問題解決においてグラフをより適切に用いる力を育むための授業実践
― 一次関数における問題づくりの視点から ―

伊藤　悠登

０. はじめに

0-1. 研究の背景

中学校学習指導案の数学科の目標に「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成することを目指す」と掲げられている。この中の「数学的活動」は、数学の世界と現実の世界の２つの過程があり、数学の問題発見・解決の過程全体の一連の流れを示す活動である。また、この過程は図１のように示されている。

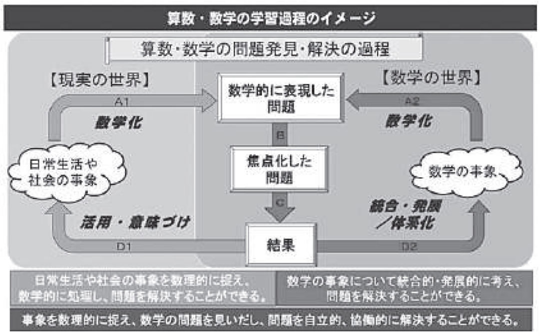

図１：算数・数学の学習過程のイメージ図

このサイクルは、「数学的モデル化過程（三輪, 1989）」や「数学的モデリング（佐伯, 2017）」としてそれぞれ示されている。数学的活動を通して、現実の世界と数学の世界を行き来しながら、「より良いモデル化」に向けてこのサイクルを回し続けることは大切である。

また、令和６年度の全国学力・学習状況調査において中学校数学の関数の課題として、「一次関数について式とグラフの特徴を関連づけて理解すること。(調査問題$\boxed{4}$)」、「事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明すること。(調査問題$\boxed{8}$（２）)」が挙げられている。特に、調査問題$\boxed{8}$（２）の問題に対して「グラフを用いて理由を説明する解答」として、「y 座標が０である点に着目すること」、「x の差を求めること」の条件を記述できていない反応率が高かったことから、グラフの活用に課題があると考える。

0-2. 研究の目的

学習指導要領における思考力、判断力、表現力等の育成の目標において、「事象の本質を捉えたり、理解を深めたりするように配慮することが大切である」ことが示されており、事象の本質を捉えるためには数学的活動における、現実の世界と数学の世界を関連づけることが必要だと考えている。そして、この現実の事象と数学の事象の関連づけをグラフでも行

うことができれば、令和６年度の全国学力・学習状況調査の課題として挙げられている、「事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明すること」も改善されるのではないかと考える。

本研究では、一次関数のグラフに焦点を当て、問題解決の際にグラフを適切に用いて解決する力を育成するための、中学校数学科の授業実践について検討していく。

１.先行研究の検討

1-1.数学的モデリング過程

数学的活動の学習過程をサイクルとして、佐伯（2017）は、図２のように数学的モデリングと示している。

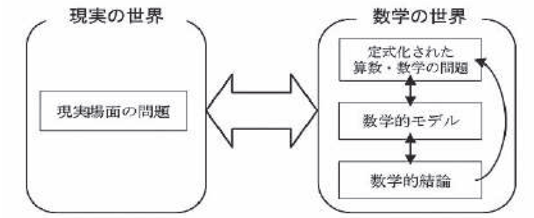

図２：数学的モデリング過程の図式

この数学的モデリングの一連の活動について佐伯（2017）は以下のように述べている。

> 最初に，現実の世界で生じた「現実場面の問題」に対して，その問題で特に重要だと思われる算数・数学に関係する側面を取り上げて，数学の世界における「定式化された算数・数学の問題」をつくる。次に，数式，量，図形等で表した「数学的モデル」をつくることができれば，学習した知識を活用して数学的処理を行い「数学的結論」を得る。そして，「数学的結論」が現実の世界において何を意味しているかを解釈・検証するために，「現実場面の問題」の側面やデータ等を用いて妥当であるかどうかを検討する。最後に，妥当な結論が得られれば，問題が解決したことになる。一方，妥当な結論が得られなかった場合，どこに問題があったのかを綿密に探るために，もう一度数学的モデリングの活動を行う。（佐伯,2017,頁３）

