

# Tracy-Widom method for Jánossy densities of random matrices

最大/最小固有値の連結分布

西垣 真祐 [島根大]

日本物理学会秋季大会 2021  
2109.00790 [math-ph], 17 ページ

- 1 イントロダクション
- 2 行列式点過程と Jánossy 密度
- 3 TW 法の適用可能性
- 4 最大/小固有値の連結分布

# 1 Introduction

# 最大/小固有値分布

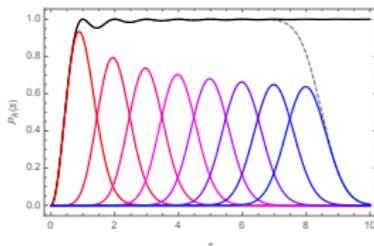
## Gap 確率と可積分系

$$\text{Prob}(\text{no EV in } (a_1, a_2)) = \text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a_1, a_2)})$$

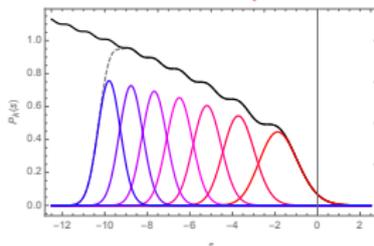
$\mathbf{K}$  : 積分演算子  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

- 佐藤スクール 1980 : **バンド内部** :  $\mathbf{K}_{\text{sine}}|_{(0, s)} \Rightarrow \text{Painlevé V}$   
Tracy-Widom 1993 : **バンド端 (自由端)** :  $\mathbf{K}_{\text{Airy}}|_{(s, \infty)} \Rightarrow \text{Painlevé II}$   
Tracy-Widom 1993 : **対称点近傍 (固定端)** :  $\mathbf{K}_{\text{Bessel}}|_{(0, s)} \Rightarrow \text{Painlevé III}'$

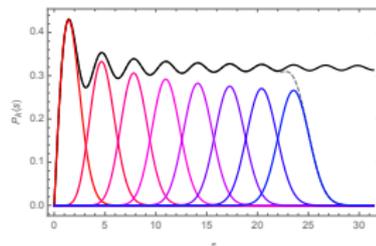
準位間隔分布



最大固有値分布 (TW 分布)

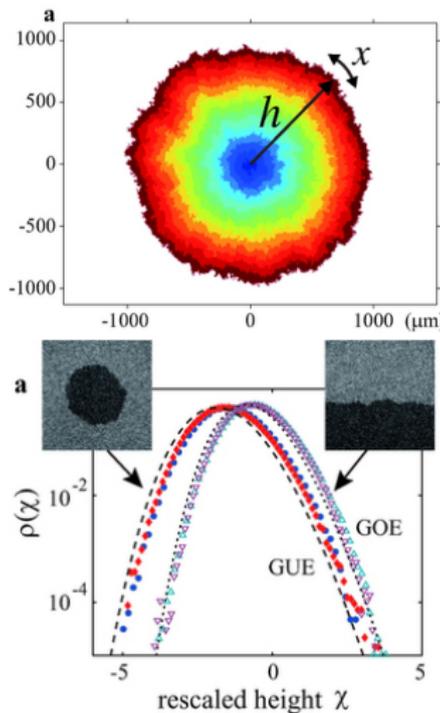


最小特異値分布



# 最大/小固有値分布

液晶界面成長(KPZ) [竹内 et al. 2011]



**WOLFRAM** Products & Services Technologies Solutions

Home Principles Uses What's New Resources Documenta

Back to Latest Features

Random Matrices

## Tracy–Widom Distribution

Tracy–Widom distribution is the limiting distribution of the scaled largest eigenvalue to Gaussian ensembles. It also appears in various different disciplines, such as count models, phase transitions, etc., and gives accurate predictions.

