

氏名	大島 慶之
学位の種類	博士 (理学)
学位記番号	自博甲第 1 号
学位授与年月日	令和 5 年 3 月 1 7 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項
文部科学省報告番号	甲第 7 8 7 号
学位論文題目	On inheritance of some topological properties of continua (連続体の位相的性質の継承について)
論文審査委員	主査 島根大学教授 中西 敏浩 島根大学教授 植田 玲 島根大学教授 山田 拓身 島根大学准教授 松橋 英市

## 論文内容の要旨

一般位相幾何学、特に連続体論では、必ずしも多様体や多面体のような局所的によい性質を持つ空間をあつかうわけではなく、より広い範囲の空間も研究対象としている。そのような空間は、線形代数学や微分積分学が適用できない複雑な構造を持つこともあり、その理解には空間の位相的性質を解析することが基本的である。ここで、連続体とはコンパクト連結距離空間のことをいう。連続体には大きく分けると分解可能連続体と分解不可能連続体の 2 種類がある。分解不可能連続体の構造は複雑であり、構成も易しくない。分解可能連続体は、分解不可能連続体と比較すると、その構造は単純であるが、特殊な分解不可能連続体を構成する際にも用いられ、連続体論において重要な役割を果たす。複雑な構造を持つ空間は構成に用いられた空間を基点にして解析を進めていくことができるため、分解可能連続体に関する研究は活発に行われている。

ここで、分解可能連続体の理論の歴史について簡単に述べる。まず、分解可能連続体の研究では、局所連結性に関する研究が頻繁に行われている。1941 年、Jones は局所連結性の一般化としてアポシンデティックという概念を導入した。また、余局所連結性もアポシンデティック性を導く。一方、連続体は局所連結ならば、弧状連結となることが知られている。1968 年、Wilder は  $C$ -連続体という概念を導入した。これは後に Wilder 連続体といわれるようになる。Wilder 性は弧状連結性を含む概念である。また、Wilder 性はアポシンデティック性、さらに半アポシンデティック性からも導かれる。2004 年、Lončar は弧状連結性の別の一般化として  $D$ -連続体という概念を導入した。2019 年、Espinoza および松橋は  $D$ -連続体に関連して  $D^*$ -連続体という概念を導入した。Wilder 性と  $D^*$ -性はどちらも  $D$ -性を導き、また弧状連結性より広い概念である連続体鎖状連結性という概念を包含している。さらに、 $D$ -連続体は分解可能である。Wilder の研究から弧状 Wilder 連続体が弧になることが分かる。また、 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ -連続体は弧状  $D$ -連続体であるが弧ではない。ここで、弧とは単位閉区間  $[0,1]$  に位相同型な連続体をいい、連続体が Y-状であるとは任意の

$\varepsilon > 0$ に対して各点の引き戻しの直径が $\varepsilon$ より小さくなるような $Y$ への連続全射をとれるときにいう。特に、 $Y$ が弧のとき、連続体は弧状であるという。位相同型写像は各点の引き戻しの直径が0であるので、各点の引き戻しの直径が小さくなるほど、その写像は位相同型写像に近づいていくと考えられる。この意味で、 $Y$ 状連続体は $Y$ に類似したものと考えられている。これらに関連して、弧状 $D^*$ -連続体であり弧ではないものが存在するか、という問題があげられている。

本論文では3つの観点から分解可能連続体の位相的性質の継承について述べる。構成は4つの章からなる。

第1章では、本論文で使用する用語や上記で述べた性質の詳細な定義を紹介する。また、連続体に関する新しい概念として $D^{**}$ -連続体というものを導入する。これを用いて、弧状 $D^*$ -連続体は弧となることを示す。この結果は、先ほど述べた問題が否定的に解決したことを意味する。

第2章では、精製可能写像について議論する。1978年、Ford および Rogers は精製可能写像という概念を導入した。精製可能写像は位相同型写像を包含する概念である。連続体 $X$ から連続体 $Y$ への精製可能写像が存在するとき、 $X$ は $Y$ 状であるが、その逆は正しくない。実際、弧状連続体で $[0,1]$ への精製可能写像をとれないものが存在する。1983年、細川は精製可能写像がアポシデティック性や半アポシデティック性を含むいくつかの性質を保存することを示した。彼の結果に関連して、我々は、精製可能写像が余局所連結性を保存することを示す。また、精製可能写像がアポシデティック性を保存することの別証明も与える。一方、1986年、Grace は精製可能写像の一般化として近接精製可能写像というものを導入した。我々は、近接精製可能写像が余局所連結性を保存しないことも示す。

第3章では、Whitney の条件について議論する。Whitney の条件は超空間、すなわち連続体の空でない部分連続体全体からなる空間に関連した概念であり、超空間の断面の構造の理解に繋がる。1942年のKelleyの超空間に関する研究以降、超空間の研究は活発になり、1978年、Krasinkiewicz および Nadler により Whitney の条件が定式化された。一方、1978年、Nadler は Whitney の逆条件という概念を導入した。我々は、余局所連結性、Wilder 性、 $D$ -性、 $D^*$ -性、 $D^{**}$ -性が Whitney の条件をみたすことを示し、また、余局所連結性が Whitney の逆条件をみたさないことを示す。

