Delta S = 0$ と $\Delta S = 1$ の次元 6 演算子をラグランジアン (B.16) に代入すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{BV}} = & \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) n_L + \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) \left(\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} \right) \right. \\
& - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \Lambda_L + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \Sigma_L^0 \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \Lambda_L \right] \\
& + \overline{(e_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) p_L - \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) \Sigma_L^+ \right] \\
& + \overline{(e_{kR})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) p_R - \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) \Sigma_R^+ \right] \\
& + \frac{i}{f} \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) \pi^- p_L + \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) K^- p_L \right. \\
& \left. + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) p_L K^- \right] \\
& + \frac{i}{f} \overline{(e_{kL})^c} \left[\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L \right. \\
& \left. - \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} - \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) p_L \bar{K}^0 \right] \\
& - \frac{i}{f} \overline{(e_{kR})^c} \left[\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R \right. \\
& \left. - \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} - \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) p_R \bar{K}^0 \right] \tag{B.132}
\end{aligned}$$

となる. ここで, Σ_L^0 と Λ_L の部分についてまとめ直すと以下ようになる.

$$\begin{aligned}
& \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) \left(\frac{\Sigma_L^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda_L}{\sqrt{6}} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \Lambda_L \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \Sigma_L^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \Lambda_L \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \Sigma_L^0 \\
& - \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) + 2 \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) - \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \Lambda_L \tag{B.133}
\end{aligned}$$

同様に, π^0 と η の部分についてまとめ直すと以下ようになる.

$$\begin{aligned}
& \alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_L \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \pi^0 p_L - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \eta p_L \tag{B.134}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{3\eta}{\sqrt{6}} \right) p_R \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \pi^0 p_R - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \eta p_R
\end{aligned} \tag{B.135}$$

最後に, $n_L \bar{K}^0$ と $K^- p_L$ の部分についてまとめ直すと以下のようになる.

$$\begin{aligned}
& \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) K^- p_L + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) p_L K^- \\
& = \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} K^- p_L
\end{aligned} \tag{B.136}$$

以上によって, バリオン数を破るラグランジアンは以下のようにまとめることができる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{BV}} = & \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) n_L \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \Sigma_L^0 \\
& - \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) + 2 \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \Lambda_L \Big] \\
& + \overline{(e_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) p_L - \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) \Sigma_L^+ \right] \\
& + \overline{(e_{kR})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) p_R - \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) \Sigma_R^+ \right] \\
& + \frac{i}{f} \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) \pi^- p_L \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} K^- p_L \right] \\
& + \frac{i}{f} \overline{(e_{kL})^c} \left[+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \pi^0 p_L \right. \\
& \quad - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \eta p_L - \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} - \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) p_L \bar{K}^0 \Big] \\
& - \frac{i}{f} \overline{(e_{kR})^c} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \pi^0 p_R \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \eta p_R - \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} - \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) p_R \bar{K}^0 \right]
\end{aligned} \tag{B.137}$$

B.2 バリオン数を保存するラグランジアン

次に, [22] と同じようにバリオンを媒介する陽子崩壊を考えるため, バリオン数を保存するラグランジアンについて考える. ここで, b_1, b_2 の項は後の近似で消えるため, 今回の場合も b_1, b_2 の項は無視して考えとする. よって, 考えるラグランジアンは以下のように与えられる.

$$\mathcal{L}_{\text{BC}} = \frac{1}{2i} (D - F) \text{Tr} \left[\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 B (\partial_\mu \xi \cdot \xi^\dagger - \partial_\mu \xi^\dagger \cdot \xi) \right] - \frac{1}{2i} (D + F) \text{Tr} \left[\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 (\xi \partial_\mu \xi^\dagger - \xi^\dagger \partial_\mu \xi) B \right] \tag{B.138}$$

最初に, 第 1 項について考える. 今回の場合は, 陽子崩壊に着目するので陽子が寄与する部分のみを取り出す.

$$\frac{1}{2i}(D-F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 B(\partial_\mu\xi\cdot\xi^\dagger-\partial_\mu\xi^\dagger\cdot\xi)\right]=\frac{1}{f}(D-F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 B(\partial_\mu M)\right] \quad (\text{B.139})$$

$$\frac{1}{2i}(D-F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 B(\partial_\mu\xi\cdot\xi^\dagger-\partial_\mu\xi^\dagger\cdot\xi)\right]\Big|_p=\frac{1}{f}(D-F)\bar{B}_{i1}\gamma^\mu\gamma_5 B_{13}(\partial_\mu M)_{3i} \quad (\text{B.140})$$

この式に対して, それぞれの部分代入すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i}(D-F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 B(\partial_\mu\xi\cdot\xi^\dagger-\partial_\mu\xi^\dagger\cdot\xi)\right]\Big|_p \\ &= \frac{D-F}{\sqrt{2}f}\bar{\Sigma}^0\gamma^\mu\gamma_5 p(\partial_\mu K^-) + \frac{D-F}{\sqrt{6}f}\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma_5 p(\partial_\mu K^-) + \frac{D-F}{f}\bar{\Sigma}^+\gamma^\mu\gamma_5 p(\partial_\mu \bar{K}^0) - \frac{2(D-F)}{\sqrt{6}f}\bar{p}\gamma^\mu\gamma_5 p(\partial_\mu \eta) \end{aligned} \quad (\text{B.141})$$