このように、数学的モデリングは現実の世界と数学の世界を、妥当な結論を得ることができるまで、モデリングの過程を繰り返し行うことである。しかし、柳本(1996)は、日本の数学的モデリングの過程が一巡で終わってしまうことが問題であると指摘している。また、佐伯(2017)は、学校の授業では、これまで獲得した数学的知識・技能の定着・活用に主眼が置かれているため、数学的活動に関わる思考の育成は実践されにくい状況にあると述べている。実際に数学的モデリングに着目した実践研究として柳本（1996）は、給水タンクを教材として、中学校において数学的モデルングの指導の可能性について論じている。この取り組みの結果として、数学的モデリングに着目した授業実践を行うことで、数学をより身近に感じることができたり、現実に即したモデル化へと進む動機が芽生えたりすることが考察されている。そのため、数学の世界と現実の世界の関係の理解を深めるために数学的モデリングに着目した授業実践は効果的に作用すると考える。

1-2.一次関数における事象とグラフの関連

長崎（2001）は、「児童・生徒の算数・数学と社会をつなげる力」に対して調査問題の開発とそれを用いた調査を行った。その結果、調査問題の結果から算数・数学と社会をつ

なげる力は、学年が上がるに従い、達成度が顕著に上がることがないことが明らかになっている。この調査について久保（2000）は、「児童・生徒の算数・数学と社会をつなげる力」について関数に関わる問題に着目し、関数を「数学と現実的な事象」、「関数の表現」の２つの視点から捉え、調査問題を開発し再度検証している。また、生徒が関数を発見する場面では、式や表に比べて、グラフではその傾向は顕著ではないことも挙げられている。調査の結果、生徒が数学の場面から関数を読み取ることについて、学年が進むにしたがって正答率が高くなる。しかし、現実的な事象から関数を発見する場面や、関数から現実的な事象を解釈する場面においては学年進行とともに理解が深まるとはいえないことを明らかにした。

西村（1999）は、現象とグラフを関連づける観点を見出すことができないことが、現実場面の問題や数学的モデル化教材において、問題場面の変化の様子を表すグラフの予測や見積もりができないことや、グラフからの十分な読み取りができないことにつながると述べている。また、久保（2000）は、関数の理解を深める上で、現実的な事象と関数とを関連づけて指導することの有効性は十分にあると述べている。

その他、具体的な研究として、事象とグラフとを関連づけた研究は新井（2005）、西村（2015）、松浦ら（2023）などが挙げられる。これらの研究から、事象とグラフを関連づけるためには、事象の中の変数とグラフの変数を関連づけることが必要であることが示唆されている。

そして、事象の中の変数とグラフの変数を関連づけるために、松浦ら（2023）が課題として述べていることを参考にすると、グラフから現実事象の変化への対応を考察させる活動からアプローチすることが効果的であるのではないかと考える。

また、布川（2016）は、生徒自身が関数の活用を考える授業を行うことで、どこに関数が使われているのか、あるいは得られた結論は妥当なのかの疑問が自然に生じると述べている。

そこで、事象とグラフを関連づけるために問題づくりが有効であると考える。島田（2010）は、問題づくりの手法から現実の世界と数学の世界を行き来することによって、現実と数学との遊離感を払拭することへの有効性を示している。この問題づくりについて島田（2010）は以下のように述べている。

> 問題づくりは．生徒自身が問題の中に、自由な発想で独自に場面を設定し“数学を使う世界をつくる”学習活動である。そして、生徒が問題づくりに取り組むことによって、具体的な感覚の世界から、次第に論理的に考える思考の世界へと移行し進歩していくのである。（島田, 2010, 頁 13）

さらに、問題づくりの手法を取り入れた授業実践の効果検証を質問紙による生徒の意識調査の結果から分析した結果、学習の定着度に有意差も認められる結果も出ている。これは、問題づくりを行うことによって数学がより身近なものになることで、学習の定着が図られたと考察されている。

