

# Tracy-Widom method for Jánossy densities of random matrices

- 順序つき固有値の連結分布について -

西垣 真祐 [島根大]

PTEP(2021)113A01 = 2109.00790[math-ph] : 17pp

離散的手法による場と時空のダイナミクス 2021  
2021/12/25~27 京都大

- 1 Introduction：順序つき固有値分布
- 2 行列式点過程と Jánosy 密度
- 3 TW 法の適用可能性
- 4 最大/小固有値の連結分布

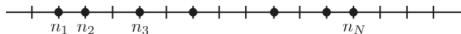
# 固有値分布

## ランダム Hermite 行列

$$\begin{aligned}
 \text{JPD}(x_0, \dots, x_{N-1}) &= \prod_i w(x_i) \cdot \prod_{i>j} (x_i - x_j)^2 \\
 &= \prod_i w(x_i) \cdot \det[x_i^k] \cdot \det[x_j^k] && : \text{VdM 行列式} \\
 &= \prod_i w(x_i) \cdot \det[P_k(x_i)] \cdot \det[P_k(x_j)] : \text{直交多項式} \\
 &= \det[\varphi_k(x_i)] \cdot \det[\varphi_k(x_j)] && : \text{直交関数} \\
 &= \det \left[ \sum_{k<N} \varphi_k(x_i) \varphi_k(x_j) \right] && : \text{射影核 } \sum_{k<N} |k\rangle \langle k| \\
 \text{3 項漸化式} &\propto \det \left[ \frac{\varphi_N(x_i) \varphi_{N-1}(x_j) - \varphi_{N-1}(x_i) \varphi_N(x_j)}{x_i - x_j} \right] \\
 \text{局所 DSL} &\xrightarrow{\quad} \det \left[ \frac{\varphi(x_i) \psi(x_j) - \psi(x_i) \varphi(x_j)}{x_i - x_j} \right] := \det[K(x_i, x_j)] \\
 &\nwarrow \varphi(x) = \sin x, \text{Ai}(x), J_\nu(\sqrt{x}), \dots
 \end{aligned}$$

# Gap 確率

## 離散的 DPP



$$\text{Prob}(n_1, \dots, n_p \text{ に粒子がある}) = \det[K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^p$$

↓

$$\text{Prob}(n \text{ に粒子がない}) = 1 - K(n, n)$$

$n$  と  $n'$  に粒子がある引き過ぎを補正

$$\begin{aligned} \text{Prob}(n, n' \text{ に粒子がない}) &= 1 - K(n, n) - K(n', n') + \overbrace{\begin{vmatrix} K(n, n) & K(n, n') \\ K(n', n) & K(n', n') \end{vmatrix}} \\ &= \begin{vmatrix} 1 - K(n, n) & -K(n, n') \\ -K(n', n) & 1 - K(n', n') \end{vmatrix} \end{aligned}$$

... ..

$$\text{Prob}(\text{集合 } I \text{ に粒子がない}) = \det(\mathbb{I} - [K(n, n')]_{n, n' \in I})$$

↓

$$\text{Prob}(\text{集合 } I \text{ に粒子が } p \text{ 個}) = \frac{1}{p!} (-\partial_z)^p \det(\mathbb{I} - z[K(n, n')]_{n, n' \in I}) \Big|_{z=1}$$

# 順序つき固有値分布

## Gap 確率 as Fredholm 行列式

$$\text{Prob}(p \text{ EVs} \in (a, b)) = \frac{1}{p!} (-\partial_z)^p \text{Det}(\mathbb{I} - z\mathbf{K}|_{(a,b)}) \Big|_{z=1}$$

核  $\mathbf{K}$  : 積分演算子  $(\mathbf{K}|_{(a,b)}f)(x) = \int_a^b dy K(x, y)f(y)$

神保-三輪-毛利-佐藤 1980 : **バンド内部 (bulk)**  $\mathbf{K}_{\text{sin}}|_{(0,s)} \Rightarrow \text{Painlevé V}$

