

博 士 論 文

入力飽和関数を利用した状態制約を持つ制御対  
象に対する制御系の設計

Control system designs for plants with state constraints using input  
saturation functions

木下 大 (S169861)

Dai Kinoshita

平成 28 年度入学

島根大学大学院 総合理工学研究科 博士後期課程

主指導教員 吉田 和信 教授

令和 2 年 11 月 20 日提出

## 要旨

現実の機械装置において、すべてのアクチュエータや動力伝達機構には有限の動作範囲が存在する。たとえば、モータはその定格出力特性から、トルクと回転数には限界があり、モータの回転動作を直線動作に変換するラックピニオン機構は有限のラック長しか動くことができない。これらの最大値と最小値の範囲で規定されるような機械装置の動作範囲の制約の中で、制御目的を達成しようとする、状態制約を考慮した制御問題は、工学において避けられない課題として、制御理論の研究が進められてきた。

一方で、状態の動作範囲が平衡点近くに限られる場合、非線形系はオイラー近似などの近似手法を用いて線形系に近似でき、線形制御理論によって比較的簡単に安定化制御則を求めることができる。この観点で設計された制御系は、モデル誤差や外乱の影響により状態が平衡点から大きく離れたとき、制御性能が劣化し、最悪の場合不安定となるため、状態を小さな範囲で制御する方が望ましい。このような線形化近似を含んだ非線形系の制御問題に対して、入力飽和を援用し、小さな値の範囲の入力を使うことで状態を小さな値の範囲に保ち、本来無視される非線形項を大きくしないことによって大域または準大域安定性を達成する制御則が提案されている。この種の飽和制御と近似線形化を用いた制御理論は、状態制約のある非線形系を含んだ広いクラスの制御対象に対して、計算コストが低く実装も簡単な、実用的な制御則を与える。

本論文では、状態制約の中でも特にアクチュエータの移動幅に制約のある制御対象に対して、入力飽和制御を用いた制御系の設計手法を提案する。提案する設計法に共通する基礎原理は、制御対象の線形化モデルの入力からアクチュエータ振幅までの伝達関数関係を用いて、状態制約を入力制約に変換する入力変換手法と、制御対象から不安定極をもつより低次元な不安定部分系を分離し、より低次元な部分系の安定化問題に定式化するモード分解法、そして、以上の手順で定式化された入力制約付き線形不安定系の安定化問題に対する飽和制御設計法である。

制御対象は線形化プラントが不安定ダイナミクスを持つ制御系から、制御工学上のベンチマーク問題として良く用いられる、倒立振り子系の倒立安定化問題と、ボールビーム系の安定化問題を選んだ。

倒立振り子系に対しては、駆動台車の振幅制約を考慮した安定化問題について、飽和関数を用いた線形フィードバック制御則を提案した。提案法は、モード分解法で分離された負の実数極を持つ1次不安定部分系に対して、入力飽和を持つ線形状態フィードバック制御則を設計し、駆動系の時定数を0に近づけることで、安定化可能な初期値の集合で示した安定領域の広さを最大化できる。非線形モデルを用いた場合の実際の安定領域の広さは、非線形シミュレーションにより網羅的に調べ、線形化誤差によって縮小される実際の非線形吸引領域を検証した。提案法の制御性能や振り上げ制御との組み合わせは、実機実験により検証した。

ボールビーム系に対しては、ビーム角の制約を考慮した安定化問題について、制約のもとで線形化モデルの大域的漸近安定化を実現する入れ子形飽和制御則を提案した。提案法は従来法に比べてゲインが調整可能なため、応答特性の改善が可能であるというメリットをもつ。また、提案法の欠点である定常偏差の問題を改善する、誤差飽和型IMC構造を導入した。同構造は飽和制御系の目標値応答や外乱応答に対して、定常特性を改善し、かつリセットウィンドアップ現象を抑制する有効な方法である。提案法の有効性は、他の3つの制御手法との比較を行ったシミュレーションと実機実験により検証した。さらに、同制御則について、安定な非最小位相系の直列結合を含んだより広いクラスの制御問題へと拡張した設計法を示した。むだ時間を追加したボールビーム系に対して拡張された設計法を適用し、提案法の有効性を実機実験により検証した。