1-3. グラフの認識

Jone Clement(1989)は生徒のグラフの誤りは「写真としてグラフを扱う」、「軸の混乱」の２つのタイプがあると述べている。また、グラフ理解の認識概念として「静止モデル」と「動的モデル」の２つのモデルについて４つのレベルで示している（図３）。図３は左側が静止モデルを示し、右側が動的モデルを示している。また、Clementは各レベルを、自転車の時間と速度の関係を用いて具体例で示している。

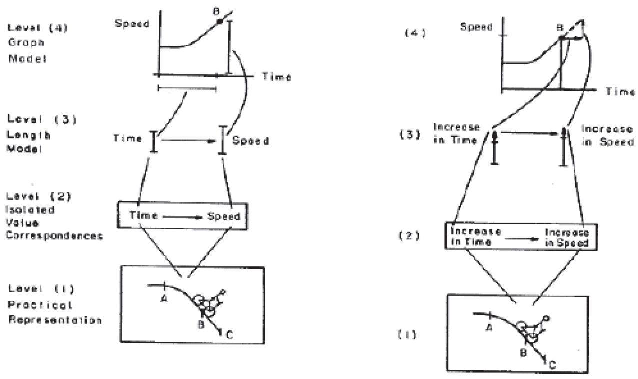

図３：competence model（Clement, 1989, 頁.3）

グラフを現実的な表現として絵のようにみる「写真としてグラフを扱う」の誤りが起こる要因は、レベル２の「坂を下るときの変数として時間と速度を認識し、時間の変化に伴って速度も変わる考え」と、レベル３の「変数である時間と速度を長さモデルで表すとき、時間の長さモデルと、速度の長さモデルを関連づけること」の過程が短縮化することが挙げられている。

Clement(1989)の示すように、事象からどのように変数を取り出すかについて分類し、分析を行うことも必要だと考える。

２．問題づくりに焦点を当てた授業の基本設計と調査問題による効果検証効果検証

2-1. 基本的な授業構想

島田（2016）は、問題づくりを行うことで数学がより身近になることと考察し、松浦ら（2023）は関数関係の読み取りのために、現実事象からグラフへの対応だけでなく、グラフから現実事象への対応を考察させる学習を取り入れることを示唆している。

そこで、本授業では、グラフから問題づくりをする活動を行う。この活動を行うことで、事象とグラフとのつながりの意識を高め、グラフの形の特徴と現実の事象を照らし合わせることにより、グラフが示す状況を、読み取ることができるようになると考える。

また布川（2016）は、生徒により考えられた関数の活動を行うことの課題として、生徒たちの間で十分な理解が得にくく、明らかな誤りでも見過ごされることある指摘している。柳本（1996）は、自分の書いたグラフの結果を考察する中から、さらに新たな疑問点を見出す生徒も見られる結果があることを示している。この新たな疑問点を見出し、その疑問を解決することは、妥当な結論を得ることができるまで、どこに問題があったかを探る、数学的モデリングの過程の一部を表していると考える。

そのため、生徒が問題づくり行う中で、誤りが出てくることが予想できる。その誤りの問題を取り上げ、グラフを用いて問題解決を行う。この活動を行うことで、問題解決の際の必要な情報の認識やグラフと事象を示す情報を対応させて認識する視点が育まれるのではないかと考えている。

2-2. 対象授業

本授業実践はM中学校の2年生を対象に2時間構成で計2回実施した。1回目は、2024年3月19日と2024年6月12日であり、2回目は、2024年11月22日と2024年11月25日である。2回目の授業実践は1回目の授業実践を改善して作成したものである。以下に改善を行った2回目の授業計画を示す。

（１）　第一時：問題づくり

図４に示している４つのグラフから１つ選択し、その選択したグラフの形になるように問題を作成する活動を行う。グラフの形から問題を作成するために、グラフの軸が何を表すのかを定めたり、その軸に対して単位や値を定めたりする必要がある。そのため、グラフに対応した必要な変数を事象に即して考えることができるようになると考える。

