順序つき固有値 (と L 関数零点) の連結分布

Tracy-Widom method for Jánossy densities of random matrices

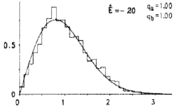
西垣 真祐 [島根大]

PTEP(2021)113A01 (17 ㌻)

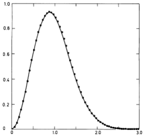
離散的手法による場と時空のダイナミクス 2022
2022/8/22〜25 東京理科大

ランダム行列

量子カオス系の準位統計
・Gutzwiller跡公式

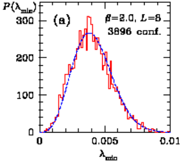


数論的量子カオス
・Selberg跡公式
・L関数零点統計

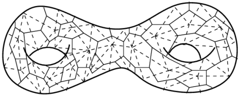


$N \longrightarrow \infty$
行列積分

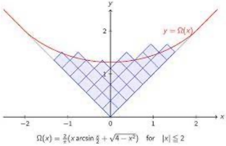
南部-Goldstoneボソンの
有効ポテンシャル on G/H
・QCD Dirac準位



量子的時空の創発
・ランダム面/非臨界弦
・IKKT行列模型
・SYK模型, …



組合せ論
・最長増加部分列
・2D, 3D tiling, …



1. Introduction：順序つき固有値分布
2. 行列式点過程と Jánossy 密度
3. TW 法の適用可能性
4. 最大/小固有値の連結分布

1 Introduction

固有値分布

unitary 群の測度 → 固有位相の JPD

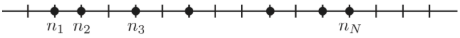
$$
\begin{aligned}
\mathrm{JPD}(\lambda_0,\ldots,\lambda_{N-1}) &= \prod_i w(\lambda_i)\cdot\prod_{i>j}|\lambda_i-\lambda_j|^2 & U = u^\dagger \mathrm{diag}(\lambda_0,\ldots,\lambda_{N-1})u \\
&= \prod_i w(\lambda_i)\cdot\det[\lambda_i^k]\cdot\det[\lambda_j^k]^* & \text{：VdM 行列式} \\
&= \prod_i w(\lambda_i)\cdot\det[P_k(\lambda_i)]\cdot\det[P_k(\lambda_j)]^* & \text{：直交多項式} \\
&= \det[\varphi_k(\lambda_i)]\cdot\det[\varphi_k(\lambda_j)]^* & \text{：直交関数} \\
&= \det\left[\sum_{k<N}\varphi_k(\lambda_i)\varphi_k^*(\lambda_j)\right] & \text{：射影核 } \sum_{k<N}|k\rangle\langle k| \\
&\overset{\text{3 項漸化式}}{\propto} \det\left[\frac{\varphi_N(\lambda_i)\varphi_{N-1}^*(\lambda_j)-\varphi_{N-1}(\lambda_i)\varphi_N^*(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}\right] \\
&\xrightarrow{\text{局所漸近形}} \det\left[\frac{\varphi(x_i)\psi(x_j)-\psi(x_i)\varphi(x_j)}{x_i-x_j}\right] := \det[K(x_i,x_j)]
\end{aligned}
$$

$\varphi(x) = \sin x$ (bulk), $\mathrm{Ai}(x)$ (∼max EV), $J_\nu(\sqrt{x})$ (∼min EV)

行列式点過程 (DPP) $\nu = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ for $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}\times\mathrm{U}}, \mathrm{USp}, \mathrm{O}$

Gap 確率

離散的 DPP



$$\mathrm{Prob}(n_1,\ldots,n_p\text{に粒子がある}) = \det[K(n_i,n_j)]_{i,j=1}^{p}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Prob}(n\text{ に粒子がない}) = 1 - K(n,n)$$

$$\mathrm{Prob}(n,n'\text{に粒子がない}) = 1 - K(n,n) - K(n',n') + \overbrace{\begin{vmatrix} K(n,n) & K(n,n') \\ K(n',n) & K(n',n') \end{vmatrix}}^{n\text{ と }n'\text{ に粒子がある引き過ぎを補正}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-K(n,n) & -K(n,n') \\ -K(n',n) & 1-K(n',n') \end{vmatrix}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\mathrm{Prob}(\text{集合 }I\text{ に粒子がない}) = \det\left(\mathbb{I} - [K(n,n')]_{n,n'\in I}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Prob}(\text{集合 }I\text{ に粒子が }p\text{ 個}) = \frac{1}{p!}(-\partial_z)^p \det\left(\mathbb{I} - z[K(n,n')]_{n,n'\in I}\right)\Big|_{z=1}$$