# 目次

1.	諸言	1
2.	台車の振幅制限を考慮した倒立振り子系の倒立安定化制御	6
2.1	はじめに	6
2.2	制御対象のモデリングと問題の記述	8
2.3	設計法	9
2.3.1	入力制約問題への変換	9
2.3.2	部分状態フィードバック制御による安定化	11
2.3.3	$w_u$ 部分系の吸引領域	13
2.4	シミュレーションによる検討	14
2.4.1	初期値応答の比較	14
2.4.2	非線形モデルの吸引領域	16
2.5	実機実験による検討	19
2.5.1	振子の角変位 $\theta$ に検出誤差がある場合	21
2.5.2	振子の固有角振動数 $\omega_n$ にモデル誤差がある場合	21
2.5.3	振り上げ安定化制御に用いた場合	23
2.6	おわりに	25
3.	ビーム角の制限を考慮したボールビーム系の安定化制御	27
3.1	はじめに	27
3.2	制御対象の数学モデルと問題の記述	29
3.3	設計法	32
3.3.1	モード分解法によるモデルの低次元化	32

3.3.2	入れ子形飽和制御による安定化 . . . . .	33
3.3.3	$v'_{max}$ の与え方 . . . . .	34
3.3.4	制御則の計算アルゴリズム . . . . .	35
3.3.5	誤差飽和型 IMC 制御系の構成法 . . . . .	35
3.4	シミュレーションと実験結果 . . . . .	37
3.4.1	IMC 制御系を用いない場合の制御応答 . . . . .	42
3.4.2	IMC 制御系を用いる場合の制御応答 (IP 型制御系との比較)	44
3.5	おわりに . . . . .	47
<b>4.</b>	<b>ビーム角の制限を考慮したボールビーム系の安定化問題に対する制御 器設計法の一般化とむだ時間系を含んだ拡張</b>	<b>48</b>
4.1	はじめに . . . . .	48
4.2	制御対象の数学モデルと問題の記述 . . . . .	49
4.3	設計法 . . . . .	51
4.3.1	入力制約問題への変換 . . . . .	51
4.3.2	部分状態フィードバック制御による安定化 . . . . .	52
4.3.3	コントローラの IMC 構造 . . . . .	54
4.3.4	$z_1$ 部分系に対する飽和制御則 . . . . .	56
4.4	シミュレーションと実験結果 . . . . .	56
4.5	おわりに . . . . .	58
<b>5.</b>	<b>結論</b>	<b>59</b>
	参考文献	62
	付録 I 3.3.2 節 定理 1 の証明	67
	謝辞	69

# 目 次

2.1	Inverted pendulum system. . . . .	9
2.2	View of the experimental system. . . . .	9
2.3	Block diagram of the cart drive system. . . . .	10
2.4	Numerical results for the proposed control law: the case for a small initial state. . . . .	15
2.5	Numerical results for the proposed control law: the case for a large initial state. . . . .	17
2.6	Numerical results for the control law of Lin et al.: the case for a large initial state. . . . .	18
2.7	Regions of attraction for the proposed method. . . . .	19
2.8	Regions of attraction for Lin et al.'s method. . . . .	20
2.9	Experimental results for the two methods. . . . .	22
2.10	Experimental results with measurement error in $\theta$ . . . . .	23
2.11	Experimental results for the proposed method with modeling error in $\omega_n$ . . . . .	24
2.12	Experimental results for Lin et al.'s method with modeling error in $\omega_n$ . . . . .	25
2.13	Experimental results for the swing-up and stabilizing control. . . . .	26
3.1	Ball and beam system . . . . .	29
3.2	The compensated drive system . . . . .	31
3.3	Block diagram of the linearized system . . . . .	31
3.4	Block diagram of the conventional IMC control system . . . . .	36

3.5	Block diagram of the IMC control system with an error saturation function . . . . .	37
3.6	View of the experimental system . . . . .	38
3.7	Block diagram of the reference generator . . . . .	39
3.8	Block diagram of the IP-type control system . . . . .	41
3.9	Simulation and experimental results using Hauser's method . . . . .	43
3.10	Simulation and experimental results using Teel's method . . . . .	44
3.11	Simulation and experimental results using the proposed method . . . . .	44
3.12	Simulation and experimental results using the IP-type controller . . . . .	45
3.13	Simulation and experimental results using the proposed method with the modified IMC structure . . . . .	46
4.1	Block diagram of the compensated system. . . . .	50
4.2	Block diagram of the control system. . . . .	55
4.3	View of the experimental system. . . . .	57
4.4	Experimental results for a dead-time process. . . . .	58