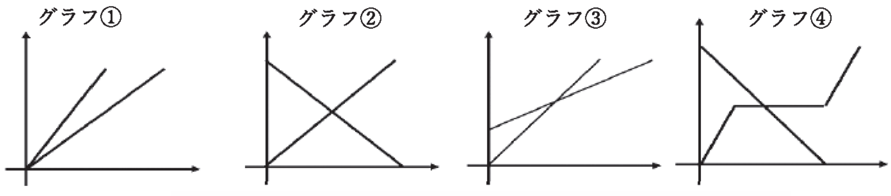

図４：問題づくりで選択する４つのグラフ

（２）　第二時：必要な情報を探し問題を解決すること

この活動では、第一時の図４をもとに生徒が作成した問題を取り上げる。本時で取り上げた問題を以下に示す。

ある兄弟がショッピングモールに向かいます。しかし弟は、友人の家で泊まっているので、そのまま行きます。兄は自分の家から行きます。この時、兄は分速 80m、弟は分速 50m で歩きます。兄が着いてから、どのくらいで弟が着きましたか。

この問題は情報が不足しているため解決できない。解決するためには表１に示す情報の組み合わせのうちいずれかが必要である。

表１：問題解決する際に必要な組み合わせ

組み合わせ	情報１	情報２
1	家からショッピングモールまでの距離	家から友人の家までの距離
2		グラフの交点の時間（交点の x 座標）
3		グラフの交点の距離（交点の y 座標）
4		兄がショッピングモールに着いた時の弟の家からの距離

問題を解決するためには表１に示した情報に加え、問題に示されている情報のうち「兄の速さ」、「弟の速さ」が必要である。これらの情報は一次関数において「傾き」、「切片」、「座標」に関する情報である。この活動を通して、問題解決の際に必要な情報の選択や、グラフと事象が示す情報を対応させて認識することができるようになるのではと考える。

2-3. 調査問題

（１）基本情報

授業実践の効果検証を行うため、授業実践を行う事前と事後で調査問題を実施する。調査問題は全国学力・学習状況調査の関数の問題を参考に、筆者が作成した。

調査問題の分析として各調査問題及び授業のすべてに参加を対象に対応のある t 検定を行う。対応のある t 検定については Microsoft® Excel for Mac(Ver 16.92)を使用した。

調査の基本情報を表２に示す。

表２：調査問題の基本情報

	調査日		調査人数	調査時間	大問数
	事前調査	事後調査			
１回目	2024 年 3 月 15 日	2024 年 6 月 14 日	28	25 分	7
２回目	2024 年 11 月 21 日	2024 年 11 月 26 日	21	10 分	3

※大問数が異なるのは、1 回目の調査で別実践の調査も併せて行ったためである。

1 回目の調査問題の内容は、「1 グラフと式、表と式、グラフと表を関連づけて理解できているか」、「2 傾きや切片を事象と関連づけて解釈できているか」、「3 グラフを事象の状況に即して解釈し、表現できているか」、「4 軸の表記によるグラフの違いについて理解できているか」、「5 問題解決の方法を数学的に説明できているか」、「6 伴って変わる二つの数量を取り出すことができているか」、「7 理想化・単純化を行い、数学的に表現できている

か」である。

また、2回目の調査問題の内容は、「$\boxed{1}$グラフと式を関連づけて理解できているか」、「$\boxed{2}$傾きの意味を理解しているか」、「$\boxed{3}$グラフを事象の状況に即して解釈し、表現できているか」、「４軸の表記によるグラフの違いについて理解できているか」である。

（2）結果・分析・考察

1 回目の調査問題の t 検定の結果、事前事後の調査問題で有意差が確認できた問題は、「$\boxed{3}$グラフを事象の状況に即して解釈し、表現できているか」についてのみである（表４）。

2 回目の調査問題の t 検定の結果、事前事後の調査問題で有意差が確認できた問題は、「$\boxed{2}$傾きの意味を理解しているか」、「$\boxed{3}$グラフを事象の状況に即して解釈し、表現できているか」についてである（表６,表８）。