順序つき固有値分布

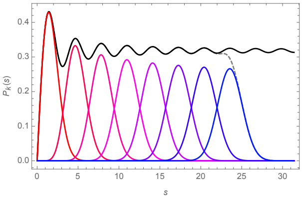
Gap 確率 as Fredholm 行列式

$$\mathrm{Prob}\left(\text{no EV} \in (a,b)\right) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a,b)})$$

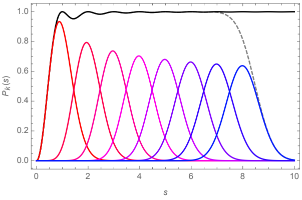
$$\text{核 } \mathbf{K}\text{：積分演算子} \quad (\mathbf{K}|_{(a,b)} f)(x) = \int_a^b dy\, K(x,y) f(y)$$

神保-三輪-毛利-佐藤 1980：バンド内部 (bulk) $\mathbf{K}_{\mathrm{sin}}|_{(0,s)} \Rightarrow$ Painlevé V
Tracy-Widom 1993：バンド端　(soft 端)　$\mathbf{K}_{\mathrm{Airy}}|_{(s,\infty)} \Rightarrow$ Painlevé II
Tracy-Widom 1993：固定点近傍 (hard 端)　$\mathbf{K}_{\mathrm{Bessel}}|_{(0,s)} \Rightarrow$ Painlevé III$'_{(2,2k+1)}$
有限 N RM (CUE$_N$ $\Rightarrow$ Painlevé VI)，RM+定数行列：$\mathbf{K}_{\mathrm{Peacey}}|_{(0,s)}$，多重臨界 (超 Airy)

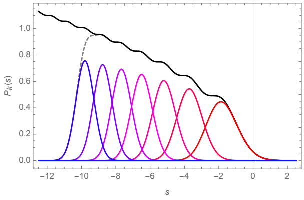
最小特異値分布



準位間隔分布

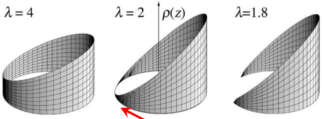


最大固有値分布 (TW 分布)

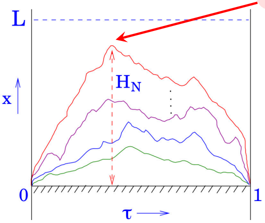


最大固有値 (TW) 分布

2D Yand-Mills [Forrester et al. 2010]



敵対的酔歩 [Baik 1999]

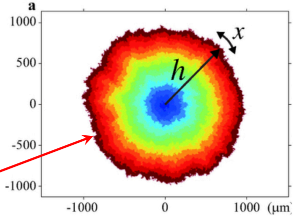


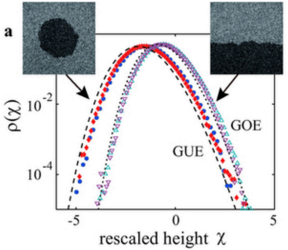
強結合・弱結合境界での”中心極限定理”

⇒ TW分布

KPZ方程式 ⇨ 液晶界面成長

[笹本–Spohn 2010] [竹内–佐野 2010]





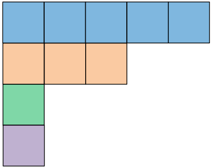
最大固有値分布 vs Ulam

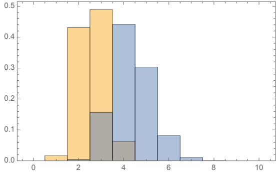
対称群 $\mathfrak{S}_N$ の k 次最長増加部分列 = Young tableaux の第 k 行の長さ

Baik-Deift-Johansson 1999,2000; Borodin-Okounkov-Olshanski 1999; Johansson 1999

Okounkov 2000 (Fields 賞 2006) ：RM ⇒ Riemann 面の単体分割 ⇒ 単分岐被覆の monodromy ⟷ $\mathfrak{S}_N$

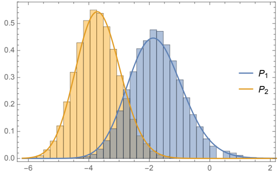
6 1 7 0 2 3 9 5 8 4





$N = 10$, #perm $= 10! \simeq 3\mathrm{M}$

$\downarrow N \gg 1$



$N = 8096$, #sample $= 30000$

最小固有値分布 vs Riemann

Dirichlet $L(s,\chi)=\sum_n \chi(n)n^{-s}$**, cusp** $L_f(s,\chi)=\sum_n \tau(n)\chi(n)n^{-s-a}$**,... の** k^{th} **零点**

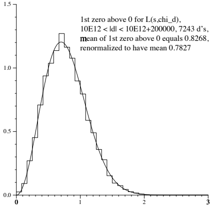
$\mathbb{Z}_d^\times$ の素な実指標 $\uparrow$ $\chi(n)\chi(m)=\chi(nm) \bmod d,\ \chi\neq\chi'\circ\chi''$ $\uparrow$ 保形形式の係数 $f(q)=\sum_n \tau(n)q^n$