Tracy–Widom distribution consists of three classes  $\beta = 1, 2$ , and  $4$ . Each corresponds to ensembles; see the corresponding PDFs.

hide input

```

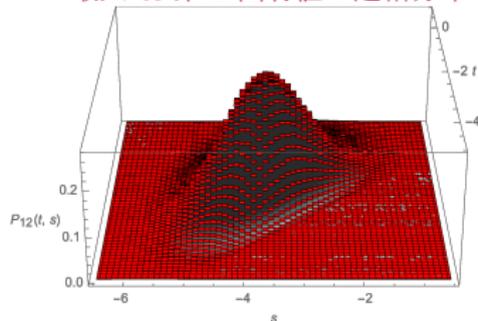
In[1]:= Plot[Table[PDF[TracyWidomDistribution[beta], x], {beta, {1, 2, 4}}] // Evaluate,
{x, -5, 2}, Filling -> Axis, PlotLegends -> {"beta = 1", "beta = 2", "beta = 4"},
ImageSize -> Medium, PlotTheme -> "Detailed"]
    
```

Plot of Tracy–Widom distribution PDFs for  $\beta = 1$  (blue),  $\beta = 2$  (orange), and  $\beta = 4$  (green).

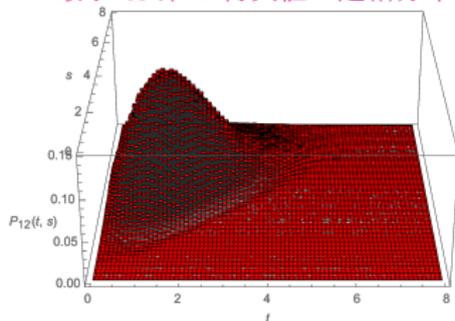
## 最大/小固有値分布

連結分布は?

最大 & 第 2 固有値の連結分布



最小 & 第 2 特異値の連結分布



行列サイズ = 128 , サンプル数 =  $10^7$

連結分布  $P_{12}(t, s) \Rightarrow$  **Isomonodromic** 系

Forrester-Witte 2007 : 70 ページ : 対称点近傍  $\rightarrow$  IS for Painlevé III'  $\searrow$  2 重極限での縮退

Witte-Bornemann-Forrester 2013 : 29 ページ : バンド端  $\rightarrow$  IS for Painlevé II

## Tracy-Widom 法

この問題を再訪する動機：

- より **user-friendly** な解析的手法！
- $\forall$  可積分な核  $\mathbf{K} \doteq \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{x - y}$  or  $\frac{\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(y)}{x - y}$  に適用可能
- $1 \sim p$  番目の固有値の連結分布  $P_{12\dots p}(s_1, \dots, s_p)$  に拡張可能

答：TW の関数解析的手法

- 核を構成する関数が多項式係数  $m, A, B, C$  をもつ LDE  $\downarrow$  を満たすなら  
traceless :  $\mathfrak{sl}(2)$

$$m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ -C(x) & -A(x) \end{bmatrix}}^{\text{traceless : } \mathfrak{sl}(2)} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix},$$

- $\text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a_1, a_2)})$  は  $m, A, B, C$  の係数に依存する PDE 系によって決定

を ゲージ変換された核  $\tilde{\mathbf{K}}$  に適用

## Tracy-Widom 法

この問題を再訪する動機：

- より **user-friendly** な解析的手法！
- $\forall$  可積分な核  $\mathbf{K} \doteq \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{x - y}$  or  $\frac{\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(y)}{x - y}$  に適用可能
- $1 \sim p$  番目の固有値の連結分布  $P_{12\dots p}(s_1, \dots, s_p)$  に拡張可能

答：**TW** の関数解析的手法

- 核を構成する関数が**多項式係数**  $m, A, B, C$  をもつ LDE  $\downarrow$  を満たすなら  
traceless :  $\mathfrak{sl}(2)$

$$m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ -C(x) & -A(x) \end{bmatrix}}^{\text{traceless : } \mathfrak{sl}(2)} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix},$$

- $\text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a_1, a_2)})$  は  $m, A, B, C$  の係数に依存する PDE 系によって決定