①　$\boxed{3}$グラフを事象に即して解釈し、表現できているか

1回目の調査問題でｔ検定の結果、有意差が確認できた問題を図５に示す。

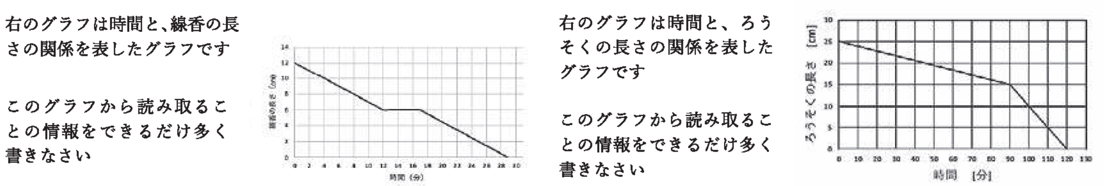

図５：1回目の調査問題$\boxed{3}$（左：事前調査,右：事後調査）

この問題は、グラフから読み取ることができる情報を記述する問題である。この問題は記述内容を分類し、その分類した個数を記述数とし記述数に違いがあるか対応のある t 検定を行った。表３に記述に対しての解答類型を示す。表３の中の傾きに関しての記述のうち「傾きが変化している」の分類に関しては、Clement(1989)のモデルにおいて、グラフを現実的な表現で捉えるレベル１の段階を示している。また、t 検定を行った結果を表４に示す。さらに、表３で分類した項目についての集計を表５に示す。

表３：記述数の解答類型

分類		事前調査の解答例	事後調査の解答例
傾きに関しての記述	傾きが変化している	・だんだんと線香の長さは短くなっている	・時間が進むにつれ、ろうそくの長さが短くなる
	始点と終点で捉える	・12 分から 17 分まで線香の長さは変わらない	・0 分から 90 分で 10cm ろうそくが短くなっている
	格子点で捉える	・0 分から 2 分までの 2 分間で線香の長さは 1 cm 短くなっている	・0 分から 100 分の 10 分間でろうそくの長さは 10cm 短くなっている
	変化の割合で捉える	・線香が燃え始めてからの 12 分間は 1 分間に 0.5cm 短くなっている	・ろうそくが燃え始めてからの 90 分間は 1 分間に 1/9cm 短くなっている
y 切片に関しての記述		・線香の長さは 12cm である	・ろうそくの長さは 25cm である
x 切片に関しての記述		・線香が全て燃えるまで 29 分である	・ろうそくが全て燃えるまで 120 分である

表４：記述数に関するｔ検定の結果

項目	事前 M(SD)	事後 M(SD)	t値(p値)
記述数	1.75(1.32)	2.75(1.67)	-1.73(.00)

表５：解答類型別の記述数

分類項目	記述数（事前調査）	記述数（事後調査）
傾きが変化している	6	22
始点と終点で捉える	16	15
格子点で変化を捉える	6	7
変化の割合で捉える	7	2
y切片に関しての記述	2	15
x切片に関しての記述	6	17

１回目の事前調査と事後調査ではグラフの形が違っている。このグラフの形が異なっていることが要因で読み取ることのできる情報量に違いがあるのではないかと考えた。そのため、2 回目の調査問題では、事前調査と事後調査を似たグラフの形で問題を実施した（図６）。