次に, 同様にして第 2 項についても考えていく. 陽子崩壊に着目するので陽子が寄与する部分のみを取り出す.

$$-\frac{1}{2i}(D+F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 (\xi\partial_\mu\xi^\dagger-\xi^\dagger\partial_\mu\xi)B\right]\simeq\frac{1}{f}(D+F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 (\partial_\mu M)B\right] \quad (\text{B.142})$$

$$-\frac{1}{2i}(D+F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 (\xi\partial_\mu\xi^\dagger-\xi^\dagger\partial_\mu\xi)B\right]\Big|_p=\frac{1}{f}(D+F)\bar{B}_{3j}\gamma^\mu\gamma_5 (\partial_\mu M)_{j1}B_{13} \quad (\text{B.143})$$

この式に対しても, それぞれの部分代入すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i}(D+F)\text{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5 (\xi\partial_\mu\xi^\dagger-\xi^\dagger\partial_\mu\xi)B\right]\Big|_p \\ &= \frac{D+F}{\sqrt{2}f}\bar{p}\gamma^\mu\gamma_5 (\partial_\mu \pi^0)p + \frac{D+F}{\sqrt{6}f}\bar{p}\gamma^\mu\gamma_5 (\partial_\mu \eta)p + \frac{D+F}{f}\bar{n}\gamma^\mu\gamma_5 (\partial_\mu \pi^-)p - \frac{2(D+F)}{\sqrt{6}f}\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma_5 (\partial_\mu K^-)p \end{aligned} \quad (\text{B.144})$$

よって, (B.141) と (B.144) をラグランジアンに代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{BC}} &= \left[\frac{D-F}{\sqrt{2}f}\bar{\Sigma}^0\gamma^\mu\gamma_5 p - \frac{D+3F}{\sqrt{6}f}\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma_5 p \right] (\partial_\mu K^-) + \frac{D-F}{f}\bar{\Sigma}^+\gamma^\mu\gamma_5 p (\partial_\mu \bar{K}^0) \\ & \quad - \frac{D-3F}{\sqrt{6}f}\bar{p}\gamma^\mu\gamma_5 p (\partial_\mu \eta) + \frac{D+F}{\sqrt{2}f}\bar{p}\gamma^\mu\gamma_5 p + \frac{D+F}{f}\bar{n}\gamma^\mu\gamma_5 p (\partial_\mu \pi^-) \end{aligned} \quad (\text{B.145})$$

となり, バリオン数を保存するラグランジアンが得られる.

B.3 陽子崩壊の部分崩壊幅

前節までの議論で得た, バリオン数を破るラグランジアン (B.137) とバリオン数を保存するラグランジアン (B.145) を基に, 陽子崩壊の議論を進める. 陽子崩壊の議論は, [22] と同じ方法で行う. (B.137) と

(B.145) から構成されるラグランジアンは以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{BV}} + \mathcal{L}_{\text{BC}} \\
&= \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) n_L \right. \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \Sigma_L^0 \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) + 2 \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \Lambda_L \left. \right] \\
&\quad + \overline{(e_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) p_L - \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) \Sigma_L^+ \right] \\
&\quad + \overline{(e_{kR})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) p_R - \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) \Sigma_R^+ \right] \\
&\quad + \frac{i}{f} \overline{(\nu_{kL})^c} \left[\left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) \pi^- p_L \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} K^- p_L \right] \\
&\quad + \frac{i}{f} \overline{(e_{kL})^c} \left[+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \pi^0 p_L \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \eta p_L - \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} - \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) p_L \bar{K}^0 \right] \\
&\quad - \frac{i}{f} \overline{(e_{kR})^c} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \pi^0 p_R \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \eta p_R - \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} - \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) p_R \bar{K}^0 \right] \\
&\quad + \left[\frac{D-F}{\sqrt{2}f} \bar{\Sigma}^0 \gamma^\mu \gamma_5 p - \frac{D+3F}{\sqrt{6}f} \bar{\Lambda} \gamma^\mu \gamma_5 p \right] (\partial_\mu K^-) + \frac{D-F}{f} \bar{\Sigma}^+ \gamma^\mu \gamma_5 p (\partial_\mu \bar{K}^0) \\
&\quad - \frac{D-3F}{\sqrt{6}f} \bar{p} \gamma^\mu \gamma_5 p (\partial_\mu \eta) + \frac{D+F}{\sqrt{2}f} \bar{p} \gamma^\mu \gamma_5 p + \frac{D+F}{f} \bar{n} \gamma^\mu \gamma_5 p (\partial_\mu \pi^-)
\end{aligned} \tag{B.146}$$

これらを基に, それぞれの陽子崩壊のモードに対して部分崩壊幅について求めていく. 陽子崩壊については, バリオンの媒介しない 3 点相互作用項とバリオンの媒介する 3 点相互作用項の 2 項の和で考える. この方法によって, それぞれの陽子崩壊のモードに対する部分崩壊幅は以下のように与えられる.