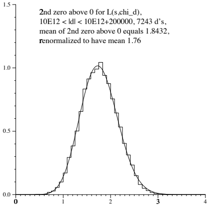
- Hilbert-Pólya 予想 ca.1912： $L(\frac{1}{2}+ix)\overset{?}{=}\det(x-\hat{H}),\quad \hat{H}=\hat{H}^\dagger$ 零点のスペクトル解釈

- Montgomery-Odlyzko 1972： $\hat{H}$ は quantum chaotic, i.e.
  一つの $L(s)$ の大きい零点のスペクトル平均 $\Leftrightarrow$ 固有値の Haar 平均 (μ_{U})

- Katz-Sarnak 1997 ： $L(\frac{1}{2}+ix,\chi_d)\xrightarrow{d\text{ について平均}}\langle\det(x-i\log U)\rangle_{\mathrm{USp}(\infty)}$
  $L(s,\chi), L_f(s,\chi), \ldots$ の小零点の twist 平均 $\Leftrightarrow$ 小固有値の Haar 平均 $(\mu_{\mathrm{USp}},\mu_{\mathrm{O}})$

$L(s,\chi_d)$ の最小・第 2 零点の分布 $10^{12}<|d|<10^{12}+10^5$ [Rubinstein 1998]

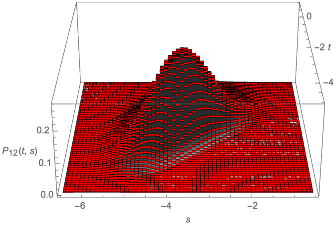




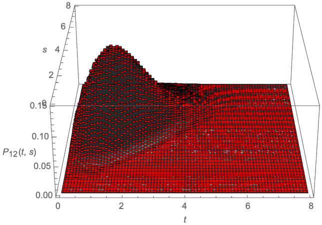
順序つき固有値分布

連結分布は?

最大 & 第 2 固有値の連結分布



最小 & 第 2 特異値の連結分布



$$N = 128, \ \#\text{sample} = 10^7$$

連結分布 $P_{12}(t, s) \Rightarrow$ Isomonodromic 系

Forrester-Witte 2007：70 ㌻：固定点近傍 → IS for Painlevé III′ ↘ 2 重極限での縮退

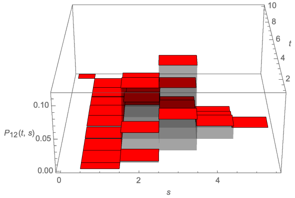
Witte-Bornemann-Forrester 2013：29 ㌻：バンド端 → IS for Painlevé II

Perret-Schehr 2014：34 ㌻：バンド端 → Lax pair for Painlevé XXXIV

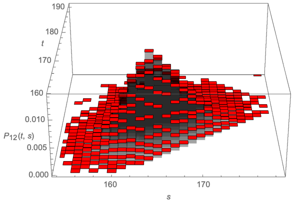
順序つき固有値分布

連結分布は?

最長 & 第 2 増加部分列の連結分布



$N = 10$ $\xrightarrow{N \gg 1}$ $N = 8096$



最小 & 第 2 零点の連結分布

?

Tracy-Widom 法

この問題を再訪する動機：

- より **user-friendly** な解析的手法！
- $^{\forall}$integrable な核 $\mathbf{K} \doteq \dfrac{\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)}{x-y}$ or $\dfrac{\boldsymbol{f}(x)\cdot\boldsymbol{g}(y)}{x-y}$ に適用可能
- $1\sim p$ 番目の固有値の連結分布 $P_{12\cdots p}(s_1,\ldots,s_p)$ に拡張可能

答：TW の関数解析的手法

- $\mathbf{K}$ の要素が**多項式係数** m, A, B, C をもつ LDE ↓ を満たすなら (SL(2)束の共変定数切断)

$$m(x)\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\varphi(x)\\ \psi(x)\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}A(x) & B(x)\\ -C(x) & -A(x)\end{bmatrix}}^{\text{Lax 行列: traceless }\mathfrak{sl}(2)}\begin{bmatrix}\varphi(x)\\ \psi(x)\end{bmatrix},$$

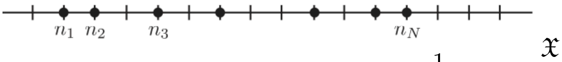
- $\mathrm{Det}(\mathbb{I}-\mathbf{K}|_{(a,b)})$ は m, A, B, C の係数を含む Schlesinger PDE 系により決定される