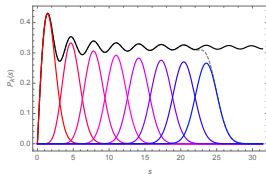
Tracy-Widom 1993 : **バンド端 (soft 端)**  $\mathbf{K}_{\text{Airy}}|_{(s,\infty)} \Rightarrow \text{Painlevé II}$

Tracy-Widom 1993 : **固定点近傍 (hard 端)**  $\mathbf{K}_{\text{Bessel}}|_{(0,s)} \Rightarrow \text{Painlevé III}'$

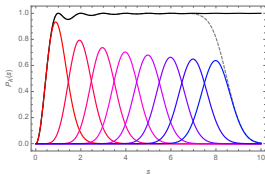
Tracy-Widom 1996 :  $\beta = 1, 4$  (Pf) を  $\beta = 2$  (Det) に関連付け

有限  $N$  RM (CUE $_N \Rightarrow \text{Painlevé VI}$ ), RM+定数行列 :  $\mathbf{K}_{\text{Peacey}}|_{(0,s)}$ , 多重臨界 (超 Airy)

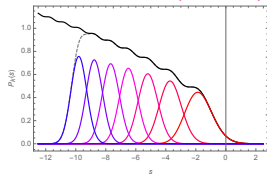
最小特異値分布



準位間隔分布



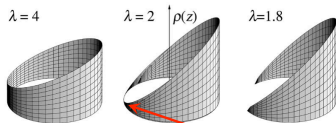
最大固有値分布 (TW 分布)



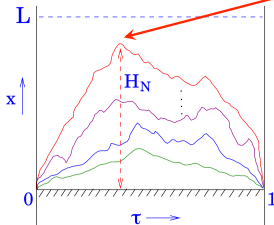
# TW 分布の普遍性

2D Yand-Mills [Forrester et al. 2010]

SUSY double-well MM [西垣-杉野 2014]



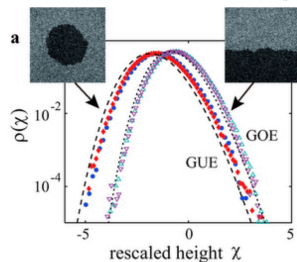
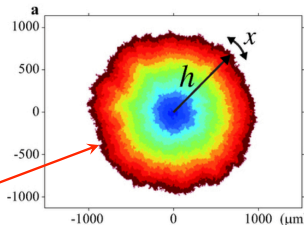
敵対的酔歩 [Baik 1999]



強結合・弱結合境界  
 での"中心極限定理"  
 ⇒ TW分布

KPZ方程式 → 液晶界面成長

[笹本-Spohn 2010] [竹内-佐野 2010]



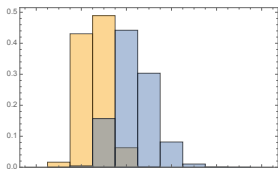
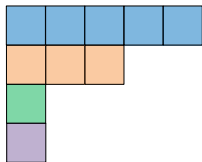
# TW 分布の普遍性

対称群  $\mathfrak{S}_N$  の  $k$  次最長増加部分列 = Young tableaux の第  $k$  行の長さ

Baik-Deift-Johansson 1999,2000; Borodin-Okounkov-Olshanski 1999; Johansson 1999

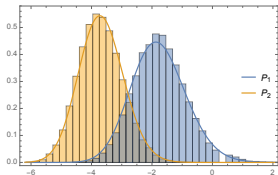
Okounkov 2000 (Fields 賞 2006) : RM  $\Rightarrow$  Riemann 面の単体分割  $\Rightarrow$  単分岐被覆の monodromy  $\Leftarrow \mathfrak{S}_N$