# 1. 諸言

現実の機械装置において、すべてのアクチュエータや動力伝達機構には有限の動作範囲が存在する。たとえば、モータはその定格出力特性から、トルクと回転数には限界があり、モータの回転動作を直線動作に変換するラックピニオン機構は有限のラック長しか動くことができない。これらの最大値と最小値の範囲で規定されるような機械装置の動作範囲の制約の中で、制御目的を達成しようとする、状態制約を考慮した制御問題は、工学において避けられない課題として、体系的に制御理論の研究が進められてきた。また、近年の産業機械の集積化や小型化の要求、および人と機械の協働における安全性の観点から、最小限の性能で設計された駆動装置を使って最大限の制御性能を発揮できる制御手法としても期待されている。

過去の文献では、有限時間先の状態を逐次予測して状態制約を逸脱しない制御入力を計算するモデル予測制御手法<sup>38)</sup>や、制約付き非線形最適化問題を効率的に計算する安定多様体法<sup>5)</sup>を用いた最適アプローチ<sup>7)</sup>、変数の消去や変換によって状態制約のない問題へ帰着させるシステム蘇生変換アプローチ<sup>36)</sup>、同じく変換によって状態制約を入力制約へと変換し入力飽和付き安定化問題として解く飽和制御手法<sup>3)</sup>などが制御対象の線形、非線形を問わず幅広く研究されている。

特に、アクチュエータ飽和に由来する入力制約を扱った制御系の安定性・性能解析は、過去の十数年の間に数多くの結果<sup>14),37)</sup>が示され、いまだ活発な議論が続いている。研究結果では、入力制約を考慮した線形系のクラスにおいては、すべてのシステムの極が閉左半平面に存在する、いわゆる安定系に対して、任意の線形状態安定化フィードバック則が飽和の影響にさらされても大域的漸近安定性



が保たれる<sup>37)</sup>ことが知られており、実部がゼロの極を含むシステムに対しても大域的漸近安定化を実現する制御手法の存在が示されている<sup>30),29)</sup>。また、システムの極が閉右半平面に存在する不安定系においては、飽和の存在により安定化制御則が大域的に働かないため、大域的漸近安定性が保証されないのは自明であるが、制約された入力を用いて原点へと制御可能な状態の集合を示した吸引領域の概念を用いて、原点まわりの局所的な安定性とその範囲を極大化する制御手法が考察されている<sup>14),37)</sup>。

一方で、状態の動作範囲が平衡点近くに限られる場合、非線形系はオイラー近似などの近似手法を用いて線形系に近似でき、線形制御理論によって比較的簡単に安定化制御則を求めることができる。この観点で設計された制御系は、モデル誤差や外乱の影響により状態が平衡点から大きく離れたとき、制御性能が劣化し、最悪の場合不安定となるため、状態を小さな範囲で制御する方が望ましい。このような線形近似を含んだ非線形系の制御問題に対しても、入力飽和を使用し、小さな値の範囲の入力を使うことで状態を小さな値の範囲に保ち、本来無視される非線形項を大きくしないことによって特定のクラスの非線形系に対して大域または準大域安定性を達成する制御則が提案されている<sup>8),29)</sup>。この種の飽和制御と線形近似を用いた制御理論は、非線形系を含んだ広いクラスの制御対象に対して、特定の状態制約を考慮できる実用的な制御則を与え、制約付き非線形系の安定化問題を扱った従来の制御手法に比べ、実装も簡単で、より計算コストが低いというメリットをもつ。

これらの飽和を含む制御系の安定性に関する一連の研究の中でも、状態制約や出力飽和を扱った例<sup>14)</sup>が報告されているが、安定性解析を含んだ統一的な制御系設計理論の枠組みは未だ提案されておらず、具体的な実験例も少ない。

本論文では、状態制約の中でも特にアクチュエータの移動幅に制約のある制御対象に対して、入力飽和制御を用いた制御系の設計手法を提案する。提案する設計法の基本的な手順を以下に示す。まず、制御対象の数学モデルから第一原理計算で得られた非線形微分方程式について、駆動系を任意の方法で事前安定化し、任意の制御平衡点まわりでオイラー近似して線形化された系の状態方程式を得る。次