を **gauge 変換された核 $\tilde{\mathrm{K}}$** に適用すればよい

2 Janossy density in DPP

行列式点過程

離散的 DPP



N 個の fermion の確率分布： $P(n_1, \ldots, n_N) = \dfrac{1}{N!} \det\left[K(n_i, n_j)\right]_{i,j=1}^{N}$

with 射影核： $\mathbf{K} = \left[K(n, n')\right]_{n,n' \in \mathfrak{X}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{K} = N$

$$\Downarrow$$

k 個の fermion の連結分布： $\rho_k(n_1, \ldots, n_k) = \det\left[K(n_i, n_j)\right]_{i,j=1}^{k}$

$I \subsetneq \mathfrak{X}$ に粒子がいない確率 $= \det(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_I), \quad \mathbf{K}|_I = \left[K(n, n')\right]_{n,n' \in I}$

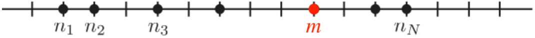
全ての式は連続集合上の DPP にも該当

$\rho_k(\{n\}) \to \rho_k(\{x\}) dx_1 \cdots dx_k$ ， $\det \to \mathrm{Det}$

条件つき確率

1 つの粒子を点 $\boldsymbol{m}$ に固定した 'transformed' 核

$$\tilde{K}(n,n') := K(n,n') - \frac{K(n,\boldsymbol{m})K(\boldsymbol{m},n')}{K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}$$



- 他の粒子は $\boldsymbol{m}$ を避ける： $K(n,\boldsymbol{m}) = K(\boldsymbol{m},n') = 0$
- 射影性, 規格化を満たす： $\tilde{\mathbf{K}} = \left[\tilde{K}(n,n')\right]_{n,n'\in\mathfrak{X}} = \tilde{\mathbf{K}}\cdot\tilde{\mathbf{K}}, \quad \mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{K}} = N-1$
- **条件つき連結分布 ($\boldsymbol{m}$ は占有済) に対する核**になる：

$$\tilde{\rho}_1(n|\boldsymbol{m}) = \frac{\rho_2(n,\boldsymbol{m})}{\rho_1(\boldsymbol{m})} = \frac{K(n,n)K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) - K(n,\boldsymbol{m})K(\boldsymbol{m},n)}{K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})} = \tilde{K}(n,n)$$

$$\tilde{\rho}_2(n_1,n_2|\boldsymbol{m}) = \frac{\rho_3(n_1,n_2,\boldsymbol{m})}{\rho_1(\boldsymbol{m})}$$

$$= \frac{K(n_1,n_1)K(n_2,n_2)K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) \pm (5\text{ 項})}{K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})} = \det\left[\tilde{K}(n_i,n_j)\right]_{i,j=1}^{2}, \quad \text{etc}$$

条件つき確率

Lemma (1)

p 個の異なる点 $\boldsymbol{m}_1, \dots, \boldsymbol{m}_p$ を固定して

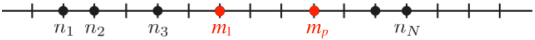
$$\boldsymbol{\kappa} = [K(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j)]_{i,j=1}^{p}, \quad \boldsymbol{k} = [K(\boldsymbol{m}_i, n)]_{i=1,\dots,p}^{n\in\mathfrak{X}}, \quad \mathbf{K} = [K(n, n')]_{n,n'\in\mathfrak{X}}$$

このとき

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \boldsymbol{k}^t \boldsymbol{\kappa}^{-1} \boldsymbol{k}$$

は $\boldsymbol{m}_1, \dots, \boldsymbol{m}_p$ が既に占拠された条件つき確率を与える:

$$\tilde{\rho}_k(n_1, \dots, n_k | \boldsymbol{m}_1, \dots, \boldsymbol{m}_p) = \det \left[\tilde{K}(n_i, n_j)\right]_{i,j=1}^{k}$$



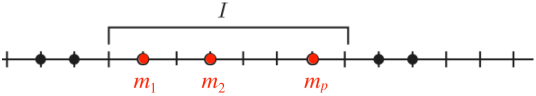
この Lemma から直ちに...

Jánossy 密度

Lemma (2)

部分集合 I が $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_p$ 以外は粒子を含まない条件付き確率は

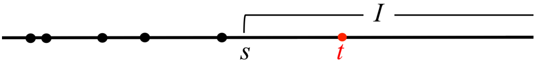
$$\tilde{J}_p(I|\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_p) = \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I) , \quad \tilde{\mathbf{K}}|_I = \left[\tilde{K}(n, n')\right]_{n,n' \in I}$$



Jánossy 密度： I がちょうど p 個の粒子 @ $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_p$ を含む確率

$$J_p(I; \boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_p) = \rho_k(\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_p) \cdot \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I)$$

最大 $\sim p$ 番目の連結分布： $P_{12\cdots p}(t, t', \ldots, s) = \partial_s J_p\left((s, \infty); t, t', \ldots\right)$