B.3.1 $p \rightarrow \pi^0(e_k)^c$

最初に, 陽子が π 中間子と陽電子に崩壊するモードについて求めていく. 陽子と陽電子については, 左巻きと右巻きの両方が存在するのでそれぞれ分けて考える. 左巻きの場合には,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p_L \rightarrow \pi^0(e_{kL})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_\pi^2)^2 \\
&\quad \times \left| \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) + \frac{m_p}{m_p} \frac{D+F}{\sqrt{2}f} \cdot \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2} \right)^2 \times \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + D + F) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \right|^2
\end{aligned} \tag{B.147}$$

となる. また, 右巻きの場合には

$$\begin{aligned}
\Gamma(p_R \rightarrow \pi^0(e_{kR})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_\pi^2)^2 \\
&\times \left| -\frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k}) - \frac{m_p}{m_p} \frac{D+F}{\sqrt{2}f} \cdot (\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k}) \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \times \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} (1+D+F) (\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k}) \right|^2
\end{aligned} \tag{B.148}$$

となる.

B.3.2 $p \rightarrow \eta^0(e_k)^c$

次に, 陽子が η 中間子と陽電子に崩壊するモードについて求めていく. ここでも同様に, 陽子と陽電子については, 左巻きと右巻きの両方が存在するのでそれぞれ分けて考える. 左巻きの場合には,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p_L \rightarrow \eta^0(e_{kL})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_\eta^2)^2 \\
&\times \left| -\frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{6}} (\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SLL}^{(e)111k}) + \frac{m_p}{m_p} \left(-\frac{D-3F}{\sqrt{6}f}\right) \cdot (\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k}) \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2}\right)^2 \\
&\times \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \left[(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SLL}^{(e)111k}) + (D-3F) (\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k}) \right] \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2}\right)^2 \times \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \left[(1+D-3F) \alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + (-3+D-3F) \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right] \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2}\right)^2 \times \left| \sqrt{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{3} + F - \frac{D}{3}\right) \alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + F - \frac{D}{3}\right) \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right|^2
\end{aligned} \tag{B.149}$$

が得られる. また, 右巻きの場合には

$$\begin{aligned}
\Gamma(p_R \rightarrow \eta^0(e_{kR})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_\eta^2)^2 \\
&\times \left| \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) - \frac{m_p}{m_p} \left(-\frac{D-3F}{\sqrt{6}f} \right) \cdot \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2} \right)^2 \\
&\times \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} - 3\beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) + (D-3F) \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \right] \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2} \right)^2 \times \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \left[(1+D-3F) \alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + (-3+D-3F) \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right] \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2} \right)^2 \times \left| -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{3} + F - \frac{D}{3} \right) \alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + F - \frac{D}{3} \right) \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right|^2 \tag{B.150}
\end{aligned}$$

となる.

B.3.3 $p \rightarrow K^0(e_k)^c$

先ほどまでの議論と同様にして, 陽子が荷電 K 中間子と陽電子に崩壊するモードについて求めていく. ここでも, 陽子と陽電子については, 左巻きと右巻きの両方が存在するのでそれぞれ分けて考える. 左巻きの場合には,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p_L \rightarrow K^0(e_{kL})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_K^2)^2 \\
&\times \left| -\frac{1}{f} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} - \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) + \frac{m_p}{m_B} \frac{D-F}{f} \cdot \left[-\left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} - \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right) \right] \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2} \right)^2 \times \left| -\left[1 - \frac{m_p}{m_B} (F-D) \right] \alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} + \left[1 - \frac{m_p}{m_B} (F-D) \right] \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right|^2 \tag{B.151}
\end{aligned}$$

となる. ここで, m_B は, 媒介するバリオンの質量を表す. また, 陽子と陽電子が右巻きの場合には

$$\begin{aligned}
\Gamma(p_R \rightarrow K^0(e_{kR})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_K^2)^2 \\
&\times \left| \frac{1}{f} \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} - \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) - \frac{m_p}{m_B} \frac{D-F}{f} \cdot \left[-\left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right) \right] \right|^2 \\
&= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2} \right)^2 \times \left| \left[1 - \frac{m_p}{m_B} (F-D) \right] \alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} - \left[1 + \frac{m_p}{m_B} (F-D) \right] \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right|^2 \tag{B.152}
\end{aligned}$$

となる.