7 2 8 1 3 4 10 6 9 5



$N = 10, \#\text{perm} = 10! \simeq 3M$

$\downarrow N \gg 1$

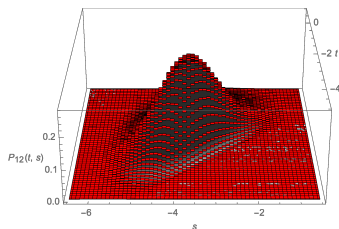


$N = 8096, \#\text{sample} = 30000$

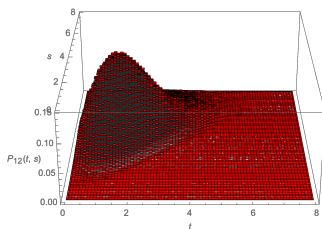
# 順序つき固有値分布

連結分布は？

最大 & 第 2 固有値の連結分布



最小 & 第 2 特異値の連結分布



$N = 128, \#sample = 10^7$

連結分布  $P_{12}(t, s) \Rightarrow$  **Isomonodromic 系, Lax pair**

Forrester-Witte 2007 : 70pp : **固定点近傍**  $\rightarrow$  IS for Painlevé III'  $\searrow$  2重極限での縮退

Witte-Bornemann-Forrester 2013 : 29pp : **バンド端**  $\rightarrow$  IS for Painlevé II

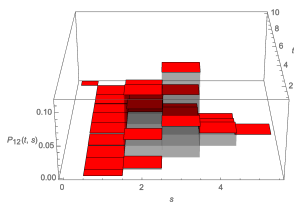
Perret-Schehr 2014 : 34pp : **バンド端**  $\rightarrow$  Lax pair for Painlevé XXXIV



# 順序つき固有値分布

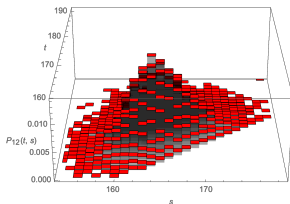
連結分布は？

1 次 & 2 次最長増加部分列の連結分布



$N = 10$

$N \gg 1$   
 $\longrightarrow$



$N = 8096$

# Tracy-Widom 法

この問題を再訪する動機 :

- より **user-friendly** な解析的手法 !
- $\forall$  integrable な核  $\mathbf{K} \doteq \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{x - y}$  or  $\frac{\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(y)}{x - y}$  に適用可能
- $1 \sim p$  番目の固有値の連結分布  $P_{12\dots p}(s_1, \dots, s_p)$  に拡張可能

答 : TW の関数解析的手法

- $\mathbf{K}$  の要素関数が**多項式係数**  $m, A, B, C$  をもつ LDE  $\downarrow$  を満たすなら  
traceless :  $\mathfrak{sl}(2)$

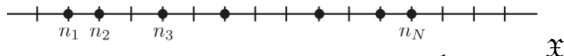
$$m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ -C(x) & -A(x) \end{bmatrix}}^{\text{traceless : } \mathfrak{sl}(2)} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix},$$

- $\text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a,b)})$  は  $m, A, B, C$  の係数に依存する PDE 系によって決定される

を **gauge 変換された核  $\tilde{\mathbf{K}}$**  に適用

# 行列式点過程

## 離散的 DPP



$N$  個の fermion の確率分布:  $P(n_1, \dots, n_N) = \frac{1}{N!} \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^N$

with 射影核:  $\mathbf{K} = [K(n, n')]_{n, n' \in \mathfrak{X}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}, \quad \text{tr } \mathbf{K} = N$

↓

$k$  個の fermion の連結分布:  $\rho_k(n_1, \dots, n_k) = \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^k$

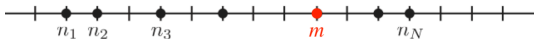
$I \subsetneq \mathfrak{X}$  に粒子がない確率 =  $\det(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_I), \quad \mathbf{K}|_I = [K(n, n')]_{n, n' \in I}$

全ての式は連続集合上の DPP にも該当  
 $\rho_k(\{n\}) \rightarrow \rho_k(\{x\})dx_1 \cdots dx_k, \quad \det \rightarrow \text{Det}$