3 Applicability of T-W method

TW 法の適用可能性

Tracy-Widom 法の適用可能条件 (1994)：

1. 核が Christoffel-Darboux 型： $\mathbf{K} \doteq \dfrac{1}{x-y}[\varphi(x), -\psi(x)]\begin{bmatrix}\psi(y)\\ \varphi(y)\end{bmatrix} := \dfrac{\overline{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y}$
2. 2 成分関数 $\Psi(x)$ が有理係数 1 階 LDE を満たす：$(\partial_x + \mathcal{A}(x))\,\Psi(x) = 0, \mathrm{tr}\,\mathcal{A}(x) = 0$

ならば, $\mathrm{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a,b)})$ は $\mathcal{A}(x)$ の係数を含む Schlesinger PDE 系により決定される

Theorem

核 $\mathbf{K}$ が TW 法の適用可能条件を満たすならば, transformed 核 $\tilde{\mathbf{K}}$ も満たす

Proof.

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x) \overbrace{- \frac{K(x,t)}{K(t,t)}\Psi(t)}^{\text{ある点 } t \text{ を避ける}} = U(x)\Psi(x),\ U(x) = \mathbb{I} + \frac{\Psi(t)\overline{\Psi}(t)}{K(t,t)(x-t)} :$$ 有理型 SL(2)gauge 変換

によって transformed 核は $\tilde{\mathbf{K}} \doteq K(x,y) - \dfrac{K(x,t)K(t,y)}{K(t,t)} \overset{!}{=} \dfrac{\overline{\tilde{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(y)}{x-y}$ と表され,

$$(\partial_x + \tilde{\mathcal{A}}(x))\tilde{\Psi}(x) = 0 \quad , \quad \mathrm{tr}\,\tilde{\mathcal{A}}(x) = \mathrm{tr}\left\{U(x)\mathcal{A}(x)U(x)^{-1} - \partial_x U(x)\cdot U(x)^{-1}\right\} = 0$$

$\square$

TW 法の適用可能性

具体的構成:

$$K(x,y)=\frac{\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)}{x-y} \quad , \quad m(x)\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\varphi(x)\\ \psi(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(x) & B(x)\\ -C(x) & -A(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(x)\\ \psi(x)\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{K}(x,y)=\frac{\tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(y)-\tilde{\psi}(x)\tilde{\varphi}(y)}{x-y} \quad , \quad m(x)\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}(x)\\ \tilde{\psi}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}(x) & \tilde{B}(x)\\ -\tilde{C}(x) & -\tilde{A}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}(x)\\ \tilde{\psi}(x)\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-\frac{b(a\varphi(x)-b\psi(x))}{x-t} \qquad a=\frac{\psi(t)}{\sqrt{K(t,t)}},\quad b=\frac{\varphi(t)}{\sqrt{K(t,t)}}$$

$$\tilde{\psi}(x)=\psi(x)-\frac{a(a\varphi(x)-b\psi(x))}{x-t}$$

$$\tilde{A}(x)=A(x)+\frac{a^2B(x)-b^2C(x)}{x-t}-\frac{ab\left(2abA(x)+a^2B(x)+b^2C(x)-m(x)\right)}{(x-t)^2}$$

$$\tilde{B}(x)=B(x)-\frac{2b(bA(x)+aB(x))}{x-t}+\frac{b^2\left(2abA(x)+a^2B(x)+b^2C(x)-m(x)\right)}{(x-t)^2}$$

$$\tilde{C}(x)=C(x)+\frac{2a(aA(x)+bC(x))}{x-t}+\frac{a^2\left(2abA(x)+a^2B(x)+b^2C(x)-m(x)\right)}{(x-t)^2}$$

m,A,B,C は多項式 $\Rightarrow$ 全体に $\times(x-t)^2$ すれば新たな $\tilde{m},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ も多項式 $\square$

物理的適用

1. 固有値を t に固定 ⇒ 行列 H の確率分布に $\det(H-t)^2$ をかける

$$\prod_{i=1}^{N} w(x_i)\cdot\prod_{i>j}^{N}(x_i-x_j)^2\Big|_{x_N=t} \propto \prod_{i=1}^{N-1}\underbrace{w(x_i)(x_i-t)^2}_{\tilde{w}(x_i;t)}\cdot\prod_{i>j}^{N-1}(x_i-x_j)^2$$

条件つき確率 $\tilde{\rho}_k(x_1,\dots,x_k|t_1,\dots,t_p)$ for weight $w(x)$

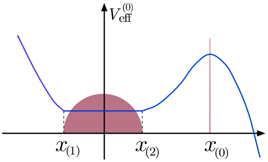
$=$ 条件なし確率 $\rho_k(x_1,\dots,x_k)$ for weight $\tilde{w}(x;t_1,\dots,t_p)$

quenched QCD ⇒ 2-flavor QCD, $m_u^2=m_d^2=-t$ [Damgaard-西垣 2001]