を ゲージ変換された核  $\tilde{\mathbf{K}}$  に適用

## Tracy-Widom 法

この問題を再訪する動機：

- より **user-friendly** な解析的手法！
- $\forall$  可積分な核  $\mathbf{K} \doteq \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{x - y}$  or  $\frac{\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(y)}{x - y}$  に適用可能
- $1 \sim p$  番目の固有値の連結分布  $P_{12\dots p}(s_1, \dots, s_p)$  に拡張可能

答：**TW** の関数解析的手法

- 核を構成する関数が**多項式係数**  $m, A, B, C$  をもつ LDE  $\downarrow$  を満たすなら  
traceless :  $\mathfrak{sl}(2)$

$$m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ -C(x) & -A(x) \end{bmatrix}}^{\text{traceless : } \mathfrak{sl}(2)} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix},$$

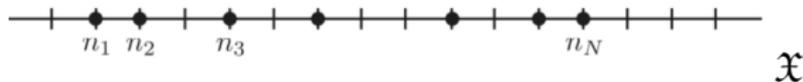
- $\text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a_1, a_2)})$  は  $m, A, B, C$  の係数に依存する PDE 系によって決定

を **ゲージ変換された核  $\tilde{\mathbf{K}}$**  に適用

## 2 Janossy density in DPP

## 行列式点過程

### 加算集合上の DPP



$N$  個の fermion の確率分布 :  $P(n_1, \dots, n_N) = \frac{1}{N!} \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^N$   
 with 射影核 :  $\mathbf{K} = [K(n, n')]_{n, n' \in \mathfrak{X}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}, \quad \text{tr } \mathbf{K} = N$

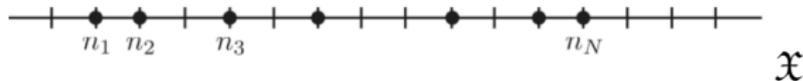


$k$  個の fermion の連結分布 :  $\rho_k(n_1, \dots, n_k) = \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^k$   
 $I \subsetneq \mathfrak{X}$  に粒子がない確率 =  $\det(\mathbb{I} - \mathbf{K}_I), \quad \mathbf{K}_I = [K(n, n')]_{n, n' \in I}$

全ての式は連続集合上の DPP にも該当  
 $\rho_k(\{n\}) \rightarrow \rho_k(\{x\})dx_1 \cdots dx_k, \quad \det \rightarrow \text{Det}$

## 行列式点過程

### 加算集合上の DPP



$N$  個の fermion の確率分布 :  $P(n_1, \dots, n_N) = \frac{1}{N!} \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^N$

with 射影核 :  $\mathbf{K} = [K(n, n')]_{n, n' \in \mathfrak{X}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}, \quad \text{tr } \mathbf{K} = N$

↓

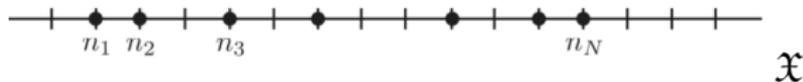
$k$  個の fermion の連結分布 :  $\rho_k(n_1, \dots, n_k) = \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^k$

$I \subsetneq \mathfrak{X}$  に粒子がない確率 =  $\det(\mathbb{I} - \mathbf{K}_I), \quad \mathbf{K}_I = [K(n, n')]_{n, n' \in I}$

全ての式は連続集合上の DPP にも該当  
 $\rho_k(\{n\}) \rightarrow \rho_k(\{x\})dx_1 \cdots dx_k, \quad \det \rightarrow \text{Det}$

## 行列式点過程

### 加算集合上の DPP



$N$  個の fermion の確率分布 :  $P(n_1, \dots, n_N) = \frac{1}{N!} \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^N$

with 射影核 :  $\mathbf{K} = [K(n, n')]_{n, n' \in \mathfrak{X}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}, \quad \text{tr } \mathbf{K} = N$

↓

$k$  個の fermion の連結分布 :  $\rho_k(n_1, \dots, n_k) = \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^k$