B.3.4 $p \rightarrow \pi^+(\nu_{kL})^c$

次に、陽子が荷電 π 中間子と陽ニュートリノに崩壊するモードについて求めると

$$\begin{aligned} \Gamma(p \rightarrow \pi^+(\nu_{kL})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_\pi^2)^2 \\ &\quad \times \left| \frac{1}{f} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) + \frac{m_p}{m_n} \frac{D+F}{f} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) \right|^2 \\ &= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2} \right)^2 \times \left| (1+D+F) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.153}) \end{aligned}$$

となる。

B.3.5 $p \rightarrow K^+(\nu_{kL})^c$

最後に、陽子が荷電 π 中間子と陽ニュートリノに崩壊するモードについて求める。

$$\begin{aligned} \Gamma(p \rightarrow K^+(\nu_{kL})^c) &= \frac{1}{32\pi m_p^3} (m_p^2 - m_K^2)^2 \\ &\quad \times \left| \frac{1}{f} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_p}{m_B} \left(-\frac{D+3F}{\sqrt{6}f} \right) \left[-\frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_p}{m_B} \frac{D-F}{\sqrt{2}f} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) + \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right\} \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{32\pi m_p^3 f^2} (m_p^2 - m_K^2)^2 \\ &\quad \times \left| \left(1 + \frac{m_p}{m_B} \frac{D+3F}{6} \cdot 2 \right) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{m_p}{m_B} \frac{D+3F}{6} + \frac{m_p}{m_B} \frac{D-F}{2} \right) \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m_p}{m_B} \frac{D+3F}{6} + \frac{m_p}{m_B} \frac{D-F}{2} \right) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) \right|^2 \\ &= \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2} \right)^2 \times \left| \left[1 - \frac{m_p}{m_B} \left(F - \frac{D}{3} \right) \right] \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[1 + \frac{m_p}{m_B} \left(F + \frac{D}{3} \right) \right] \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m_p}{m_B} \frac{2D}{3} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.154}) \end{aligned}$$

B.3.6 それぞれの陽子崩壊のモードの部分崩壊幅のまとめ

以上の議論から, それぞれの陽子崩壊のモードの部分崩壊幅は

$$\Gamma(p_L \rightarrow \pi^0(e_{kL})^c) = \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + F + D) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.155})$$

$$\Gamma(p_R \rightarrow \pi^0(e_{kR})^c) = \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \left| -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + F + D) \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.156})$$

$$\Gamma(p_L \rightarrow \eta^0(e_{kL})^c) = \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2}\right)^2 \left| \sqrt{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{3} + F - \frac{D}{3} \right) \alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + F - \frac{D}{3} \right) \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right|^2 \quad (\text{B.157})$$

$$\Gamma(p_R \rightarrow \eta^0(e_{kR})^c) = \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2}\right)^2 \left| -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{3} + F - \frac{D}{3} \right) \alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + F - \frac{D}{3} \right) \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right|^2 \quad (\text{B.158})$$

$$\Gamma(p_L \rightarrow K^0(e_{kL})^c) = \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \left| -\left[1 - \frac{m_p}{m_B}(F - D)\right] \alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} + \left[1 - \frac{m_p}{m_B}(F - D)\right] \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right|^2 \quad (\text{B.159})$$

$$\Gamma(p_R \rightarrow K^0(e_{kR})^c) = \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \left| \left[1 - \frac{m_p}{m_B}(F - D)\right] \alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} - \left[1 + \frac{m_p}{m_B}(F - D)\right] \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right|^2 \quad (\text{B.160})$$

$$\Gamma(p \rightarrow \pi^+(\nu_{kL})^c) = \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \left| (1 + F + D) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.161})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(p \rightarrow K^+(\nu_{kL})^c) = & \frac{m_p}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \left| \left[1 - \frac{m_p}{m_B} \left(F - \frac{D}{3}\right)\right] \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left[1 + \frac{m_p}{m_B} \left(F + \frac{D}{3}\right)\right] \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_p}{m_B} \frac{2D}{3} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.162}) \end{aligned}$$

ここで, くりこみ因子 A_{RL}^2 を考慮した場合には以下のように与えられる. くりこみ因子についての詳細な導出については省略する. くりこみ因子の導出については, [23] の Appendix E を参照していただきたい.

また, [23] の Appendix E における, くりこみ因子 A_R を本論文では, A_{RL} として用いている.

$$\Gamma(p_L \rightarrow \pi^0(e_{kL})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + F + D) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.163})$$

$$\Gamma(p_R \rightarrow \pi^0(e_{kR})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \left| -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + F + D) \left(\alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} + \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.164})$$

$$\Gamma(p_L \rightarrow \eta^0(e_{kL})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2}\right)^2 \left| \sqrt{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{3} + F - \frac{D}{3} \right) \alpha_H C_{SRL}^{(e)111k} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + F - \frac{D}{3} \right) \beta_H C_{SLL}^{(e)111k} \right|^2 \quad (\text{B.165})$$

$$\Gamma(p_R \rightarrow \eta^0(e_{kR})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{m_p^2}\right)^2 \left| -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{3} + F - \frac{D}{3} \right) \alpha_H C_{SLR}^{(e)111k} - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + F - \frac{D}{3} \right) \beta_H C_{SRR}^{(e)111k} \right|^2 \quad (\text{B.166})$$