2. 有限個の固有値を主サポート外に配置 ⇒ 非臨界弦における ZZ branes

$$Z_N^{(1\,\mathrm{inst})} = N\,Z_{N-1}^{(0\,\mathrm{inst})}\times \int_{\mathbb{R}\backslash[x_{(1)},x_{(2)}]} dt\,w(t)\left\langle\det(H-t)^2\right\rangle_{(0\,\mathrm{inst})}$$

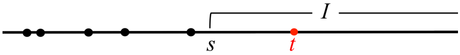
[花田-早川-石橋-川合-黒木-松尾-多田 2004, 鈴木-土屋 2005]



4 Joint distributions of extremal EVs

Jánossy 密度 for $\mathrm{K}_{\mathrm{Airy}}$

$\tilde{J}_1((s,\infty);t) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{Airy}}|_{(s,\infty)})$ を TW 法で評価



$\varphi(x) = \mathrm{Ai}(x)$, $\psi(x) = \mathrm{Ai}'(x)$ は, Lax 行列要素↓をもつ 1 階 LDE を満たす

$m(x) = 1$, $A(x) = 0$, $B(x) = 1$, $C(x) = -x$

$$\Downarrow$$

$\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ は, Lax 行列要素↓をもつ 1 階 LDE を満たす

$$\tilde{m}(x) = (x-t)^2$$

$$\tilde{A}(x) = -ab(a^2-1) - a^2 t + \left(a^2 + ab^3 - b^2 t\right) x + b^2 x^2 := \sum_{j=0}^{2} \alpha_j x^j$$

$$\tilde{B}(x) = b^2(a^2-1) + 2abt + t^2 - \left(2ab + b^4 + 2t\right) x + x^2 := \sum_{j=0}^{2} \beta_j x^j$$

$$\tilde{C}(x) = a^2(a^2-1) - (ab-t)^2 x - 2(ab-t)x^2 - x^3 := \sum_{j=0}^{3} \gamma_j x^j$$

Jánossy 密度 for $\mathbf{K}_{\mathrm{Airy}}$

Garnier 系 ODE

$$\partial_s \log \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{Airy}}|_{(s,\infty)}) = p_0(s)q_0'(s) - q_0(s)p_0'(s)$$

$$(s-t)^2 q_0' = \sum_{j=0}^{2}\Big(\alpha_j + \sum_{k=0}^{1}\alpha_{j+k+1}v_k + \sum_{k=0}^{2}\gamma_{j+k+1}u_k\Big)q_j - v_0q_0 + \sum_{j=0}^{2}\Big(\beta_j + \sum_{k=0}^{1}\alpha_{j+k+1}u_k + \sum_{k=0}^{1}\beta_{j+k+1}v_k\Big)p_j + u_0p_0$$

$$(s-t)^2 p_0' = \sum_{j=0}^{3}\Big(-\gamma_j + \sum_{k=0}^{1}\alpha_{j+k+1}w_k + \sum_{k=0}^{2}\gamma_{j+k+1}\tilde{v}_k\Big)q_j - w_0q_0 + \sum_{j=0}^{2}\Big(-\alpha_j + \sum_{k=0}^{1}\alpha_{j+k+1}\tilde{v}_k + \sum_{k=0}^{1}\beta_{j+k+1}w_k\Big)p_j + \tilde{v}_0p_0$$

$u_0' = -q_0q_0$, $u_1' = -q_0q_1$, $u_2' = -q_0q_2$, $v_0' = -q_0p_0$, $v_1' = -q_0p_1$, $v_2' = -q_0p_2$

$w_0' = -p_0p_0$, $w_1' = -p_0p_1$ (10 元連立，境界条件 @ $s \gg 1$)

$q_1 = s\,q_0 - v_0q_0 + u_0p_0$, $q_2 = s^2q_0 - v_0q_1 - v_1q_0 + u_0p_1 + u_1p_0$

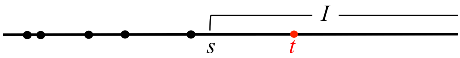
$q_3 = s^3q_0 - v_0q_2 - v_1q_1 - v_2q_0 + u_0p_2 + u_1p_1 + u_2p_0$

$p_1 = s\,p_0 - w_0q_0 + \tilde{v}_0p_0$, $p_2 = s^2p_0 - w_0q_1 - w_1q_0 + \tilde{v}_0p_1 + \tilde{v}_1p_0$

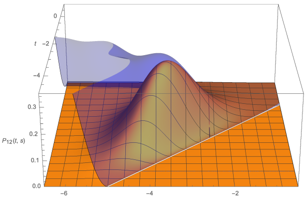
$\tilde{v}_0 = v_0$, $\tilde{v}_1 = v_1 - v_0\tilde{v}_0 + u_0w_0$, $\tilde{v}_2 = v_2 - v_0\tilde{v}_1 - v_1\tilde{v}_0 + u_0w_1 + u_1w_0$