に、得られた状態方程式の入力からアクチュエータ振幅までの伝達関数関係を用いて、状態制約を入力制約に変換する。次に、モード分解法<sup>22),24)</sup>を用いて、状態方程式から不安定極のみをもつより低次元な不安定部分系を分離し、状態制約を考慮した全体系の安定化問題を、より簡単な入力制約を考慮した縮退部分系の安定化問題に定式化する。この問題の解は、上記の入力制約を扱った線形系の安定性解析によって得られる。

制御対象は線形化プラントが不安定ダイナミクスを持つ制御系から、制御工学上のベンチマーク問題として良く用いられる、倒立振り子の倒立安定化問題と、ボールビーム系の安定化問題を選んだ。

本論文の内容は以下のとおりである。

2章では、駆動台車の振幅制限を考慮した倒立振り子の倒立安定化制御問題を考察する。倒立振り子は、種々の制御則の検証用モデルとして普及しているもっとも一般的な実験装置の1つで、現在もこの系の制御法に関する研究が行われている。振り子が鉛直上向きで倒立静止している状態を平衡点として線形近似すると、駆動系を除いた振り子の転倒運動の状態方程式は1つの正の実数極と1つの負の実数極を持つ不安定系となる。本章で扱う台車の振幅制限を考慮した倒立安定化問題に対して、Linら<sup>1)</sup>は、与えられた姿勢から倒立振り子を安定化する際に、できるだけ台車の移動幅を小さくする線形制御則を開発した。Linらの制御則は、制御系の4つの極のうち、2つの実部を非常に小さくし（負の方向に大きくし）、1つを制御対象固有の安定極に、残りの1つを零に近い負の値に設計することで、台車の移動幅を下限に近づけるが、台車の運動に遅いモードが現れる欠点を持つ。提案法では、モード分解法で分離された負の実数極を持つ1次不安定部分系に対して、入力飽和を持つ線形状態フィードバック制御則を設計する。提案法が線形の範囲で動作する場合、制御系の極はLinらの方法に似た極配置となるが、零に近い負の極をより小さく（負の方向に大きく）設計できるため、良好な応答特性をもつ制御系が設計できる。また、与えられた制御則に対して、安定化できる初期状態の集合全体がわかれば、制御則の適用範囲がわかるので便利であるが、一般に、そのような集合を求めることは容易ではなく、同問題を扱った他の論文<sup>1),18),4)</sup>にお

いても、そのような集合を求めていない。本章では、入力制約のある制御系に対する吸引領域の概念を導入し、生成される吸引領域を理論計算とシミュレーションにより検証する。提案法の応答性能は、シミュレーションと実機実験により検証する。

3章では、ビーム角の制限を考慮したボールビーム系の安定化制御問題を考察する。ボールビーム系はビームの上に置かれたボールの位置をビームを傾けることによって制御しようとする系であり、制御理論の学習および検証用の制御対象として普及している<sup>16-18)</sup>。ボールの運動方程式に重力項や遠心力項の非線形項があり、これらを考慮したボール位置のサーボ問題<sup>19),20)</sup>や、系の半大域的安定化問題<sup>8),9),39)</sup>が研究されてきた。また、ビームが水平でボールが静止している状態を平衡点として線形近似すると、駆動系を除いたボールの運動の状態方程式は2つの零極をもつ不安定系となる。この系の安定化問題にモード分解法と制約変換を適用すると、問題は入力制約付きの二重積分器の安定化問題として定式化される。Teel<sup>30)</sup>と Sussmann ら<sup>29)</sup>はこの種の入力制約付き多重積分器系を安定化する制御則の中に、入れ子構造の飽和関数を持つ状態フィードバック制御則があることそれぞれ独立して示した。これらの文献ではより高次で虚数極を含んだより広い対象に適用可能な一般的な設計法を示しているが、示された制御則には調整可能なフィードバックゲインがなく応答特性が改善できなかった。本章では、線形の範囲で任意の極配置を可能とする新たな入れ子形飽和制御則の設計法を提案し、任意のボール位置で安定化を達成するための実装時の計算アルゴリズムを示す。また、提案した飽和制御則は平衡点近傍で線形状態フィードバックに一致する構造を持つため、積分特性を持たず、そのままでは外乱やモデル誤差により、ボール位置に定常偏差が残る。しかし、積分器を有する線形補償器を用いた場合に、入力飽和により大きなオーバーシュートや不安定化が生ずるリセットwindアップ現象<sup>14)</sup>が知られており、提案法に積分器を追加して定常偏差を小さくすることは困難である。安定化された非線形プラントの、モデル誤差による性能劣化を改善するため、内部モデル制御法<sup>31)</sup>(以降IMC法と呼称)が提案されているが、プラントの出力側に入る外乱に対しては上記のリセットwindアップが生じるため、こ