# 条件つき確率

## 1つの粒子を点 $m$ に固定した 'transformed' 核

$$\tilde{K}(n, n') := K(n, n') - \frac{K(n, m)K(m, n')}{K(m, m)}$$



- 他の粒子は  $m$  を避ける :  $K(n, m) = K(m, n') = 0$
- 射影性, 規格化を満たす :  $\tilde{\mathbf{K}} = \left[ \tilde{K}(n, n') \right]_{n, n' \in \mathfrak{X}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}, \quad \text{tr } \tilde{\mathbf{K}} = N - 1$
- **条件つき連結分布 ( $m$  は占有済)** に対する核になる :

$$\tilde{\rho}_1(n|m) = \frac{\rho_2(n, m)}{\rho_1(m)} = \frac{K(n, n)K(m, m) - K(n, m)K(m, n)}{K(m, m)} = \tilde{K}(n, n)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2(n_1, n_2|m) &= \frac{\rho_3(n_1, n_2, m)}{\rho_1(m)} \\ &= \frac{K(n_1, n_1)K(n_2, n_2)K(m, m) \pm (5 \text{ 項})}{K(m, m)} = \det \left[ \tilde{K}(n_i, n_j) \right]_{i, j=1}^2, \text{ etc} \end{aligned}$$

# 条件つき確率

## Lemma (1)

$p$  個の異なる点  $m_1, \dots, m_p$  を固定して

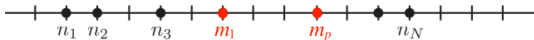
$$\boldsymbol{\kappa} = [K(m_i, m_j)]_{i,j=1}^p, \quad \mathbf{k} = [K(m_i, n)]_{i=1, \dots, p}^{n \in \mathfrak{X}}, \quad \mathbf{K} = [K(n, n')]_{n, n' \in \mathfrak{X}}$$

このとき

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{k}^t \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{k}$$

は  $m_1, \dots, m_p$  が既に占拠された条件つき確率を与える:

$$\tilde{\rho}_k(n_1, \dots, n_k | m_1, \dots, m_p) = \det \left[ \tilde{K}(n_i, n_j) \right]_{i,j=1}^k$$



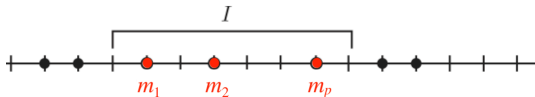
この Lemma から直ちに...

## Jánossy 密度

### Lemma (2)

部分集合  $I$  が  $m_1, \dots, m_p$  以外は粒子を含まない条件付き確率は

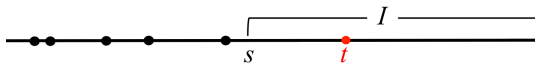
$$\tilde{J}_p(I | m_1, \dots, m_p) = \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I), \quad \tilde{\mathbf{K}}|_I = \left[ \tilde{K}(n, n') \right]_{n, n' \in I}$$



Jánossy 密度:  $I$  がちょうど  $p$  個の粒子 @  $m_1, \dots, m_p$  を含む確率

$$J_p(I; m_1, \dots, m_p) = \rho_k(m_1, \dots, m_p) \cdot \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I)$$

最大  $\sim p$  番目の連結分布:  $P_{12\dots p}(t, t', \dots, s) = \partial_s J_p((s, \infty); t, t', \dots)$



# TW 法の適用可能性

## Tracy-Widom 法の適用可能条件 (1994) :

- ① 核が Christoffel-Darboux 型 :  $\mathbf{K} \doteq \frac{1}{x-y} [\varphi(x), -\psi(x)] \begin{bmatrix} \psi(y) \\ \varphi(y) \end{bmatrix} := \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y}$
- ② 2 成分関数  $\Psi(x)$  が有理係数 1 階 LDE を満たす :  $(\partial_x + \mathcal{A}(x)) \Psi(x) = 0, \text{tr } \mathcal{A}(x) = 0$   
 ならば,  $\text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a,b)})$  は  $\mathcal{A}(x)$  の係数に依存する PDE 系により決定される