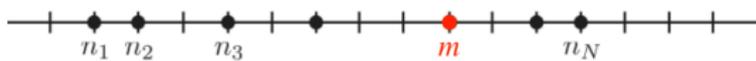
$I \subsetneq \mathfrak{X}$  に粒子がない確率 =  $\det(\mathbb{I} - \mathbf{K}_I), \quad \mathbf{K}_I = [K(n, n')]_{n, n' \in I}$

全ての式は連続集合上の DPP にも該当  
 $\rho_k(\{n\}) \rightarrow \rho_k(\{x\}) dx_1 \cdots dx_k, \quad \det \rightarrow \text{Det}$

## 条件付き確率

1つの粒子の位置  $m$  を固定し,  $m$  を避ける **transformed** 核 を定義

$$\tilde{K}(n, n') := K(n, n') - \frac{K(n, m)K(m, n')}{K(m, m)}$$



- 射影性, 規格化を満たす:  $\tilde{\mathbf{K}} = \left[ \tilde{K}(n, n') \right]_{n, n' \in \mathcal{X}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}, \text{tr } \tilde{\mathbf{K}} = N - 1$
- 条件付き連結分布 ( $m$  は占有済) に対する核になる:

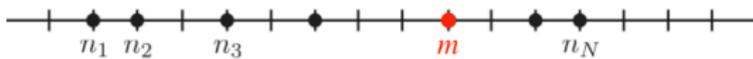
$$\tilde{\rho}_1(n|m) = \frac{\rho_2(n, m)}{\rho_1(m)} = \frac{K(n, n)K(m, m) - K(n, m)K(m, n)}{K(m, m)} = \tilde{K}(n, n)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2(n_1, n_2|m) &= \frac{\rho_3(n_1, n_2, m)}{\rho_1(m)} \\ &= \frac{K(n_1, n_1)K(n_2, n_2)K(m, m) \pm (5 \text{ 項})}{K(m, m)} = \det \left[ \tilde{K}(n_i, n_j) \right]_{i, j=1}^2, \text{ etc} \end{aligned}$$

## 条件付き確率

1つの粒子の位置  $m$  を固定し,  $m$  を避ける **transformed** 核 を定義

$$\tilde{K}(n, n') := K(n, n') - \frac{K(n, m)K(m, n')}{K(m, m)}$$



- 射影性, 規格化を満たす:  $\tilde{\mathbf{K}} = \left[ \tilde{K}(n, n') \right]_{n, n' \in \mathfrak{X}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}, \text{tr } \tilde{\mathbf{K}} = N - 1$
- **条件付き**連結分布 ( $m$  は占有済) に対する核になる:

$$\tilde{\rho}_1(n|m) = \frac{\rho_2(n, m)}{\rho_1(m)} = \frac{K(n, n)K(m, m) - K(n, m)K(m, n)}{K(m, m)} = \tilde{K}(n, n)$$

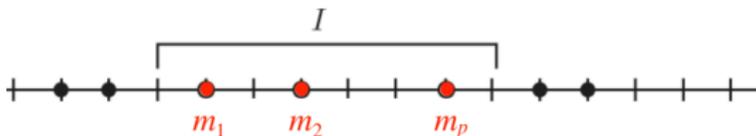
$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2(n_1, n_2|m) &= \frac{\rho_3(n_1, n_2, m)}{\rho_1(m)} \\ &= \frac{K(n_1, n_1)K(n_2, n_2)K(m, m) \pm (5 \text{ 項})}{K(m, m)} = \det \left[ \tilde{K}(n_i, n_j) \right]_{i, j=1}^2, \text{ etc} \end{aligned}$$

## Jánossy 密度

### Lemma

部分集合  $I$  が  $m_1, \dots, m_p \in I$  以外は粒子を含まない条件付き確率は

$$\tilde{J}_p(I | m_1, \dots, m_p) = \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_I), \quad \tilde{\mathbf{K}}_I = \left[ \tilde{K}(n, n') \right]_{n, n' \in I}$$



