氏　　　名	Iwan Ernanto
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	自博乙第２号
学位授与年月日	令和６年３月２２日
学位授与の要件	学位規則第４条第２項
文部科学省報告番号	乙第３５５号
学位論文題目	On Positively Graded Unique Factorization Rings and Unique Factorization Modules （次数付き一意分解環と一意分解加群について）
論文審査委員	主査　島根大学教授　植田　玲 島根大学教授　山田　拓身 島根大学教授　青木　美穂

論文内容の要旨

Let R be a prime ring that is Noetherian and let Q be its quotient ring. Consider a (fractional) ideal A in Q. Define the left R-ideal$(R{:}A)_l = \{q \in Q \mid qA \subseteq R\}$, and the right R-ideal$(R{:}A)_r = \{q \in Q \mid Aq \subseteq R\}$. We define a v-operation: $A_v = (R{:}(R{:}A)_r)_l \supseteq A$and if $A = A_v$ then A is called a right v-ideal. Similarly, ${}_vA = (R{:}(R{:}A)_l)_r$ and A is called a left v-ideal if $A = {}_vA$. If ${}_vA = A = A_v$, then A is just called a v-ideal in Q. Further, define left order $O_l(A) = \{q \in Q \mid qA \subseteq A\}$ and right order $O_r(A) = \{q \in Q \mid Aq \subseteq A\}$ of A. In 1991, Abbasi et.al. defined a unique factorization ring (UFR for short) by using v-ideal, that is, a ring R is called a UFR if any prime ideal P with $P = P_v$ or $P = {}_vP$ is principal, that is, $P = pR = Rp$ for some $p \in P$.

Let $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_0} R_n$ be a positively graded ring which is a sub-ring of the strongly graded ring $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$, where R_0 is a Noetherian prime ring. In this dissertation, it is demonstrated that R qualifies as a unique factorization ring if and only if R_0 is a $\mathbb{Z}_0$-invariant unique factorization ring, and R_1 is a principal (R_0, R_0) bi-module. We give examples of $\mathbb{Z}_0$-invariant unique factorization rings which are not unique factorization rings.

Let M be a torsion-free module over an integral domain D with its quotient field K. In 2022, Nurwigantara et al. introduced the concept of a completely integrally closed module (CICM for short) for investigating arithmetic module theory. A module M is designated as a CICM if, for every non-zero submodule N of M, $O_K(N) = \{k \in K \mid kN \subseteq N\} = D$. Conversely, Wijayanti et al. introduced the notion of a v-submodule. In this context, a fractional submodule N in KM is termed a v-submodule if it satisfies $N = N_v$, where

$N_v = (N^-)^+$. Here, $N^- = \{k \in K \mid kN \subseteq N\}$, and $\mathfrak{n}^+ = \{m \in KM \mid \mathfrak{n}m \subseteq M\}$ for a fractional M-ideal $\mathfrak{n}$ in K. Further, in 2022, Wahyuni et.al. defined a unique factorization module (UFM for short) by a submodule approach. A module M is called a UFM if M is completely integrally closed, every v-submodule of M is principal, and M satisfies the ascending chain condition on v-submodules of M. In this dissertation, we prove that if D is a unique factorization domain and M is a completely integrally closed module with the ascending chain condition on v-submodules, then M is a unique factorization module (UFM) if and only if every prime v-submodule P of M is principal, that is, $P = pM$ for some $p \in D$.

Let $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ be a strongly graded module over a strongly graded ring $D = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} D_n$ and $L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_0} M_n$ be a positively graded module over a positively graded domain$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_0} D_n$. In this dissertation, we investigated whether the properties found in UFR can be developed in UFM. Some results that can be obtained include: if M_0 is a UFM over D_0 and D is a UFD, then M is a UFM over D. Moreover, we provide a necessary and sufficient condition for a positively graded module L to be a UFM over a positively graded R.

This dissertation is organized as follows. In Chapter I, we provide the historical research of this research. In Chapter II, we provide some preliminaries regarding graded rings and graded modules. In Chapter III, we provide some results regarding to UFRs. In Chapter IV, we provide some results regarding to UFMs, particularly related to strongly graded modules and positively graded modules. In Chapter V, we end this dissertation with some results on the generalized Dedekind module and future research plans.

Keywords: positively graded ring, positively graded module, unique factorization ring, unique factorization module, generalized Dedekind module.

論文審査結果の要旨

整数を調べる上で、整数を素因数分解し、分解の一意性を用いて考察することは最も基本的な手法である。このことから、整数環以外のどのような環において素因数分解とその一意性が成り立つか、という問題が古くから考えられている。実際、整数環上の多項式環においても素因数分解が可能であることは良く知られている。そこで、整数の素因数分解とその一意性を一般化して「一意分解環」というものが定義されており、この性質が様々な環拡大に対して引き継がれるための条件について多くの研究がなされている。

Ernanto 氏はこれまで、多項式環を一般化した「次数付き環」について研究してきている。特にどのような条件の下で、次数付き環が一意分解環になるか、というテーマに取り組んできた。また、Ernanto 氏も共著者の一人である参考文献 (5) において、一意分解環の概念を加群に拡張し、その特徴づけを与えている。Ernanto 氏はこれらの研究を元に、次数付き環の上の次数付き加群が一意分解加群になるための条件について考察してきた。

Ernanto 氏はこれらの研究成果を踏まえ、本学位論文をとりまとめた。以下にその内容の概要を示す。

１．次数付き環が一意分解環であるための条件について

自然数で次数付けられた環が一意分解環であるための必要十分条件は、基礎環が Z_0-不変な一意分解環であり１次の項が基礎環上１元で生成されていることであることを示した。

２．次数付き加群が一意分解加群であるための条件について

まず、加群が完全整閉であるための条件を求め、その結果を用いて、自然数で次数付けられた環上の次数付き加群が一意分解加群であるための必要十分条件は、０次の項が一意分解加群であることを示した。証明は次数付き加群のすべての素部分加群を分類することでなされている。また、この特徴づけを用いて、一意分解加群の多くの例を構成した。

３．環上の加群が一般デデキント加群になるための条件について

環上の加群が一般デデキント加群になるための必要条件を求めた。一般デデキント加群は Ernanto 氏も共著者の一人である参考論文（4）で定義された概念であり、一意分解加群を拡張した概念である。なお、一般デデキント環上の加群は必ずしも一般デデキント加群になるとは限らないが、そのような例も構成した。

以上のとおり、本論文は優れた研究成果に基づきまとめられたものであり、得られた特徴づけを利用して多くの例を構成することが可能であることなどから、この分野への貢献が期待でき、博士の学位に十分値する内容であると審査委員会で判定した。