れを抑制するアンチwindアップ補償器が必要となる<sup>32)</sup>。本論文では、飽和制御則で安定化されたプラントとそのモデルの出力誤差のフィードバック量を絞る飽和関数を追加した誤差飽和型IMC構造を導入する。提案法の有効性は、シミュレーションと実機実験により検証する。

4章では、3章で示したビーム角の制限を考慮したボールビーム系の設計法を、むだ時間のような非最小位相系が線形結合されたより広いクラスの制御対象に適用可能な設計法に一般化する。また、一般化されたプラント表現を用いて、提案法の持つレギュレータ・オブザーバ構造が、あるIMC構造を持つコントローラと一致することを示す。また、入力にむだ時間を含んだボールビーム系についての設計例を示し、提案法を用いた場合の制御則の有効性をシミュレーションと実機実験により検証する。

5章では、結言として各章で得られた主要な成果をまとめる。

## 2. 台車の振幅制限を考慮した倒立振子系の倒立安定化制御

### 2.1 はじめに

倒立振子系は、種々の制御則の検証用モデルとして普及している。また、この系は、劣駆動、非線形、不安定という性質を持つ興味深い制御対象であるので、現在もこの系の制御法に関する研究が行われている。

本章では、台車の振幅制限を考慮した倒立振子の安定化問題を考える。この問題に対して、Linら<sup>1)</sup>は、与えられた姿勢から倒立振子を安定化する際に、できるだけ台車の移動幅を小さくする線形制御則を開発した。振子の等価振子長を  $L$  とし、 $\omega_n = \sqrt{g/L}$  とする。また、 $\epsilon$  を小さな正数とする。Linらの制御則は、制御系の4つの極のうち、2つの実部を非常に小さくし（負の方向に大きくし）、1つを  $-\omega_n$ （制御対象の極の1つ）とし、残りの1つを  $-\epsilon$  とするものである。そして、 $\epsilon \rightarrow 0$  のとき、台車の移動幅はその下限に近づく。ただし、 $-\epsilon$  の極のため、台車の運動に遅いモードが現れる。吉田ら<sup>2)</sup>は、台車の移動幅を小さくする制御則として、制御系の4つの極のうち、2つを非常に小さな実重極とし、残り2つを共役な複素数  $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  ( $\zeta = 0.6 \sim 1$ ) とする制御則を提案した。この制御則は良好な応答特性を与えるが、Linらの制御則に比べ、台車の移動幅が大きくなる。Weiら<sup>4)</sup>は、振子の位相面軌道に基づいて、台車の加速度をバンバン制御する非線形制御を提案した。Weiらの制御則は、台車の移動幅、応答特性の点で良好な制御性能を達成できるが、モデル誤差や観測ノイズの影響を受けやすく、ま

た、台車の加速度を正確に制御できるアクチュエータが必要となる。梅田ら<sup>7)</sup>は、安定多様体法<sup>5)</sup>を用いて、状態制約をもつシステムに対する非線形最適制御器の設計法を提案した。この安定多様体法は、非線形最適制御問題に対する近似解を効率的に得る方法の1つで、倒立振子の振り上げ制御<sup>6)</sup>の研究により、その効果や実用性が報告されている。しかし、梅田らの方法では近似解を最適解に漸近させる過程に繰り返し計算を要することから計算コストの問題が存在し、また有効性の理論的解析も難しい。梅田らは同論文で、制約問題を扱うことができる代表的な手法として、モデル予測制御を挙げているが、同様に計算コストが問題であると述べている。

与えられた制御則に対して、安定化できる初期状態の集合全体（吸引領域）がわかれば、制御則の適用範囲がわかるので便利であるが、一般に、そのような集合を求めることは容易ではなく、上記の論文<sup>1),18),4)</sup>においても、そのような集合を求めている。