$$\Gamma(p_L \rightarrow K^0(e_{kL})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \left| -\left[1 - \frac{m_p}{m_B}(F - D) \right] \alpha_H C_{SRL}^{(e)121k} + \left[1 - \frac{m_p}{m_B}(F - D) \right] \beta_H C_{SLL}^{(e)121k} \right|^2 \quad (\text{B.167})$$

$$\Gamma(p_R \rightarrow K^0(e_{kR})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 \left| \left[1 - \frac{m_p}{m_B}(F - D) \right] \alpha_H C_{SLR}^{(e)121k} - \left[1 + \frac{m_p}{m_B}(F - D) \right] \beta_H C_{SRR}^{(e)121k} \right|^2 \quad (\text{B.168})$$

$$\Gamma(p \rightarrow \pi^+(\nu_{kL})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \left| (1 + F + D) \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)111k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)111k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.169})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(p \rightarrow K^+(\nu_{kL})^c) = \frac{m_p A_{RL}^2}{32\pi f^2} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2}\right)^2 & \left| \left[1 - \frac{m_p}{m_B} \left(F - \frac{D}{3} \right) \right] \left(\alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)121k} - \alpha_H \tilde{C}_{SRL}^{(\nu)211k} \right) \right. \\ & + \left[1 + \frac{m_p}{m_B} \left(F + \frac{D}{3} \right) \right] \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)112k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)112k} \right) \\ & \left. + \frac{m_p}{m_B} \frac{2D}{3} \left(\alpha_H C_{SRL}^{(\nu)121k} + \beta_H C_{SLL}^{(\nu)121k} \right) \right|^2 \quad (\text{B.170}) \end{aligned}$$

これらの式を用いて, 本論文での陽子崩壊について議論していく.

付録 C

45 表現ヒッグスを含んだ $SU(5)$ GUT での湯川相互作用項のベータ関数

次に、湯川行列のベータ関数について考える。 S_1, S_3, S_8 が軽い場合を考える際に必要な S_1, S_3, S_8 が相互作用する湯川行列のラグランジアンについて考える。それ以外の場合については [18] の Appendix C を参照していただきたい。

SM の湯川行列のベータ関数で見たように、湯川相互作用項のラグランジアンが

$$-\mathcal{L}_Y = \left[Y_{\psi\psi'}^\phi \right]_{jk} \left[\bar{\psi} \right]_j \phi [\psi']_k \quad (\text{C.1})$$

と与えられた場合には、湯川行列 $Y_{\psi\psi'}^\phi$ のベータ関数は

$$\frac{d}{d \log \mu} Y_{\psi\psi'}^\phi = \frac{1}{(4\pi)^2} \beta_{Y_{\psi\psi'}^\phi} \quad (\text{C.2})$$

$$\beta_{Y_{\psi\psi'}^\phi} = -3 \sum_j g_i^2 \left[C_2^i(\psi) Y_{\psi\psi'}^\phi + Y_{\psi\psi'}^\phi C_2^i(\psi') \right] + \frac{1}{2} \left[Y_2(\psi) Y_{\psi\psi'}^\phi + Y_{\psi\psi'}^\phi Y_2(\psi') \right] + Y_{\psi\psi'}^\phi \Theta(\phi) + 2\Gamma_{Y_{\psi\psi'}^\phi} \quad (\text{C.3})$$

と与えられる。

C.1 45 表現ヒッグスが与える湯川行列のベータ関数

本論文では、GUT スケールよりも低い場合について議論していく。Minimal $SU(5)$ GUT の議論ができるのは GUT スケールよりも大きい場合なので、この場合は SM の湯川相互作用項のベータ関数について考える。この場合、ベータ関数を構成する 4 つの部分について標準模型でどのようになるか確認していく。

C.1.1 45 表現ヒッグスでのカラー表現による 1-loop のベータ関数への寄与

この節では、 S_1, S_3, S_8 による 1-loop のベータ関数への寄与を考えていく。最初に、ゲージボソンのループの寄与は

$$\begin{aligned} \sum_i g_i^2 C_2^i(q_L) &= \frac{4}{3} g_s^2 + \frac{3}{4} g^2 + \frac{1}{36} g'^2, & \sum_i g_i^2 C_2^i(u_R) &= \frac{4}{3} g_s^2 + \frac{4}{9} g'^2, & \sum_i g_i^2 C_2^i(d_R) &= \frac{4}{3} g_s^2 + \frac{1}{9} g'^2 \\ \sum_i g_i^2 C_2^i(\ell_L) &= \frac{3}{4} g^2 + \frac{1}{4} g'^2, & \sum_i g_i^2 C_2^i(e_R) &= g'^2 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

と与えられる. ただし, 反粒子に対しては $C_2^i(\psi^c) = C_2^i(\psi)$ を満たす.