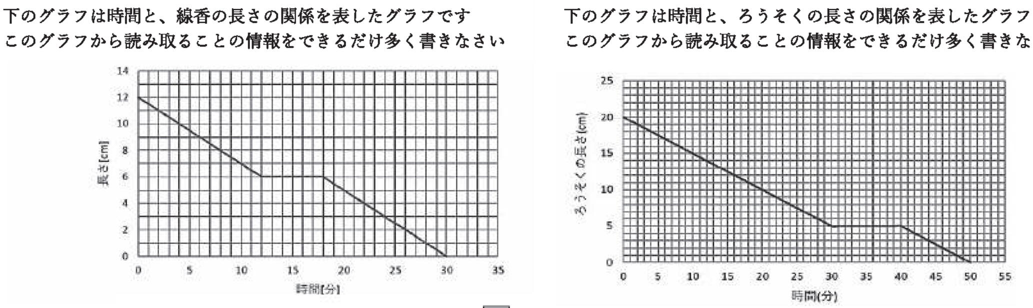

図６：２回目の調査問題$\boxed{3}$（左：事前調査, 右：事後調査）

この 2 回目の調査問題についても記述数に対して対応のある t 検定を行った結果、有意差が確認された。記述に対しての解答類型は表３と同様である。t 検定を行った結果を表６に、表３で分類した項目についての集計を表７に示す。

表６：記述数に関するｔ検定の結果

項目	事前 M(SD)	事後 M(SD)	t値(p値)
記述数	2.04(1.43)	2.86(1.70)	-2.52(.02)

表７：解答類型別の記述数

分類項目	記述数（事前調査）	記述数（事後調査）
傾きが変化している	3	9
始点と終点で捉える	16	20
格子点で変化を捉える	5	7
変化の割合で捉える	5	2
y切片に関しての記述	7	11
x切片に関しての記述	5	11

これらの結果から、グラフから読み取ることのできる情報量が増えたことがわかる。調査問題において「傾きに関しての記述」の記述数が増えた要因としてグラフをもとにした問題づくりの活動が影響していると考えている。問題を作成するためにはグラフの形から事象の想定する必要がある。このグラフの形から事象を想定する活動を行ったことが、調査問題において「傾きに関しての記述」が増えた要因であると考える。

また、「x 切片に関しての記述」、「y 切片に関しての記述」の記述数が増えているのも、問題づくりの活動が影響していると考えている。問題を作成する際に軸の設定や変域における値の設定を行う必要がある。この値の設定を行ったことが、調査問題において「y 切片に関しての記述」や「x 切片に関する記述」が増えた要因であると考える。

②　$\boxed{2}$傾きの意味を理解しているか

2回目の調査問題でｔ検定の結果、有意差が確認できた問題を図７に示す。

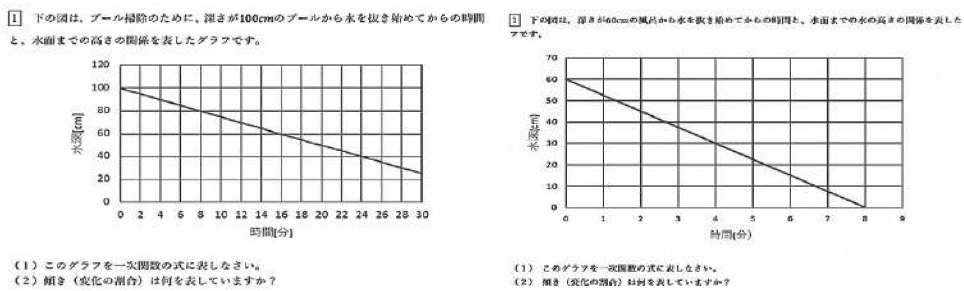

図７：２回目の調査問題$\boxed{2}$(左：事前調査, 右：事後調

この問題は（1）がグラフから式を求めることができるかをみる問題であり、（2）が傾きを事象と関連づけて解釈することができているかをみる問題である。この問題では正誤についてｔ検定を行った。その結果、（2）の問題で有意差が確認された（表８）。正答の条件として、「１分間に抜ける水の量」というような単位量あたりの時間に対する変化量の記述が見られる解答のみ正答としている。また、正答を「１」、誤答を「０」としてｔ検定を実施した。

表８：グラフの傾きに関するｔ検定の結果

	事前 M(SD)	事後 M(SD)	t値(p値)
正答数	0.05(0.21)	0.28(0.53)	-2.50(.02)

この結果から、グラフの傾きの理解として、単位量あたりの時間に対する水量の変化量と認識する解答が増えたことがわかる。この要因として必要な情報を探し解決する活動が影響していると考える。この活動において、問題を解決するために、単位を考慮した解答が窺えた。また、「傾きは１分間で進む距離」という記述も見られたことから、調査問題において、グラフにおいての傾きが、単位量あたりの時間に対する水量の変化量について、より認識できるようになったと考える。