## Theorem

核  $\mathbf{K}$  が TW 法の適用可能条件を満たすならば, transformed 核  $\tilde{\mathbf{K}}$  も満たす

## Proof.

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x) - \overbrace{\frac{K(x,t)}{K(t,t)} \Psi(t)}^{t \text{ を避ける}} = U(x)\Psi(x), \quad U(x) = \mathbb{I} + \frac{\Psi(t)\bar{\Psi}(t)}{K(t,t)(x-t)} : \begin{array}{l} \text{有理型} \\ \text{SL}(2)\text{gauge 変換} \end{array}$$

によって transformed 核は  $\tilde{\mathbf{K}} \doteq K(x,y) - \frac{K(x,t)K(t,y)}{K(t,t)} \stackrel{!}{=} \frac{\tilde{\Psi}(x)\tilde{\Psi}(y)}{x-y}$  と表され,

$$(\partial_x + \tilde{\mathcal{A}}(x))\tilde{\Psi}(x) = 0, \quad \text{tr } \tilde{\mathcal{A}}(x) = \text{tr} \{U(x)\mathcal{A}(x)U(x)^{-1} - \partial_x U(x) \cdot U(x)^{-1}\} = 0$$

# TW 法の適用可能性

具体的構成:

$$K(x, y) = \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{x - y}, \quad m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ -C(x) & -A(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix}$$

↓

$$\tilde{K}(x, y) = \frac{\tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(y) - \tilde{\psi}(x)\tilde{\varphi}(y)}{x - y}, \quad m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{\psi}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(x) & \tilde{B}(x) \\ -\tilde{C}(x) & -\tilde{A}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{\psi}(x) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \frac{b(a\varphi(x) - b\psi(x))}{x - t} \quad a = \frac{\psi(t)}{\sqrt{K(t, t)}}, \quad b = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{K(t, t)}}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{a(a\varphi(x) - b\psi(x))}{x - t}$$

$$\tilde{A}(x) = A(x) + \frac{a^2 B(x) - b^2 C(x)}{x - t} - \frac{ab(2abA(x) + a^2 B(x) + b^2 C(x) - m(x))}{(x - t)^2}$$

$$\tilde{B}(x) = B(x) - \frac{2b(bA(x) + aB(x))}{x - t} + \frac{b^2(2abA(x) + a^2 B(x) + b^2 C(x) - m(x))}{(x - t)^2}$$

$$\tilde{C}(x) = C(x) + \frac{2a(aA(x) + bC(x))}{x - t} + \frac{a^2(2abA(x) + a^2 B(x) + b^2 C(x) - m(x))}{(x - t)^2}$$

$m, A, B, C$  は多項式  $\Rightarrow$  全体に  $\times(x - t)^2$  すれば新たな  $\tilde{m}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  も多項式 □



## 物理的適用

- ① 固有値を  $t$  に固定  $\Rightarrow$  行列  $H$  の確率分布に  $\det(H - t)^2$  をかける

$$\prod_{i=1}^N w(x_i) \cdot \prod_{i>j}^N (x_i - x_j)^2 \Big|_{x_N=t} \propto \prod_{i=1}^{N-1} \underbrace{w(x_i)(x_i - t)^2}_{\tilde{w}(x_i;t)} \cdot \prod_{i>j}^{N-1} (x_i - x_j)^2$$

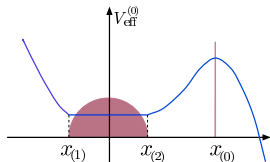
条件つき確率  $\tilde{\rho}_k(x_1, \dots, x_k | t_1, \dots, t_p)$  for weight  $w(x)$

= 条件なし確率  $\rho_k(x_1, \dots, x_k)$  for weight  $\tilde{w}(x; t_1, \dots, t_p)$

quenched QCD  $\Rightarrow$  2-flavor QCD,  $m_u^2 = m_d^2 = -t$  [Damgaard-西垣 2001]