次に, フェルミオンへの自己エネルギー寄与は

$$Y_2(q_L) = Y_U^\dagger Y_U + Y_D^\dagger Y_D + Y_1^{QL*} \left(Y_1^{QL} \right)^T + 2Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QQ} + 6Y_3^{QQ\dagger} Y_3^{QQ} + 3Y_3^{QL*} \left(Y_3^{QL} \right)^T + \frac{16}{3} Y_8^{UQ\dagger} Y_8^{UQ} + \frac{16}{3} Y_8^{DQ\dagger} Y_8^{DQ} \quad (C.5)$$

$$Y_2(u_R) = 2Y_U Y_U^\dagger + Y_1^{UE} Y_1^{UE\dagger} + 2 \left(Y_1^{DU} \right)^T Y_1^{DU*} + \frac{32}{3} Y_8^{UQ} Y_8^{UQ\dagger} \quad (C.6)$$

$$Y_2(d_R) = 2Y_D Y_D^\dagger + 2Y_1^{DU} Y_1^{DU\dagger} + \frac{32}{3} Y_8^{DQ} Y_8^{DQ\dagger} \quad (C.7)$$

$$Y_2(\ell_L) = Y_E^\dagger Y_E + 3Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QL} + 9Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QL} \quad (C.7)$$

$$Y_2(e_R) = 2Y_E Y_E^\dagger + 3 \left(Y_1^{UE} \right)^T Y_1^{UE*} \quad (C.8)$$

と与えられる. ただし, 反粒子に対しては $Y_2(\psi^c) = [Y_2(\psi)]^T$ を満たす. これら 2 つの寄与は S_1, S_3, S_8 の種類に関係なく全て同じ寄与を持つ. それに対して, スカラーへの自己エネルギー寄与と頂点補正については粒子の種類に依存する. 次の節では, それぞれの寄与の違いについて見ていく.

C.1.2 カラー三重項による 1-loop のベータ関数への寄与

カラー三重項 S_1 の場合, スカラーへの自己エネルギー寄与は

$$\Theta(S_1) = \text{tr} \left(2Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QL} + Y_1^{UE\dagger} Y_1^{UE} + 2Y_1^{DU\dagger} Y_1^{DU} + 2Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QQ} \right) \quad (C.9)$$

と与えられる. ただし, 反粒子に対しては $\Theta(\phi^*) = \Theta(\phi)$ となる.

最後に, S_1 の場合の頂点補正については

$$\Gamma_{Y_1^{QL}} = -Y_U^T Y_1^{UE*} Y_E - 2Y_1^{QQ} Y_1^{QQ\dagger} Y_1^{QL} + 6Y_3^{QQ} Y_1^{QQ\dagger} Y_3^{QL} \quad (C.10)$$

$$\Gamma_{Y_1^{UE}} = -2Y_U Y_1^{QL*} Y_E^T - 2 \left(Y_1^{DU} \right)^T Y_1^{DU*} Y_1^{UE} \quad (C.11)$$

$$\Gamma_{Y_1^{DU}} = 2Y_D Y_1^{QQ\dagger} Y_U^T - Y_1^{DU} Y_1^{UE*} \left(Y_1^{UE} \right)^T - \frac{16}{3} Y_8^{DQ} Y_1^{QQ\dagger} \left(Y_8^{UQ} \right)^T \quad (C.12)$$

$$\Gamma_{Y_1^{QQ}} = Y_D^T Y_1^{DU*} Y_U + Y_U^T Y_1^{DU\dagger} Y_D - Y_1^{QL} Y_1^{QL\dagger} Y_1^{QQ} - Y_1^{QQ} Y_1^{QL*} \left(Y_1^{QL} \right)^T - 3Y_3^{QQ} Y_1^{QL*} \left(Y_3^{QL} \right)^T + 3Y_3^{QL} Y_1^{QL\dagger} Y_3^{QQ} - \frac{8}{3} \left(Y_8^{UQ} \right)^T Y_1^{DU\dagger} Y_8^{DQ} - \frac{8}{3} \left(Y_8^{DQ} \right)^T Y_1^{DU*} Y_8^{UQ} \quad (C.13)$$

となる.

C.1.3 カラー反三重項による 1-loop のベータ関数への寄与

カラー反三重項 S_3 の場合, スカラーへの自己エネルギー寄与は

$$\Theta(S_3) = \text{tr} \left(2Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QL} + 2Y_3^{QQ\dagger} Y_3^{QQ} \right) \quad (C.14)$$

と与えられる. ただし, 反粒子に対しては $\Theta(\phi^*) = \Theta(\phi)$ となる.

最後に, S_3 の場合の頂点補正については

$$\Gamma_{Y_3^{QL}} = 2Y_1^{QQ} Y_3^{QQ\dagger} Y_1^{QL} + 2Y_3^{QQ} Y_3^{QQ\dagger} Y_3^{QL} \quad (C.15)$$

$$\Gamma_{Y_3^{QQ}} = -Y_1^{QQ} Y_3^{QL*} \left(Y_1^{QL} \right)^T + Y_1^{QL} Y_3^{QL\dagger} Y_1^{QQ} + Y_3^{QQ} Y_3^{QL*} \left(Y_3^{QL} \right)^T + Y_3^{QL} Y_3^{QL\dagger} Y_3^{QQ} \quad (C.16)$$

となる.