最大&第 2 固有値の連結分布 vs $\mathfrak{S}_N$ 増加部分列

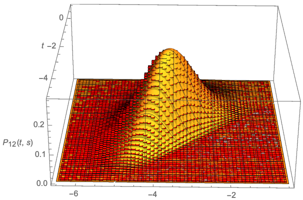
$\tilde{J}_1((s,\infty);t) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{Airy}}|_{(s,\infty)})$ を TW 法で評価



連結分布：$P_{12}(t,s) = \rho_1(t)\partial_s \tilde{J}_1((s,\infty);t)$

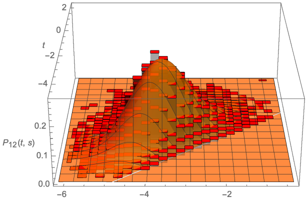


連結分布と 2 点相関関数



Hermite RM の最大 & 第 2 固有値

$N = 128$

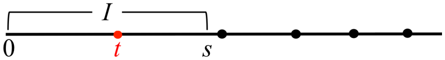


最長 & 第 2 増加部分列

$N = 8096$

Jánossy 密度 for $\mathrm{K}_{\mathrm{Bessel}}$

$\tilde{J}_1((0,s);t) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{Bessel}}|_{(0,s)})$ を TW 法で評価



$$\varphi(x) = J_\nu(\sqrt{x}), \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}\left(J_{\nu-1}(\sqrt{x}) - J_{\nu+1}(\sqrt{x})\right)$$ は,Lax 行列要素

$$m(x) = x, \quad A(x) = 0, \quad B(x) = 1, \quad C(x) = \frac{1}{4}(x - \nu^2)$$ をもつ LDE を満たす

$$\Downarrow$$

$\tilde{\varphi}(x)$,$\tilde{\psi}(x)$ は, Lax 行列要素 ↓ をもつ 1 階 LDE を満たす

$$\tilde{m}(x) = x(x-t)^2$$

$$\tilde{A}(x) = -ab(a^2-1) - a^2 t + \frac{\nu^2 b^2}{4}(ab - t) + \left(a^2 + \frac{ab^3 + b^2 t + \nu^2 b^2}{4}\right)x - \frac{b^2}{4}x^2 := \sum_{j=0}^{2} \alpha_j x^j$$

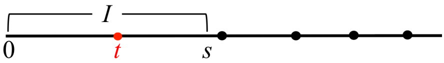
$$\tilde{B}(x) = b^2(a^2-1) + 2abt + t^2 - \frac{\nu^2 b^4}{4} + \left(-2ab + \frac{b^4}{4} - 2t\right)x + x^2 := \sum_{j=0}^{2} \beta_j x^j$$

$$\tilde{C}(x) = a^2(a^2-1) - \frac{\nu^2}{4}(ab-t)^2 + \left(\frac{(ab-t)^2}{4} - \frac{\nu^2}{2}(ab-t)\right)x + \left(\frac{ab-t}{2} - \frac{\nu^2}{4}\right)x^2 + \frac{x^3}{4} := \sum_{j=0}^{3} \gamma_j x^j$$

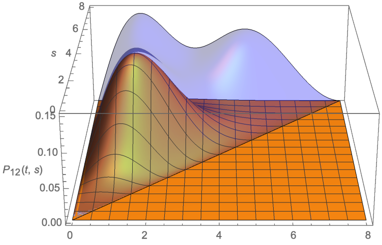
$\Rightarrow$ $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ を含む Garnier 系 ODE (10 元連立, 境界条件 @ $s \ll 1$)

最小&第 2 固有値の連結分布

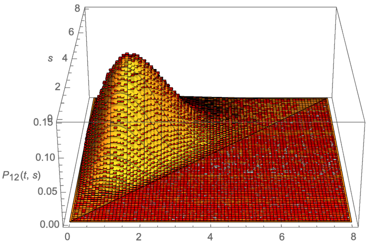
$\tilde{J}_1((0,s);t) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{Bessel}}|_{(0,s)})$ を TW 法で評価