- ② 有限個の固有値を主サポート外に配置  $\Rightarrow$  非臨界弦における ZZ branes

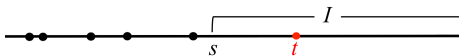
$$Z_N^{(1 \text{ inst})} = N Z_{N-1}^{(0 \text{ inst})} \times \int_{\mathbb{R} \setminus [x_{(1)}, x_{(2)}]} dt w(t) \langle \det(H - t)^2 \rangle_{(0 \text{ inst})}$$



[花田-早川-石橋-川合-黒木-松尾-多田 2004, 鈴木-土屋 2005]

## Jánossy 密度 for $K_{\text{Airy}}$

$\tilde{J}_1((s, \infty); t) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}_{\text{Airy}}|_{(s, \infty)})$  を TW 法で評価



$\varphi(x) = \text{Ai}(x)$ ,  $\psi(x) = \text{Ai}'(x)$  は, 係数関数  $\downarrow$  をもつ 1 階 LDE を満たす  
 $m(x) = 1$ ,  $A(x) = 0$ ,  $B(x) = 1$ ,  $C(x) = -x$

$\Downarrow$

$\tilde{\varphi}(x)$ ,  $\tilde{\psi}(x)$  は, 係数関数  $\downarrow$  をもつ 1 階 LDE を満たす

$$\tilde{m}(x) = (x - t)^2$$

$$\tilde{A}(x) = -ab(a^2 - 1) - a^2t + (a^2 + ab^3 - b^2t)x + b^2x^2 := \sum_{j=0}^2 \alpha_j x^j$$

$$\tilde{B}(x) = b^2(a^2 - 1) + 2abt + t^2 - (2ab + b^4 + 2t)x + x^2 := \sum_{j=0}^2 \beta_j x^j$$

$$\tilde{C}(x) = a^2(a^2 - 1) - (ab - t)^2x - 2(ab - t)x^2 - x^3 := \sum_{j=0}^3 \gamma_j x^j$$

# Jánossy 密度 for $K_{\text{Airy}}$

## TW 系 ODE

$$\partial_s \log \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}_{\text{Airy}}|_{(s, \infty)}) = p_0(s)q'_0(s) - q_0(s)p'_0(s)$$

$$(s-t)^2 q'_0 = \sum_{j=0}^2 \left( \alpha_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} v_k + \sum_{k=0}^2 \gamma_{j+k+1} u_k \right) q_j - v_0 q_0$$

$$+ \sum_{j=0}^2 \left( \beta_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} u_k + \sum_{k=0}^1 \beta_{j+k+1} v_k \right) p_j + u_0 p_0$$

$$(s-t)^2 p'_0 = \sum_{j=0}^3 \left( -\gamma_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} w_k + \sum_{k=0}^2 \gamma_{j+k+1} \tilde{v}_k \right) q_j - w_0 q_0$$

$$+ \sum_{j=0}^2 \left( -\alpha_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} \tilde{v}_k + \sum_{k=0}^1 \beta_{j+k+1} w_k \right) p_j + \tilde{v}_0 p_0$$

$$u'_0 = -q_0 q_0, \quad u'_1 = -q_0 q_1, \quad u'_2 = -q_0 q_2, \quad v'_0 = -q_0 p_0, \quad v'_1 = -q_0 p_1, \quad v'_2 = -q_0 p_2$$

$$w'_0 = -p_0 p_0, \quad w'_1 = -p_0 p_1 \quad (10 \text{ 元連立, 境界条件 } @ s \gg 1)$$

$$q_1 = s q_0 - v_0 q_0 + u_0 p_0, \quad q_2 = s^2 q_0 - v_0 q_1 - v_1 q_0 + u_0 p_1 + u_1 p_0$$