Jánossy 密度 = 部分集合  $I$  が丁度  $p$  個の粒子 @  $m_1, \dots, m_p$  を含む確率は

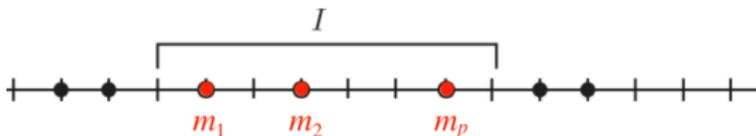
$$J_p(I; m_1, \dots, m_p) = \rho_k(m_1, \dots, m_p) \cdot \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_I)$$

## Jánossy 密度

### Lemma

部分集合  $I$  が  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p \in I$  以外は粒子を含まない条件付き確率は

$$\tilde{J}_p(I | \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p) = \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_I), \quad \tilde{\mathbf{K}}_I = \left[ \tilde{K}(n, n') \right]_{n, n' \in I}$$



Jánossy 密度 = 部分集合  $I$  が丁度  $p$  個の粒子 @  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p$  を含む確率は

$$J_p(I; \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p) = \rho_k(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p) \cdot \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_I)$$

### **3 Applicability of T-W method**

## TW 法の適用可能性

### Tracy-Widom 法の適用可能条件 (1994) :

- ① 核が Christoffel-Darboux 型 :  $\mathbf{K} \doteq \frac{1}{x-y} [\varphi(x), -\psi(x)] \begin{bmatrix} \psi(y) \\ \varphi(y) \end{bmatrix} := \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y}$
- ② 2 成分関数  $\Psi(x)$  が有理形 1 階 LDE を満たす :  $(\partial_x + \mathcal{A}(x)) \Psi(x) = 0$  ,  $\text{tr } \mathcal{A}(x) = 0$

### Theorem

核  $\mathbf{K}$  が TW 適用可能条件を満たすなら, transformed 核  $\tilde{\mathbf{K}}$  も満たす

### Proof.

有理型  $SL(2)$  ゲージ変換  $\tilde{\Psi}(x) = U(x)\Psi(x)$ ,  $U(x) := \mathbb{I} - \frac{\bar{\Psi}(t)^T \Psi(t)^T}{\rho_1(t)(x-t)}$  により transformed 核は

$$\tilde{\mathbf{K}} \doteq \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y} - \frac{1}{\rho_1(t)} \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(t)}{x-t} \frac{\bar{\Psi}(t)\Psi(y)}{t-y} \doteq \frac{\bar{\tilde{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(y)}{x-y} \text{ と表され,}$$

$$(\partial_x + \tilde{\mathcal{A}}(x))\tilde{\Psi}(x) = 0 \text{ , } \text{tr } \tilde{\mathcal{A}}(x) = \text{tr} \{U(x)\mathcal{A}(x)U(x)^{-1} - \partial_x U(x) \cdot U(x)^{-1}\} = 0 \quad \square$$

## TW 法の適用可能性

### Tracy-Widom 法の適用可能条件 (1994) :

- ① 核が Christoffel-Darboux 型 :  $\mathbf{K} \doteq \frac{1}{x-y} [\varphi(x), -\psi(x)] \begin{bmatrix} \psi(y) \\ \varphi(y) \end{bmatrix} := \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y}$
- ② 2 成分関数  $\Psi(x)$  が有理形 1 階 LDE を満たす :  $(\partial_x + \mathcal{A}(x)) \Psi(x) = 0$  ,  $\text{tr } \mathcal{A}(x) = 0$

