

算数科における平行四辺形概念の形成をねらいとした学習指導に関する研究 — 子ども同士の話し合いを通じた概念変容に着目して —

板垣 大助

研究の背景と目的

近年、一人一台端末の普及により、「個別最適な学び」に焦点を当てた学習が推進されている。その一方で、『個別最適な学び』が『孤立した学び』に陥らないよう（文科省，2021：18）との指摘にもあるように、他者との相互作用を通じた学びのあり方を捉え直していく必要があるといえる。

我が国においては、教師と子ども、あるいは子ども同士の話し合いを取り入れた算数科授業が日常的に行われていると見受けられる。一方で、話し合うことが目的化し、子どもの理解に必ずしも良い影響を及ぼさない授業も散見される。このことから、本来あるべき、学習内容の理解を目的とした話し合いについて再考していく必要があるといえるだろう。

全国学力・学習状況調査の結果から、算数、数学科における学習の理解についての現状をみると、中学校における図形の証明に関する問題の得点率が特に低いということが捉えられる（国立教育施策研究所，2024）。数学教育における中1ギャップの要因の一つが証明学習だという主張からも（國宗，2017），証明学習の改善に着手することの意義は大きいだろう。図形の証明学習を概観すると、中学校2年生では証明を通して、平行四辺形の包摂関係についての学習が行われる。これについての実態調査が、過去40年間に3度に渡って行われてきたが、どれも理解は十分な状態ではなく、現在は40年前と比較し低下しているという結果が示されている（小関他，1984；国宗，2000；近藤他，2024）。このような現状について、平行四辺形の包摂関係の理解に至るには、中学校2年生における証明を通じた学習のみでは十分でなく、中学校1年生までにその準備段階となる平行四辺形概念へと至るような学習の必要性が指摘されている（榎戸，1987；松尾，2000）。そこで、具体的な学習のあり方として、図形の性質や定義といった言語による理解が必要とされる図形の概念形成には、言語による他者との相互作用が正の影響を与える可能性があると予想される。

これらの問題意識に鑑み、本研究では、図形の概念形成に寄与する、子ども同士の相互作用を通じた学習指導を提案し、その影響を検証することを目的とする。また、目的の達

成を志向し、以下に研究課題を設定する。

-
- 〈1〉子ども同士の相互作用を中心に展開する授業実践における特徴を指摘し、本研究における認識論的立場を明示すること。
 - 〈2〉算数科授業にみる子ども同士の相互作用を数学的討議という概念で捉え、現代の話し合いにおける課題を改善する、新たな数学的討議のあり方を指摘すること。
 - 〈3〉平行四辺形認知の段階を高めるうえで、子ども同士の話し合いの中で明示されるべき内容について指摘すること。
 - 〈4〉二つの図形の関係を包摂関係として捉えることを目指し、概念定義と概念イメージの両側面をふまえた学習指導を計画、実施し、その影響を考察すること。
 - 〈5〉二つの図形間における正しい包摂関係を捉える際に求められる、よりよい説明への変容に影響する、子ども同士の相互作用の特徴を指摘すること。
 - 〈6〉初期学習にて包摂概念として平行四辺形を捉える際における、学習の影響について事例的に指摘すること。
-

1. 算数科授業における概念変容に影響する数学的討議

本章では、算数科における相互作用の役割と課題にふれ、本研究における認識論的立場を明示した上で、算数科授業における子ども同士の話し合いを数学的討議として捉え、現代の課題に対応する話し合いのあり方について思考する。

子ども同士の相互作用を通した学習指導の事例としては、ランパート（1995）の授業実践が存在する。その特徴として、「資質」、「知識」、「教師の役割」の3点から考察を加えることで、相互作用によって身につく子どもの資質や知識の存在、数学における熟達者としての教師のふるまいについて指摘した。さらに、教師のもつ認識論は授業実践に影響を与えると推察されるため、学習指導の提案にあたっては、認識論的立場を明示する必要があると考えられる。そこで、過去の認識論研究を概観し、本研究では、議論への参加を学習と位置付ける社会文化主義の立場から学習指導を構想することとした。