第4章では、単調上半連続集合値写像による逆極限について研究する。逆極限は、複雑な空間を構成する際にしばしば用いられるものである。1954年、Capel は局所連結連続体の全射単調連続写像による逆極限が局所連結になることを示した。また、2020年、Espinoza および松橋は Capel の定理において局所連結の部分 $n$ -アポシデティック、半アポシデティック、連続体鎖状連結、Wilder、 $D$ 、 $D^*$ 、余局所連結のいずれかに置き換えても成り立つことを示した。一方、2006年、Ingram および Mahavier により連続写像による逆極限が上半連続集合値写像による逆極限に一般化され、2017年、Kelly が集合値写像に対する単調性を定義し、弧の全射単調上半連続集合値写像による逆極限が局所連結であることを示した。我々は、単調条件というものを考え、ある位相的性質をみたす連続体の全射単調上半連続集合値写像による逆極限が再びその性質をみたすかどうかを評価する。

## 論文審査結果の要旨

コンパクト連結距離空間のことを連続体とよぶ。連続体のクラスは分解可能なものと分解不可能なもの2つに分けられる。一般に前者の連続体の方が後者に比べ単純な構造を持ち、その性

質の解析が容易である場合が多い。しかし Janiszewski 連続体のように部分連続体がすべて分解可能または 1 点集合となるにも関わらず弧 (= 単位閉区間と同相な空間) を含まないようなものもあり、分解可能な連続体が必ずしも簡単な構造を持つかといえばそうではない。それでは分解可能連続体のクラスのうち、どこまでが単純な構造をもち、どこからが複雑な構造を持つかという自然な疑問が生じる。また、分解不可能連続体に関しても、その構成に分解可能連続体が用いられるため、分解可能連続体の性質を調べることは有意である。したがって連続体理論全般において分解可能連続体の研究は重要である。

本提出論文は分解可能連続体の位相的性質の継承の研究に関連するものであり、信頼のおけるレフリー制度の整った国際数学雑誌に受理・掲載済みの 2 編の関連論文をもとに構成されている。

以下本提出論文の構成を述べる。第 1 章では本論文に使用される定義、用語、概念が紹介され、それに続き関連する具体例、さらにいくつかの先行結果について記述されている。また、弧状連結性より弱い  $D^{**}$ -性の概念を新しく導入し、任意の連続体において、全ての部分連続体が弧状連結であることと全ての部分連続体が  $D^{**}$  であることは同値であることが証明されている。この結果は 1969 年の Wilder の定理を大きく改良しており、さらに 2020 年の Espinoza-松橋の問題に対する否定的な解決をもたらしている。第 2 章では精製可能写像に関する諸結果について述べられている。とくに、定義域の余局所連結性が精製可能写像によって保存されることが証明されている。また、それとは対照的に近接精製可能写像によっては余局所連結性が保存されない具体例も提示されている。第 3 章ではいくつかの分解可能な連続体のクラスに関して、それらの超空間の性質、とくに Whitney の条件についての諸結果が証明されている。Whitney の条件とは連続体の性質がその超空間の断面に保存されるか否かを調べるための条件である。このことに関する研究は連続体の超空間理論における中心的課題であり、本章における諸結果は興味深いものである。具体的には第 3 章で余局所連結性、Wilder 性、 $D$ -性、 $D^*$ -性、 $D^{**}$ -性が Whitney の条件をみたすことを示し、また、余局所連結性が Whitney の逆条件を満たさないことを示している。第 4 章では上半連続集合値写像による逆極限についての考察がなされている。集合値写像による逆極限についての研究はまだ歴史が浅いが、現在進行形で多くの研究が活発になされている。通常連続写像を結合写像にもつ逆極限は単純な空間から複雑な空間を構成するためのツールとして有用であり、また逆極限そのものの性質を調べる研究も活発である。とくに結合写像が単調な場合、因子空間の性質が逆極限に保存されるかどうかを調べる研究は古くからなされており、多くの先行結果がある。第 4 章では単調な上半連続集合値写像による逆極限の性質と因子空間の性質との関係性が述べられている。とくに因子空間がすべて Wilder 連続体であるような全射単調集合値写像による逆極限はまた Wilder 連続体になることが証明されている。それに対して因子空間が全て余局所連結連続体、 $D$ -連続体、 $D^*$ -連続体でも逆極限にそれらの性質が保存されない例も提示されている。これらの結果は、通常単調連続写像による逆極限において、因子空間の上述の性質がすべて逆極限に保存されることとは対照的である。

以上の結果は連続体理論における発展に大きく寄与するものである。したがって審査委員会では、本提出論文は本研究科の課程博士の学位授与に十分に値するものと判断した。