C.1.4 カラー八重項による 1-loop のベータ関数への寄与

カラー八重項 S_8 の場合, スカラーへの自己エネルギー寄与は

$$\Theta(S_8) = \text{tr} \left(2Y_8^{DQ\dagger} Y_8^{DQ} + 2Y_8^{UQ\dagger} Y_8^{UQ} \right) \quad (\text{C.17})$$

と与えられる. ただし, 反粒子に対しては $\Theta(\phi^*) = \Theta(\phi)$ となる.

最後に, S_8 の場合の頂点補正については

$$\Gamma_{Y_8^{UQ}} = -Y_U Y_8^{DQ\dagger} Y_D - (Y_1^{DU})^T Y_8^{DQ*} Y_1^{QQ} + \frac{2}{3} Y_8^{UQ} Y_8^{DQ\dagger} Y_8^{DQ} \quad (\text{C.18})$$

$$\Gamma_{Y_8^{DQ}} = -Y_D Y_8^{UQ\dagger} Y_U - Y_1^{DU} Y_8^{UQ*} Y_1^{QQ} + \frac{2}{3} Y_8^{DQ} Y_8^{UQ\dagger} Y_8^{UQ} \quad (\text{C.19})$$

となる.

謝辞

本論文の作成にあたり、指導教員である大阪公立大学の波場直之教授、清水康弘研究員、そして明治学院大学の山田敏史助手には、多大なるご尽力と熱心なご指導を賜り、心より感謝申し上げます。波場教授には本論文のアイデアをご提案いただき、また、数多くの示唆に富む助言をいただきました。清水研究員および山田助手には、必要な知識の習得に際して様々な知見をご教授いただき、研究の指針が立たない時には具体的な研究方法をご提示いただきました。心より御礼申し上げます。また、島根大学の田中宏志教授には、研究活動の支持で多大なるご支援をいただきました。感謝申し上げます。さらに、大阪公立大学の西中崇博准教授には、定期的に筆者が論文について説明を行う形で分野外から貴重な助言をいただきました。ありがとうございました。同期の池本順平君、田辺義博さん、ならびに大阪公立大学の中西智暉君には、ゼミや議論を通じて励まし合い、助言をいただきました。学部と同級生である中上貴也君、村上成美さん、両見南奈さんにも困難な時期に友人として温かいサポートをいただきました。心より感謝いたします。最後に、本論文の完成には研究室、友人、家族の全員からの支援が不可欠でした。ここに、皆様に深く感謝の意を表します。本当にありがとうございました。

長野佳輔

参考文献

- [1] J. C. Pati and A. Salam, “Is Baryon Number Conserved?”, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 661 (1973).
- [2] J. C. Pati and A. Salam, “Lepton Number as the Fourth Color”, *Phys. Rev. D* **10**, 275 (1974).
[Erratum: *Phys. Rev. D* **11**, 703 (1975)].
- [3] H. Georgi and S. L. Glashow, “Unity of All Elementary-Particle Forces” *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).
- [4] H. Georgi, H. R. Quinn, and S. Weinberg, “Hierarchy of Interactions in Unified Gauge Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 451 (1974).
- [5] H. Georgi, “The State of the Art—Gauge Theories”, *AIP Conf. Proc.* **23**, 575 (1975).
- [6] H. Fritzsch and P. Minkowski, “Unified Interactions of Leptons and Hadrons”, *Annals Phys.* **93** (1975) 193-266.
- [7] A. Takenaka *et al.* [Super-Kamiokande], “Search for proton decay via $p \rightarrow e^+ \pi^0$ and $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ with an enlarged fiducial volume in Super-Kamiokande I-IV”, *Phys. Rev. D* **102**, 112011 (2020) [arXiv:2010.16098 [hep-ex]].
- [8] K. S. Babu and E. Ma, “Suppression of proton decay in SU(5) grand unification”, *Phys. Lett. B* **144**, 381 (1984).
- [9] H. Murayama and T. Yanagida, “A viable SU(5) GUT with light leptoquark bosons”, *Mod. Phys. Lett. A* **07**, 147 (1992).
- [10] A. Givon, L. J. Hall, and U. Sarid, “SU(5) unification revisited”, *Phys. Lett. B* **271**, 138 (1991).
- [11] I. Dorsner and P. Fileviez Perez, “Unification versus proton decay in SU(5)”, *Phys. Lett. B* **642**, 248 (2006), [arXiv:hep-ph/0606062].
- [12] P. Fileviez Perez, “Renormalizable Adjoint SU(5)”, *Phys. Lett. B* **654**, 189 (2007), [arXiv:hep-ph/0702287].
- [13] H. Georgi, C. Jarlskog, “A new lepton-quark mass relation in a unified theory”, *Phys. Lett. B* **86**, 297 (1979).
- [14] N. Sakai, “Naturalness in supersymmetric GUTS”, *Z. Phys. C* **11**, 153 (1981).
- [15] S. Dimopoulos and H. Georgi, “Softly broken supersymmetry and SU(5)”, *Nucl. Phys. B* **193**, 150 (1981).
- [16] N. Haba, K. Nagano, Y. Shimizu and T. Yamada, “Gauge Coupling Unification and Proton Decay via 45 Higgs Boson in SU(5) GUT”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2024**, 053B05 (2024). [arXiv:2402.15124 [hep-ph]].
- [17] N. Haba, Y. Mimura and T. Yamada, “Proton lifetime upper bound in non-SUSY SU(5) GUT”, *Phys. Rev. D* **99**, 075018 (2019). [arXiv:1812.08521 [hep-ph]]