他者との相互作用の在り方や捉え方は討論、教え合い、協働、交渉等様々である。本研究では、対等な関係性と合意を重視する点からも、子ども同士の相互作用を討議として捉え、特に算数科における話し合いを数学的討議として捉える。数学的討議を捉える枠組みとしては、Pirie & Schwarzenberger（1988）の提唱する“mathematical discussion”がある。これは、「生徒による本質的な貢献と相互作用のある数学的教材による目的のある話し合い」

(Pirie & Schwarzenberger, 1988 : 461 (筆者訳)) であるが、昨今の我が国における算数科授業では、日常的にこの枠組みに当てはまる話し合いが展開されていると推察される。そこで、話し合ったはずが学習の理解に至らないといった、現代の話し合いにおける課題の改善にかなう枠組みを再構築する必要性から、調査Ⅰにおける研究課題を焦点化した。

2. 数学的討議を捉える枠組みの検討

本章では、Pirie & Schwarzenberger の提唱する“mathematical discussion”を理論的視座とし、実験授業（調査Ⅰ）を計画、実施することから、学習の理解に至ることを目的とした新たな数学的討議のあり方について考察する。

(1) 調査Ⅰの概要

調査Ⅰの目的における下位課題として「1. mathematical discussion の枠組みで捉えた現代の算数科授業における話し合いの様相を指摘すること」、「2. 現代の話し合いにおける課題の改善にかなう数学的討議の条件を整備すること」、「3. 真となる事柄の根拠となる情報提示の要素の特定を行うこと」の3点を設定した。課題の遂行にあたっては、島根県公立小学校の小学校4年生1学級（24名）を対象に、全3時間分の授業を計画・実施し、そこで得られた音声・映像データやプレテスト、ワークシートを分析し、考察を加えた。分析の中心とした第2時では、子どもによって異なる解が導き出され、問題の解決のために合意に向かって話し合いが進むことを意図して、植木算とよばれる以下の教材を用いた。

【第2時で扱われた教材】

あおいさんたちは、7本の木を1列にならべて植えました。木は2mずつはなれています。両はしの木の間は何mですか。（木の太さは考えない。）

分析の手順として、まず、授業の映像、音声を参照し、トランスクリプトを発話に区切った。次に、第2時のグループでの話し合いの発話記録を参照し、“mathematical discussion”の枠組みからそれぞれのグループでの話し合いの様相を捉えた上で、現代の話し合いの課題の改善にかなう枠組みの条件整備を行った。さらに、発話とワークシートから子どもの認識の変容に影響を与えたと捉えられる情報提供を特定し、真となる事柄の根拠となる情報の提示の要素について考察した。

(2) 結果と考察

下位課題1については、広く教室で日常的に行われている授業が“mathematical discussion” (Pirie & Schwarzenberger, 1988) の枠組みに当てはまる可能性が高いことを指摘した。

下位課題2については、合意に基づき、真となる事柄に向かうことを重視した数学的討議を真理志向数学的討議として枠組みの構築を行った（表1：“mathematical discussion”に下線部を筆者が加筆）。下位課題3については、真となる事柄の根拠となる情報の提示の要素として、「真である内容に基づく飛躍のない推論による情報提供」、「音声言語を補完する視覚的媒介物を用いた情報提供」（板垣・下村，2024）の2点を指摘した。

表1 真理志向数学的討議の条件

1. 真となる事柄に至るための話し合い	2. 真となる事柄が見出せる数学的教材	3. 真となる事柄の根拠となる情報の提示	4. 真であるとする事柄の合意に至る相互作用
すべての参加者が意識してなくても、明確な目的がある。これらの目的は、グループによって設定されたものかもしれない。暗黙的または明示的に、グループ全体として受け入れられている。また、これらの目的には真となる事柄を互いの本質的な合意の上で定めることに向かうということが含まれている。	目的そのもの、または話の過程で現れる補助的な目標のどちらかが数学的な内容や過程で表現されている。また、それは個人の価値観に委ねられるものではなく、真となる事柄が明確に定まるものでなければならない。	少なくとも何人かの生徒からの情報提供が話や思考の前進（真となる事柄を見出すこと）を助ける。これは、討議に新しい要素を導入することと、教師の質問に対する事実の回答など単なる受動的な反応を区別しようとするものである。	話の中の動きが他の参加者に伝わったことを示す（全員でなくともその参加者の立場が明らかになる反応が返される）。これは、グループ内の態度の変化や、精神的な承認を示す言語的な手がかり、あるいは批判的な聞き方が行われたことを示す身体的な反応によって証明されるかもしれないが、教師や他の生徒から指示されたことに対する単なる道具的な反応によって証明されるわけではない。