文献<sup>3)</sup>において、台車に振幅制限がある倒立振子の安定化問題に対して、振幅制限を満足し、できるだけ線形モデルの吸引領域を大きくする飽和制御則が提案された。本章では、特に、この制御則を用いて構成された制御系の非線形モデルの吸引領域の可視化による解析によって、制御則の有効性を検討する。本制御則は、Teel<sup>8),9)</sup>、Aguilarら<sup>10)</sup>の飽和関数を用いた制御則の構造に似ている。Teel<sup>8),9)</sup>は、特定の1入力非線形系のクラスに対して、入れ子型の飽和関数を用いて準大域的安定を実現した。また、Aguilarら<sup>10)</sup>は、同様の構造を倒立振子系に適用し、振子上半面の広い範囲で安定化可能な制御則を提案した。これらの制御則は、状態フィードバックと飽和関数を用いて、いくつかの状態を小さい値に保ったまま系を安定化する。

理論解析は、Linら<sup>1)</sup>と同様に倒立振子の線形化モデルに基づいて行う。本制御則は2つの設計パラメータ  $T > 0, k > 0$  を持つ。 $T$  は台車サーボ系の時定数であり、 $k$  は線形の範囲における制御系の極の1つを指定するパラメータである。 $T$  を0に近づけると、吸引領域はその上限に近づく。また、本制御則を線形の範囲で使う場合、制御系の極は  $\{-1/T, -1/T, -\omega_n, -k\}$  となる。Linらの制御則と違

い、吸引領域を大きくするために、 $k$  を 0 に近づける必要がないため、良好な応答特性をもつ制御系を設計できる。

本章は次のように構成される。2, 3 節では、問題の記述と制御則の設計法、そして吸引領域の条件式を示す。3.1 節の内容はほぼ文献<sup>2)</sup>の結果の再掲であるが、速度フィードバック補償と I-P 型補償器の使用により、摩擦などのモデル誤差に対してよりロバストなサーボ系を設計している点が新しい。3.2, 3.3 節の内容は文献<sup>3)</sup>で得られた結果である。4 節では、提案法の制御特性と生成される吸引領域をシミュレーションにより検討する。5 節では、実験装置を用いて、種々のモデル誤差に対する提案法のロバスト性を検討する。

## 2.2 制御対象のモデリングと問題の記述

本章で考える倒立振り子のモデル図と実験で用いた装置の外観をそれぞれ Fig. 2.1 と Fig. 2.2 に示す。台車に振り子の支点が取り付けられており、振り子は抵抗なく回転できるとする。 $\theta(t)$ ,  $r(t)$ ,  $u(t)$  はそれぞれ時刻  $t$  における振り子の角変位、台車の変位、台車に作用する力である。 $M$  は台車の質量、 $m$  は振り子の質量、 $L$  は振り子の等価振り子長、 $g$  は重力加速度である。

$m \ll M$  と仮定して台車の運動方程式を単純化した倒立振り子の運動方程式は次式となる<sup>11)</sup>。

$$M\ddot{r} = u - F\dot{r} \quad (2.1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{\ddot{r}}{L} \cos \theta \quad (2.2)$$

ここで、 $F$  は台車駆動系の粘性摩擦係数である。 $a$  を  $r$  の許容振幅とする。

$$|r(t)| \leq a \quad (2.3)$$

問題は、(2.1), (2.2) 式で表される倒立振り子系に対して、(2.3) 式を満たし、かつ倒立状態での吸引領域をできるだけ大きくする漸近安定化制御則を求めることである。

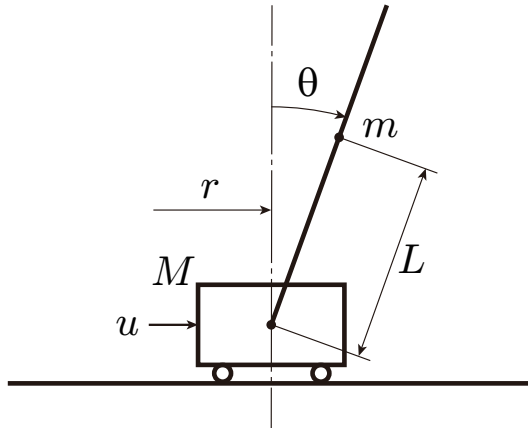


Fig. 2.1: Inverted pendulum system.