- [18] T. Goto, S. Mishima and T. Shindou, “Flavor physics in SU(5) GUT with scalar fields in the 45 representation”, *Phys. Rev. D* **108**, 095012 (2023) [arXiv:2308.13329 [hep-ph]].
- [19] N. Haba, K. Nagano, Y. Shimizu and T. Yamada, “Proton Decay and Gauge Coupling Unification in an Extended SU(5) GUT with 45-Dimensional Higgs”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2024**, 103B04 (2024). [arXiv:2406.11091 [hep-ph]].
- [20] D. I. Kazakov, “Beyond the Standard Model (In Search of Supersymmetry)”, [arxiv:hep-ph/0012288 [hep-ph]].
- [21] M. Claudson, M. B. Wise and L. J. Hall, “Chiral lagrangian for deep mine physics”, *Nucl. Phys. B* **195**, 297-307 (1982).
- [22] S. Chadha and M. Daniel, “Chiral lagrangian calculation of nucleon decay modes induced by d=5 supersymmetric operators”, *Phys. Rept.* **441**, 191-317 (2007) [arXiv:hep-ph/0601023 [hep-ph]].
- [23] P. Nath and P. Fileviez Perez, “Proton stability in grand unified theories, in strings and in branes”, *Nucl. Phys. B* **229**, 105-114 (1983) [arXiv:hep-ph/0601023 [hep-ph]].
- [24] R.L. Workman *et al.* [Particle Data Group], “Review of Particle Physics”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022**, 083C01 (2022)
- [25] Y. Aoki, T. Izubuchi, E. Shintani and A. Soni, “Improved lattice computation of proton decay matrix elements”, *Phys. Rev. D* **96**, 014506 (2017) [arXiv:1705.01338 [hep-lat]].
- [26] N. Haba and H. Murayama, “Anarchy and hierarchy”, *Phys. Rev. D* **63**, 053010 (2001) [arXiv:hep-ph/0009174 [hep-ph]].
- [27] R. Matsumoto *et al.* [Super-Kamiokande], “Search for proton decay via $p \rightarrow \mu^+ K^0$ in 0.37 megaton-years exposure of Super-Kamiokande”, *Phys. Rev. D* **106**, 072003 (2022) [arXiv:2208.13188 [hep-ex]].
- [28] K. Abe *et al.* [Super-Kamiokande], “Search for proton decay via $p \rightarrow \nu K^+$ using 260 kiloton-year data of Super-Kamiokande”, *Phys. Rev. D* **90**, 072005 (2014) [arXiv:1408.1195 [hep-ex]].
- [29] K. Kobayashi *et al.* [Super-Kamiokande], “Search for nucleon decay via modes favored by supersymmetric grand unification models in Super-Kamiokande-I”, *Phys. Rev. D* **72**, 052007 (2005) [arXiv:hep-ex/0502026 [hep-ex]].
- [30] K. Abe *et al.* [Super-Kamiokande], “Search for Nucleon Decay via $n \rightarrow \bar{\nu} \pi^0$ and $p \rightarrow \bar{\nu} \pi^+$ in Super-Kamiokande”, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 121802 (2014). [arXiv:1305.4391 [hep-ex]].
- [31] P. Langacker, “Grand Unified Theories and Proton Decay”, *Phys. Rept.* **72**, 185 (1981).
- [32] S. Bertolini, L. Luzio, and M. Malinsky, “Intermediate mass scales in the nonsupersymmetric SO(10) grand unification: A reappraisal”, *Phys. Rev. D* **80**, 015013 (2009). [arXiv:0903.4049 [hep-ph]]
- [33] A. Hayreter and G. Valencia, “LHC constraints on color octet scalars”, *Phys. Rev. D* **96**, 035004 (2017). [arXiv:1703.04164 [hep-ph]].
- [34] I. Dorsner, S. Fajfer, J. F. Kamenik and N. Kosnik, “Can scalar leptoquarks explain the f(D(s)) puzzle?”, *Phys. Lett. B*, **682**, 67 (2009) [arXiv:0906.5585 [hep-ph]].
- [35] I. Dorsner, S. Fajfer and N. Kosnik, “Heavy and light scalar leptoquarks in proton decay”, *Phys. Rev. D* **86**, 015013 (2012) [arXiv:1204.0674 [hep-ph]].