出典：板垣（2025）. 現代に求められる mathematical discussion の構築—小学校4年生における話し合い活動の分析を通して—, p59 より引用。

3. 平行四辺形概念の形成に関わる相互作用の影響

本章では、先行研究を概観することから、平行四辺形概念の形成に関わる学習における課題や、図形概念形成に関わる子ども同士の話し合いの価値を思考する。その上で、実験授業（調査Ⅱ）を計画、実施し、図形概念形成に寄与する子ども同士の話し合いの特徴を指摘することを試みる。

文献調査より、平行四辺形概念形成に関わる学習の課題としては、小学校段階において包摂関係にふれる機会が失われたこと、小中学校間の接続の役割を担う学習内容が不足していること、理論的根拠に基づいた、図形概念形成に関わる学習指導についての研究が不足していることの3点を指摘した。また、概念形成に関わる子ども同士の話し合いの価値として、概念に柔軟性をもたせることができること（R.R.スケンプ，1973）、概念の変容に迫られる状況を作り出せることの2点を指摘し、図形概念形成に影響を与える子ども同士の相互作用に焦点をあてた先行研究の存在（榎戸，1987；山本，1993）を確認することから、そこで得られた知見を調査Ⅱへの示唆とした。

(1) 調査Ⅱの概要

調査Ⅱを計画、実施するにあたって、調査Ⅱで目指すべき平行四辺形認知の段階を設定すると共に、研究課題を焦点化した。調査Ⅱでは、小関他（1984）の理論的枠組みを視座とすることから、本研究における小学校段階で目指すべき状態を、長方形やひし形、正方形、つぶれた平行四辺形を平行四辺形の同類としてとらえる段階Ⅱの状態とした。さらに研究課題を、算数科授業における平行四辺形認知の段階を小関他（1984）の段階Ⅱへと高めることに寄与する、子ども同士の話し合いの中で明示されるべき内容について事例的に明らかにすることとした。課題の遂行にあたっては、島根県公立小学校の小学校4年生1学級（24名）を対象に全3時間分の実験授業を計画・実施し、そこで得た音声・映像データやプレテスト、ワークシートを分析した。

分析の手順として、まずは調査問題の結果を集計し、平行四辺形認知の段階について、全員が段階Ⅱへ向上したグループとそうでなかったグループを特定した。次に、発話記録や映像からそれぞれのグループにおける話し合いの様相の特徴を抽出し、両者を比較することから、平行四辺形認知の段階を高めることに影響する、話し合いの中で明示されるべき内容について考察した。

(2) 結果と考察

分析と考察を通して、図形の概念形成に寄与する話し合い活動の中で明示されるべき内容として次の2点を指摘した。

-
- 〈1〉定義だけでなく、性質をふまえた図形同士の共通点
 - 〈2〉操作的活動についての説明が、変化していくある図形の中に他の図形の存在を認めていること
-

これらの知見を生かし、調査Ⅲでは、図形の概念形成に寄与する望ましい相互作用が表出されるよう学習指導を計画、実施し、その影響を事例的に検証する。

4. 平行四辺形概念の拡張を目指した学習指導の提案

本章では、新たな理論的枠組みの検討と学習指導の構想を行った上で、実験授業（調査Ⅲ）を計画、実施する。そこで得られたデータを分析することから、学習指導の影響を事例的に検証すると共に、子ども同士の相互作用の特徴を指摘する。

本章において、新たに理論的枠組みとして援用するに至ったのは、「望ましい図形概念の状態への道筋」（松尾，1996）と「状態3'dから状態4'eへの移行を促す要因」（松尾，1997）

である。「望ましい図形概念の状態への道筋」(松尾, 1996) は, 二つの図形同士の関係をどのように捉えているかを, 言語 (概念定義) とイメージ (概念イメージ) という二つの側面から捉え, その状態が向上する過程を明らかにしたものである。具体的には, 二つの図形を弁別できず, それらの関係を説明もできない状態 1'a から, 二つの図形の類似点や相違点を捉え, 説明が可能になる状態 (2'a~3'd) を経て, 二つの図形を包摂関係で捉え, それらの一般と特殊の関係を説明できる 4'e へと向上していく。この枠組みは, 最終的に, 図形同士を包摂関係として捉える状態に至ることを目指している点が, 本研究の目的と重なる。また, 二つの図形同士の関係に限定し, その認知状態を概念定義, 概念イメージの両面から捉えられるように構築されているため, より詳細に子どもの図形概念の状態を捉えることができると推察される。この枠組みを参照することから, 調査Ⅲにおいて目指すべき図形概念の状態として, 状態 4'e を設定した。