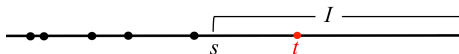
$$q_3 = s^3 q_0 - v_0 q_2 - v_1 q_1 - v_2 q_0 + u_0 p_2 + u_1 p_1 + u_2 p_0$$

$$p_1 = s p_0 - w_0 q_0 + \tilde{v}_0 p_0, \quad p_2 = s^2 p_0 - w_0 q_1 - w_1 q_0 + \tilde{v}_0 p_1 + \tilde{v}_1 p_0$$

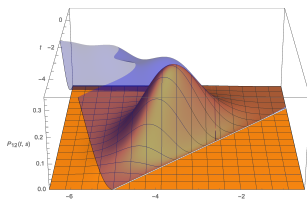
$$\tilde{v}_0 = v_0, \quad \tilde{v}_1 = v_1 - v_0 \tilde{v}_0 + u_0 w_0, \quad \tilde{v}_2 = v_2 - v_0 \tilde{v}_1 - v_1 \tilde{v}_0 + u_0 w_1 + u_1 w_0$$

# 最大&第2固有値の連結分布

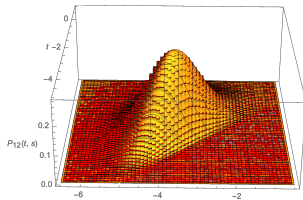
$\tilde{J}_1((s, \infty); t) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}_{\text{Airy}}|_{(s, \infty)})$  を TW 法で評価



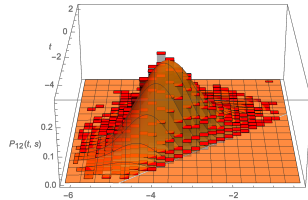
連結分布:  $P_{12}(t, s) = \rho_1(t) \partial_s \tilde{J}_1((s, \infty); t)$



連結分布と 2 点相関関数



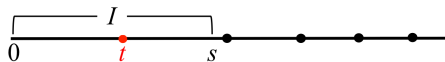
Hermite RM の最大 & 第2固有値



1 次 & 2 次最長増加部分列

# Jánossy 密度 for $K_{\text{Bessel}}$

$\tilde{J}_1((0, s); t) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}_{\text{Bessel}}|_{(0, s)})$  を TW 法で評価



$\varphi(x) = J_\nu(\sqrt{x})$ ,  $\psi(x) = \frac{\sqrt{x}}{4} (J_{\nu-1}(\sqrt{x}) - J_{\nu+1}(\sqrt{x}))$  は, 係数関数

$m(x) = x$ ,  $A(x) = 0$ ,  $B(x) = 1$ ,  $C(x) = \frac{1}{4}(x - \nu^2)$  をもつ 1 階 LDE を満たす

↓

$\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x)$  は, 係数関数 ↓ をもつ 1 階 LDE を満たす

$$\tilde{m}(x) = x(x - t)^2$$

$$\tilde{A}(x) = -ab(a^2 - 1) - a^2t + \frac{\nu^2 b^2}{4}(ab - t) + \left(a^2 + \frac{ab^3 + b^2t + \nu^2 b^2}{4}\right)x - \frac{b^2}{4}x^2 := \sum_{j=0}^2 \alpha_j x^j$$

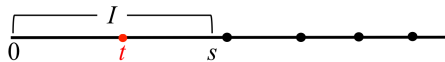
$$\tilde{B}(x) = b^2(a^2 - 1) + 2abt + t^2 - \frac{\nu^2 b^4}{4} + \left(-2ab + \frac{b^4}{4} - 2t\right)x + x^2 := \sum_{j=0}^2 \beta_j x^j$$

$$\tilde{C}(x) = a^2(a^2 - 1) - \frac{\nu^2}{4}(ab - t)^2 + \left(\frac{(ab - t)^2}{4} - \frac{\nu^2}{2}(ab - t)\right)x + \left(\frac{ab - t}{2} - \frac{\nu^2}{4}\right)x^2 + \frac{x^3}{4}$$