３.今後の課題と展望

本実践の課題は、「②傾きの意味を理解している」の（1）のようなグラフから式を求める問題において、ｔ検定の有意差が確認できなかったことに加え、正答率も低かったことである。図７の問題では、$y = ax + b$ の a の解答として、事前調査では$-1/4$、事後調査では$-3/4$という誤答が目立った。傾きを式として表す際に、座標を見て解答しておらず、グラフのマスのみに注目していることが原因だと考える。授業実践において、「必要な情報を探し問題を解決すること」の活動は、問題を解決する際に一次関数の式を用いることなく解決可能である。問題解決の際に、グラフから情報を読み取り問題解決を行うことはできていた

が、式を用いた解決は少なく、「式を利用して解く」という数学としての、問題解決には課題が残る。

また、課題として今回の調査対象が少ないこともあげる。調査対象が少ないことら偶然による影響を受けやすく、t 検定における信頼性について確保しきれないことが考えられる。そのため、引き続きデータの収集と検証を行なっていく必要がある。

そして、本研究の「①グラフを事象に即して解釈し、表現できているか」の調査問題の結果より、グラフから読み取ることのできる情報量が増えたことがわかった。「傾きに関しての記述」においても増加していることがわかった。中でも「傾きが変化している」の解答類型はより増加している。この解答類型はClement(1989)のモデル（図３）で考えるとレベル１の段階であり、グラフの認識の誤りとして、「写真としてグラフを扱う」ことを引き起こさないように注意していく必要がある。

研究の成果として、この授業実践を通して生徒のグラフから読み取ることのできる情報量が増えたことが挙げられる。そのため、関数分野の「比例」や「 $y = ax^2$ 」においてこの実践を行うことで、グラフから読み取ることのできる情報量の増加が、学習の定着にどのような影響を及ぼすかを研究対象として調査していきたいと考える。

４.参考文献

・新井仁.(2005).事象を読み取る力を高める関数領域の指導のあり方に関する研究 グラフを問題解決の道具として. 日本数学教育学会誌,87(5),12.
・久保良宏.(2000).J4 現実的な事象と関数のグラフにおける理解の発達に関する調査研究 (J 学習・認知・理解, 論文発表の部).数学教育論文発表会論文集,33,313-318.
・国立教育政策研究所(2023),全国学力・学習状況調査解説資料
・佐伯昭彦(2017),数学的モデリングにおける理論と実践を架橋する授業研究に関する実証研究 ,平成 25 年度～平成 28 年度科学研究費助成事業(基盤研究(C))研究報告書.
・島田佳幸.(2010).現実と数学のつながりが見える授業の創造 生徒が地域を調査して問題集をつくる.日本数学教育学会誌,92(1),12.
・長崎栄三.(2001).児童・生徒の算数 数学と社会をつなげる力に関する発達的研究. 文部省科学研究費補助金（基盤研究 A）研究報告書.
・西村圭一.(1999).高校生の『関数感覚』に関する調査研究-「ジェットコースター」のグラフを例に. 第 32 回数学教育論文発表会論文集. 1999, 513-518.
・布川和彦＆杉本知之(2016), 中学校３年生により考案された関数の活用の事例-その特徴と生徒の持つ関数のイメージ-,上越数学教育研究, 第 31 号
・松浦妃南, 藤川洋平,河原司(2023).中学校段階の関数学習における水槽モデルを用いた実験の教育効果.福井大学教育実践研究,（47），41-49.
・三輪辰郎(1983),数学教育におけるモデル化についての一考察 ,筑波数学教育究 ,2 ,177-125.
・文部科学省(2018),中学校学習指導要領解説 数学編.
・柳本哲. (1996). 中学校における数学的モデリングについて給水タンクを事例として.日本数学教育学会誌,78(5), 2.
・Jone Clement(1989),The concept of variation andmisconception in cartesian graphing.