「状態 3'd から状態 4'e への移行を促す要因」(松尾, 1997) については, 「相違点を関係づけて捉えること」「一般と特殊の関係についての明確なイメージをもつこと」「定義の意味を正確に捉えること」の 3 点が挙げられている。さらに, これらは「望ましい図形概念の状態への道筋」(松尾, 1996) の枠組みに基づいて抽出されたものであるため, これを理論的視座とすることで, 概念定義と概念イメージの両面に影響を与えうる学習指導を構想できると想定し, 本研究の理論的枠組みに設定した。

この二つの理論的枠組みと, 調査Ⅱの考察から示唆を得た上で, 調査Ⅲにおける学習指導を構想した。概念定義の変容を目的とした手立てとして, 図形同士の類似点・相違点を整理するための表, 子どもの身近な事例を通して包摂関係を理解するための情報提示, 小グループによる話し合い活動のテーマ設定の 3 点を設定した。概念イメージの変容に対する手立てとしては, 一人一台端末を用いた GeoGebra による図形の変形を行った。それと同時に概念定義の変容をねらい, 図形の性質に基づいて図形の変形について記述する活動を設定した。

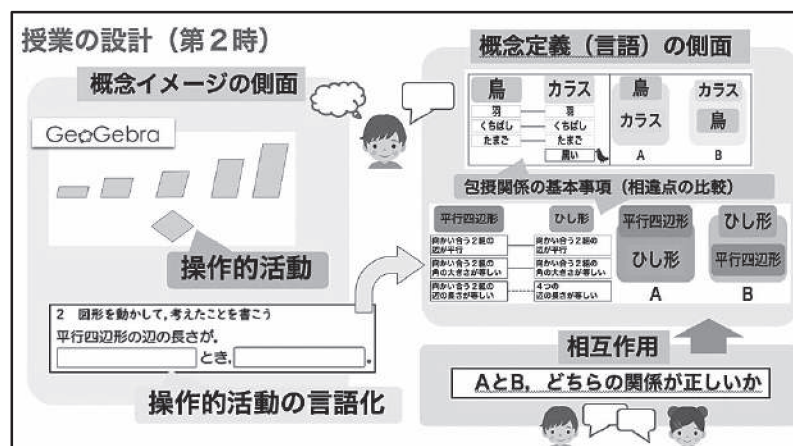


図1 学習指導の全体像

(1) 調査Ⅲの概要

調査Ⅲの目的として、「1. 二つの図形の関係を包摂関係として捉える（状態 4'e）ことを目指し、概念定義と概念イメージの両側面をふまえた学習指導を、実験授業（調査Ⅲ）として計画、実施し、その影響を考察すること」、「2. 二つの図形間における正しい包摂関係を捉える際に求められる、よりよい説明への変容に影響する子ども同士の相互作用の特徴を指摘すること」の 2 点を設定した。さらに、目的 2 の下位課題として、「1. 包摂関係の理解に至りやすい説明のタイプを指摘すること」「2. 望ましい説明タイプへの変容を促す子ども同士の話し合いにおいて、明示されるべき情報提供の特徴を指摘すること」の 2 点を設定した。課題の遂行にあたっては、島根県公立小学校の小学校 6 年生 1 学級（24 名）を対象として全 3 時間の実験授業（調査Ⅲ）を計画、実施し、そこで得た音声・映像データやプレテスト、ポストテスト、ワークシートを分析することから、2 点の目的について考察した。