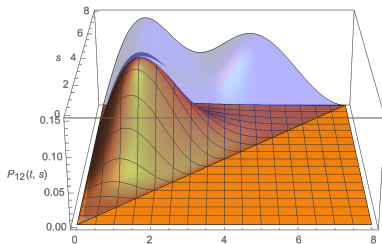
$$\Rightarrow \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \text{ を含む TW 系 ODE (10 元連立, 境界条件 @ } s \ll 1) := \sum_{j=0}^3 \gamma_j x^j$$

# 最小&第2特異値の連結分布

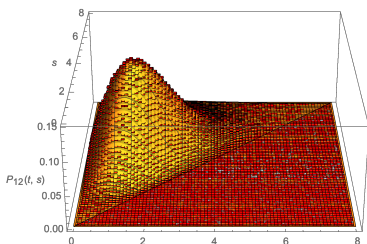
$\tilde{J}_1((0, s); t) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Bessel}}|_{(0, s)})$  を TW 法で評価



連結分布 :  $P_{12}(t, s) = -\rho_1(t)\partial_s \tilde{J}_1((0, s); t)$



連結分布と 2 点相関関数



複素正方 RM の最小 & 第 2 特異値

# 結語

## 要約

- TW 条件 : 有理型  $\mathfrak{sl}(2)$  接続に対する共变的定数切断  $(\partial_x + \mathcal{A}(x))\Psi(x) = 0$
- 固有値の固定  $\mathbf{K} \doteq \frac{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)}{x-y} \mapsto \tilde{\mathbf{K}} \doteq \frac{\tilde{\bar{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(y)}{x-y}$  は有理型  $SL(2)$  gauge 変換  $\Psi(x) \mapsto \tilde{\Psi}(x) = U(x)\Psi(x)$
- TW 条件は  $\mathbf{K}$  から  $\tilde{\mathbf{K}}$  に遺伝. TW 法が Gap 確率に適用可なら Jánossy 密度にも可
- $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Airy}}, \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Bessel}}$  から連結分布  $P_{12}(t, s)$  を ODE 系の解として決定  $\Rightarrow$  数値的に検証
- Pros: 汎用的.  $\forall q$ -直交, 超 Airy, 有限  $N$  などの核  $\tilde{\mathbf{K}}$  に適用可能.  $P_{1\dots p}$  も容易
- Cons: 実関数解析的手法のため,  
 $\text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I) \Leftrightarrow$  可積分系 ( $\tau_{\text{ Toda}}/\text{Painlevé}/\text{Isomonodromic}$  系/Lax) が見難い  
 漸近評価 ( $|t - s| \gg 1$ ) は容易でない

# 結語

## 展望

- $\forall r$  成分の可積分核  $\mathbf{K} \doteq \frac{\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(y)}{x - y}$ ,  $\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) = 0$  にも拡張可 (SL( $r$ ))  
 $\Rightarrow$  GUE+定数行列 Pearcey 核 ( $r = 3$ ) の Jánossy 密度 cf. [Brézin-氷上 1998]
- 固有値の連結分布  $P_{1\dots p} \xrightarrow{\text{fit}}$  Dirichlet, Artin  $L$  関数の零点分布 cf. [Katz-Sarnak 1999]
- $(2, 2k+1)$   
 多重臨界(超 Airy) 核の Jánossy 密度  $\simeq c < 1$  非臨界弦における ZZ brane  
 $\Rightarrow$  instanton の初項 [花田 et al.2004] を非摂動効果の完全和 (trans 級数) に改善できる
- chGSE-chGUE 遷移核の Jánossy 密度  $\text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I)^{1/2}$  を数値評価  
 $\Rightarrow$  有限密度 2C-QCD,  $N_F = 4, 8$  の個別 Dirac 準位分布 cf. [藤-金森-西垣 2019]
- $\tau = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Ai}}|_{(s, \infty)})$  に対する Hamiltonian  $\exists H(q_0, p_0) : q'_0 = \frac{\partial H}{\partial p_0}, p'_0 = -\frac{\partial H}{\partial q_0}$  ?  
 $\Rightarrow$  可積分系に帰着, 固定した点  $\{t\}$  を Toda 時間変数 と見なせるはず