連結分布：$P_{12}(t,s) = -\rho_1(t)\partial_s \tilde{J}_1((0,s);t)$



連結分布と 2 点相関関数



複素正方 RM の最小 & 第 2 特異値

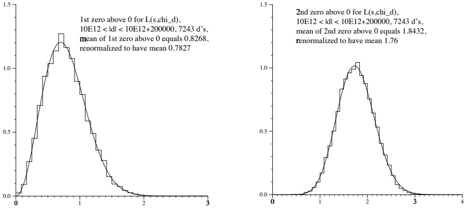
$N = 128$

最小&第 2 固有値の連結分布 vs L 関数零点

計算手法 Rubinstein 1998

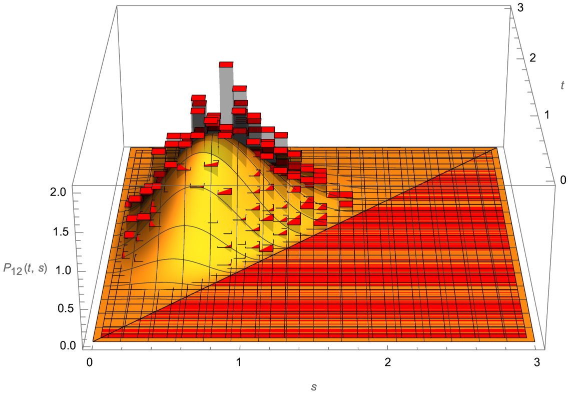
1. $|d| \gg 1$ を固定．関数等式 $L(s,\chi_d) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_d(n) n^{-s} \overset{\text{接続}}{=} (\Gamma\text{因子}) \times L(1-s,\chi_d)$
2. 十分大きな n まで $\chi_d(n)$ を求める by Legendre：$\chi_d(n)\chi_n(d) = (-1)^{(d-1)(n-1)/4}$
3. 収束域 $\Re\mathrm{e}(s) > 1$ 外にある零点 $L(\frac{1}{2} + ix_k, \chi_d) = 0$ を求める
   by Riemann-Siegel 公式：$L(s) = (s$ 側の有限和$) + (1-s$ 側の有限和$) +$ 補正
4. 規格化 (unfolding)：$x_k^{(\mathrm{uf})} = \frac{\log(|d|/\pi)}{2\pi} x_k$ [back to step 1]

$L(s,\chi_d)$ の最小・第 2 零点の分布 vs USp $(10^{12} < |d| < 10^{12} + 10^5)$



最小&第 2 固有値の連結分布 vs L 関数零点

$L(s,\chi_d)$ の最小・第 2 零点の連結分布 vs USp



$3200 < |d| < 6400$ d が小さすぎ & 統計不足!

結語

要約

- TW 条件：有理型 $\mathfrak{sl}(2)$ 接続に対する共変的定数切断 $(\partial_x + \mathcal{A}(x))\Psi(x) = 0$
- p 個の固有値の固定 $\mathbf{K} \doteq \dfrac{\overline{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y} \mapsto \tilde{\mathbf{K}} \doteq \dfrac{\overline{\tilde{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(y)}{x-y}$ は
  有理型 SL(2) gauge 変換 $\Psi(x) \mapsto \tilde{\Psi}(x) = U(x)\Psi(x)$
- TW 条件は $\mathbf{K}$ から $\mathbf{K}$ に遺伝. TW 法が Gap 確率に適用可なら Jánossy 密度にも可
- $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{Airy}}$, $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{Bessel}}$ から連結分布 $P_{12}(t,s)$ を Garnier ODE 系の解として決定
- 先行研究と異なり汎用的. q-直交, 超 Airy, 有限 N,.. の核 $\tilde{\mathbf{K}}$ に適用可. $P_{1\cdots p}$ も容易

- 最大・第 2 EV の連結分布 $\xrightarrow{\text{fit}}$ 対称群 $\mathfrak{S}_N$ の最長・第 2 増加部分列の分布 ✓
- 最小・第 2 EV の連結分布 $\xrightarrow{\text{fit}}$ Dirichlet $L(s,\chi_d)$ の最小・第 2 零点の分布 △
  [数論的"数値実験" の系統誤差 $\propto 1/\log N$ のため現状データ不足, 有限サイズスケーリングを議論できず]

結語

課題

- $^{\forall}r$ 成分の可積分核 $\mathbf{K} \doteq \dfrac{\boldsymbol{f}(x)\cdot\boldsymbol{g}(y)}{x-y}$, $\boldsymbol{f}(x)\cdot\boldsymbol{g}(x)=0$ にも拡張可 $(\mathrm{SL}(r))$
  $\Rightarrow$ GUE+定数行列 Pearcey 核 $(r=3)$ の Jánossy 密度 cf. [Brézin-氷上 1998]
- 多重臨界(超 Airy) 核の Jánossy 密度 $\simeq$ $c<1$ 非臨界弦における $\overset{(2,2k+1)}{\text{ZZ}}$ brane
  $\Rightarrow$ instanton の初項 [花田 et al.2004] を非摂動効果の完全和に改善できるはず
- $\tau = \mathrm{Det}(\mathbb{I}-\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{Ai}}|_{(s,\infty)})$ に対する Hamiltonian $^{\exists}H(q_0,p_0)$: $q_0' = \dfrac{\partial H}{\partial p_0}$, $p_0' = -\dfrac{\partial H}{\partial q_0}$?
  $\Rightarrow$ 可積分系に帰着, 固定した点 $\{t\}$ を Toda 時間変数 と見なせるはず