分析の手順として、目的 1 については、第一に、プレテスト、ポストテストの結果を集計し、包摂認知、概念イメージ、概念定義の状態の変容を把握した。第二に、授業の映像、音声を参照し、トランスクリプトを発話に区切った。第三に、第 2 時、第 3 時で状態 4'e に至った子どものグループでの発話、ワークシートの記述から、状態 4'e に至るための学習指導のあり方を分析した。目的 2 については、第一に、児童のワークシートやポストテストにおける、包摂関係について説明された記述を分類し、説明タイプを設定した。分類の際は、松尾（1997）における、状態 4'e への移行を促す 3 つの要因を参照した。第二に、説明タイプごとの包摂理解の回答を集計し、より包摂関係の理解に至る可能性の高い説明タイプを特定した。第三に、説明タイプが変容した児童のグループにおける発話プロトコルから、包摂関係の理解に至る説明への変容を促す話し合いの特徴について考察した。

(2) 結果と考察

目的 1 については、学習指導が与えた影響として次の 4 点を指摘した。

- 〈1〉包摂関係の基本事項を理解させるための情報提示が、図形の包摂関係の理解に影響を与える。
- 〈2〉図形の性質が整理された表によって、図形の相違点に焦点を当てた議論がなされる。
- 〈3〉子ども同士の相互作用によって概念定義の状態が高まる可能性がある。
- 〈4〉図形の変形を行う操作的活動によって、変形の順序に依拠して図形の包摂関係を理解しようとする可能性がある。

目的 2 の下位課題 1 については、説明タイプ 2（操作的活動を根拠にする説明）よりも説明タイプ 1（図形の性質や条件付加を根拠にする説明）の方が、正しい包摂関係の理解に至りやすいことを指摘した。

下位課題 2 については、次の 5 点が指摘された。

- 〈1〉 2 つの図形の相違点となる性質同士を条件として捉え、その条件の厳しさ（ゆるさ）という視点で比較し、上位・下位概念が決定されること
- 〈2〉 2 つの図形の相違点となる性質同士を条件として捉え、条件の個数という視点で比較し、上位・下位概念が決定されること
- 〈3〉 変形の順序を根拠にした説明に対しては、根拠の飛躍について指摘があること
- 〈4〉 2 つの図形の相違点となる性質において、抽象した共通点の内容が語られること
- 〈5〉 条件付加の内容が語られること

5. 初期学習における包摂概念として平行四辺形を捉える学習指導の提案

前章までは、対象概念としての「つぶれた平行四辺形」から、長方形やひし形も平行四辺形と捉える包摂概念への拡張をねらい、調査を進めてきた。学習指導の影響がみられる一方で、図形概念を拡張することの困難さもみられた。

よって、本章では、平行四辺形の初期指導に焦点をあてた学習指導について考察する。なぜなら、初期指導において、「長方形も平行四辺形である」という包摂概念が形成されたならば、より中学校 2 年生における包摂関係の理解に至りやすくなると考えるからである。

（1）調査Ⅳの概要

初期学習にて包摂概念として平行四辺形を捉える際における、学習の影響について事例的に指摘することを目的として調査Ⅳを実施した。下位課題として、「1. 初期学習にて包摂概念として平行四辺形を捉えることの実現可能性について指摘すること」「2. 初期学習にて包摂概念として平行四辺形を捉えることの困難性について指摘すること」の 2 点を設定した。課題の遂行にあたっては、島根県公立小学校の小学校 4 年生 1 学級（12 名）を対象に 1 時間の実験授業（調査Ⅳ）を計画、実施し、そこで得られた音声・映像データやブレテスト、ポストテスト、ワークシートをもとに分析および考察を行った。授業は、「平行・垂直と四角形」単元の 1 時間目に、長方形、正方形をふくめて平行四辺形と捉えるようになることをねらいとして実施された。

分析の手順としては、まず、質問紙の選択肢の回答結果を集計し、平行四辺形概念を把

握すると共に、理由の記述について分類した。つぎに、授業の映像、音声を参照し、トランスクリプトを発話に区切った。さらに、理由の記述の分類と発話との関連をみることから、下位課題について考察した。

(2) 結果と考察

下位課題1については、調査Ⅳの授業における話し合い場面で、これまで長方形（正方形）と捉えていた図形に対し、長方形（正方形）と平行四辺形の二つの命名ができるという合意に至ったことから、初期学習において平行四辺形を包摂概念として捉える学習は実現可能との結論に至った。