### Theorem

核  $\mathbf{K}$  が TW 適用可能条件を満たすなら, transformed 核  $\tilde{\mathbf{K}}$  も満たす

### Proof.

有理型  $SL(2)$  ゲージ変換  $\tilde{\Psi}(x) = U(x)\Psi(x)$ ,  $U(x) := \mathbb{I} - \frac{\bar{\Psi}(t)^T \Psi(t)^T}{\rho_1(t)(x-t)}$  により transformed 核は

$$\tilde{\mathbf{K}} \doteq \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y} - \frac{1}{\rho_1(t)} \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(t)}{x-t} \frac{\bar{\Psi}(t)\Psi(y)}{t-y} \doteq \frac{\bar{\tilde{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(y)}{x-y} \text{ と表され,}$$

$$(\partial_x + \tilde{\mathcal{A}}(x))\tilde{\Psi}(x) = 0 \text{ , } \text{tr } \tilde{\mathcal{A}}(x) = \text{tr} \{U(x)\mathcal{A}(x)U(x)^{-1} - \partial_x U(x) \cdot U(x)^{-1}\} = 0 \quad \square$$

## TW 法の適用可能性

### Tracy-Widom 法の適用可能条件 (1994) :

- ① 核が Christoffel-Darboux 型 :  $\mathbf{K} \doteq \frac{1}{x-y} [\varphi(x), -\psi(x)] \begin{bmatrix} \psi(y) \\ \varphi(y) \end{bmatrix} := \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y}$
- ② 2 成分関数  $\Psi(x)$  が有理形 1 階 LDE を満たす :  $(\partial_x + \mathcal{A}(x))\Psi(x) = 0$  ,  $\text{tr } \mathcal{A}(x) = 0$

### Theorem

核  $\mathbf{K}$  が TW 適用可能条件を満たすなら, transformed 核  $\tilde{\mathbf{K}}$  も満たす

### Proof.

有理型  $\text{SL}(2)$  ゲージ変換  $\tilde{\Psi}(x) = U(x)\Psi(x)$ ,  $U(x) := \mathbb{I} - \frac{\bar{\Psi}(t)^T \Psi(t)^T}{\rho_1(t)(x-t)}$  により transformed 核は

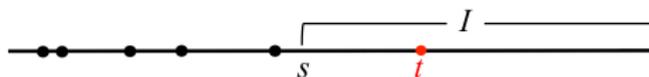
$$\tilde{\mathbf{K}} \doteq \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y} - \frac{1}{\rho_1(t)} \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(t)}{x-t} \frac{\bar{\Psi}(t)\Psi(y)}{t-y} \stackrel{!}{=} \frac{\bar{\tilde{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(y)}{x-y} \text{ と表され,}$$

$$(\partial_x + \tilde{\mathcal{A}}(x))\tilde{\Psi}(x) = 0 \text{ , } \text{tr } \tilde{\mathcal{A}}(x) = \text{tr} \{U(x)\mathcal{A}(x)U(x)^{-1} - \partial_x U(x) \cdot U(x)^{-1}\} = 0 \quad \square$$

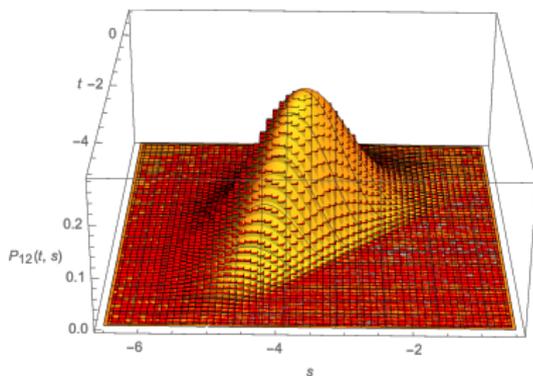
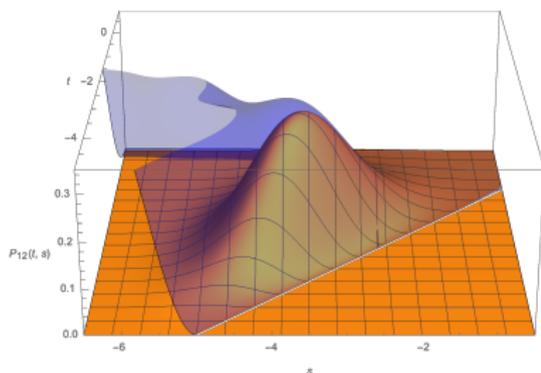
## 4 Joint distributions of extremal EVs