下位課題2については、以下3点を学習指導の困難性として指摘した。

- 〈1〉Aの図形はBの図形であるといつてよい（AはBの下位概念にあたる）のような命題に対しては、AとBの概念の比較によって真偽を明らかにしようとする傾向にあるため、Bの定義に関わる指導だけでは命題の真偽を明らかにできないということ。
- 〈2〉現行の学習指導では、小学校3年生にて正方形、長方形の図形概念の形成に関わる学習が行われず、小学校2年生時点の図形概念が未発達な状態で小学校4年生の平行四辺形の学習が開始されるため、図形同士の共通点を見出しにくくなるということ。
- 〈3〉本来、子どもは図形同士を異なるものと捉え、弁別しようとする傾向にあること。また、単元を通して、平行四辺形の対象概念の理解が深まるほど、その捉えはより強くなる可能性も指摘される。

本研究のまとめと今後の課題

本研究は、図形概念形成に寄与する子ども同士の相互作用を捉え、そこで明示されるべき内容を指摘することから、望ましい図形概念形成に至るための小学校段階における学習指導について考察するものであった。そこで、本稿では調査Ⅰにおいて、現代の課題の改善にかなう数学的討議について考察することで、学習の理解に寄与する話し合いのあり方について指摘した。調査ⅡからⅣにおいては、平行四辺形概念形成に寄与する子ども同士の話し合いの特徴を捉えた上で、学習指導を構想し、実施することでその影響について検証した。一連の調査を通し、図形概念形成に関わる学習指導について示唆を得ることができたことは本研究の成果といえよう。ただし、図形概念形成に寄与する操作的活動のあり方や、小学校3年生以前の学習指導については検討する余地が残されていることは、今後の課題としてあげられる。

参考引用文献

- 板垣大助 (2025). 現代に求められる mathematical discussion の構築—小学校 4 年生における話し合い活動の分析を通して—, 島根大学教育学部紀要 (教育科学), 58, 53-60.
- 板垣大助・下村岳人 (2024). 算数科授業における数学的討議の本質的な貢献と相互作用に関する一考察: 第 4 学年「間の数」単元を事例として, 島根大学教育学部附属教育支援センター紀要「島根大学教育臨床総合研究」, 23, 63-73.
- 榎戸章仁 (1987). 図形認知の発達的研究. 小関熙純編著, 図形の論証指導, (pp.90-125). 明治図書.
- 國宗進 (2000). 図形の論証に関する理解度の変化. 日本数学教育学会誌, 82, (3), 66-76.
- 國宗進 (2017). 数学教育における論証の理解とその学習指導. 東洋館出版社.
- 国立教育施策研究所 (2024). 令和 6 年度全国学力・学習状況調査報告書 児童生徒一人一人の学力・学習状況に応じた学習指導の改善・充実に向けて 中学校数学.
- 小関熙純・家田靖行・國宗進 (1984). 図形認知の発達的研究—「平行四辺形」概念の形成過程について—. 数学教育学論究, 66, (41, 42), 3-23.
- 近藤裕・熊倉啓之・藤田太郎・宮脇真一・國宗進 (2024). 中学生の平行四辺形概念の理解: 同一問題による 3 回の調査の結果とその経年変化. 日本数学教育学会誌数学教育, 106, (7), 2-10.
- スケンプ,R.R. (著), 藤永保 (訳) (1973). 数学学習の心理学, 新曜社. (原著出版 1971 年)
- 松尾 (山崎) 七重 (1997). 図形概念の包摂関係の理解を促す要因の検証—中学校 2 年生の平行四辺形に関する授業を通して—, 数学教育論文発表会論文集, 30, 397-402.
- 松尾七重 (2000). 算数・数学における図形指導の改善, 東洋館出版社.
- 文部科学省 (2021). 「令和の日本型学校教育」の構築を目指して—全ての子供たちの可能性を引き出す, 個別最適な学びと, 協働的な学びの実現— (答申).
- 山本信也 (1993). 社会的相互作用における平行四辺形認識の変容に関する研究, 西日本数学教育学会誌数学教育学研究紀要, 19, 45-52.
- ランパート,M (著), 秋田喜代美 (訳). (1995). 真正の学びを創造する: 数学がわかることと数学を教えること. 佐伯胖・藤田典英・佐藤学編, 学びへの誘い, (pp.189-234). 東京大学出版会. (原著論文 1990 年)
- Pirie,S.E.B.,&Schwarzenberger,R.L.E.(1988).mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 459-470.