## 最大&第2固有値の連結分布

$\text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Airy}}|_{(s,\infty)}) = \tilde{J}_1(t, (s, \infty))$  を TW 法で評価

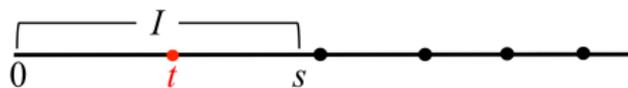


連結分布 :  $P_{12}(t, s) = \Theta(t - s)\rho_1(t)\partial_s \tilde{J}_1(t, (s, \infty))$

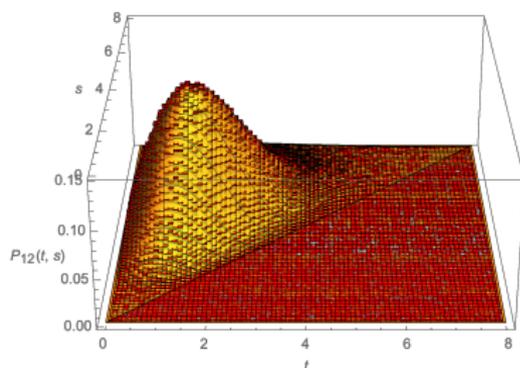
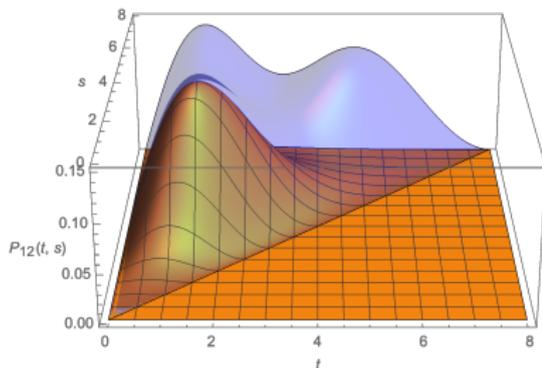


## 最小&第2特異値の連結分布

$\text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Bessel}}|_{(0,s)}) = \tilde{J}_1(t, (0, s))$  を TW 法で評価



連結分布 :  $P_{12}(t, s) = -\Theta(s - t)\rho_1(t)\partial_s \tilde{J}_1(t, (0, s))$



## 結語

### 要約

- TW 条件 : 有理型  $\mathfrak{sl}(2)$  接続に対する共変的定数切断  $(\partial_x + \mathcal{A}(x))\Psi(x) = 0$
- TW 法が Gap 確率に適用可なら,  $SL(2)$  変換により Jánossy 密度にも適用可
- $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Airy}}, \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Bessel}}$  から連結分布  $P_{12}(t, s)$  を解析的に計算  $\Rightarrow$  数値統計を再現
- Pros: 汎用的.  $\forall q$ -直交, 超 Airy, 有限  $N$  などの核に適用可能.  $P_{1\dots p}$  も容易
- Cons: Painlevé/IS との関連が見難い. 漸近評価  $|t - s| \gg 1$  は容易でない

### 応用例

- $\forall r$  成分の可積分核  $\mathbf{K} \doteq \frac{\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(y)}{x - y}$ ,  $\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) = 0$  にも拡張可 ( $SL(r)$ )  
 $\Rightarrow$  GUE+定数行列の Pearcey 核 ( $r = 3$ ) [Brézin-氷上 1998] に適用中
- 超 Airy 核に対する Jánossy 密度  $\simeq c < 1$  非臨界弦における ZZ brane  
 $\Rightarrow$  D-brane 効果の初項 [花田 et al. 2004] を非摂動効果の完全和に改善できる
- 固有値の連結分布  $P_{1\dots p} \xrightarrow{\text{fit}}$  物理系, e.g.  $L$  関数の零点分布 [Keating 2000]