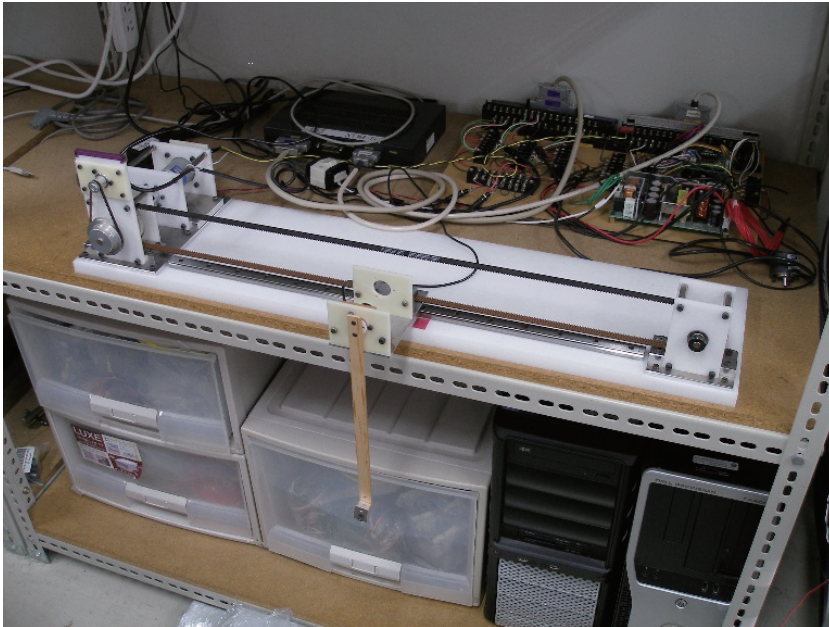


Fig. 2.2: View of the experimental system.

## 2.3 設計法

### 2.3.1 入力制約問題への変換

設計を容易にするため、(2.2) 式を  $\theta = 0$  近傍で線形化する。

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\theta - \frac{\ddot{r}}{L} \tag{2.4}$$



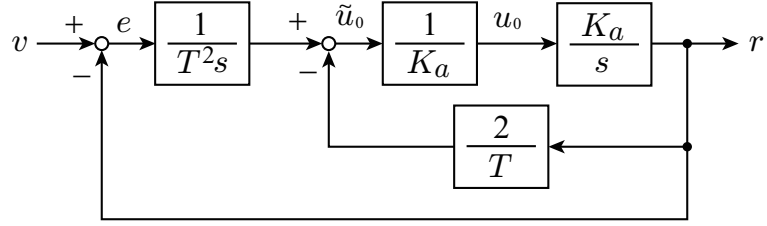


Fig. 2.3: Block diagram of the cart drive system.

台車系 (2.1) 式は、あらかじめ以下のように安定化する．まず，新たな入力  $u_0$  を導入し，次式の速度フィードバック補償を行う．

$$u = F_v(u_0 - \dot{r}) \quad (2.5)$$

$F_v$  を十分大きく与えたとき，高ゲインフィードバックの原理<sup>12)</sup>により以下の伝達関数が近似的に実現される．

$$\frac{r(s)}{u_0(s)} = \frac{K_a}{s} \quad (2.6)$$

ここで， $K_a$  は 1 に近い正数である．また， $u_0(t)$ ， $r(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $u_0(s)$ ， $r(s)$  と記した．さらに， $v$  を新たな入力とし， $v$  から  $r$  までの伝達関数が

$$G(s) = \frac{r(s)}{v(s)} = \frac{1}{(1 + Ts)^2} \quad (2.7)$$

となるように I-P 型サーボ系を構成する (Fig. 2.3)． $T > 0$  は設計パラメータである．(2.7) 式の時間領域における表現は

$$\ddot{r} = -\frac{1}{T^2}r - \frac{2}{T}\dot{r} + \frac{1}{T^2}v \quad (2.8)$$

である．

$[r(0) \ \dot{r}(0)]' = 0$  から  $|v(t)| \leq a$  を満たす  $v$  によって到達可能な (2.8) 式の解  $[r(t) \ \dot{r}(t)]'$ ， $\forall t \geq 0$  すべての集合を  $\mathcal{R}$  とする．次の二つの条件

$$[r(0) \ \dot{r}(0)]' \in \mathcal{R} \quad (2.9)$$

$$|v(t)| \leq \frac{a}{\|g(t)\|_1}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

が成立すれば、(2.3)式が満たされる<sup>2)</sup>。ここで、 $\|g(t)\|_1$ は $G(s)$ のインパルス応答 $g(t)$ の1ノルム<sup>13)</sup>であり、(2.7)式より、 $\|g(t)\|_1 = \int_0^\infty |g(t)|dt = 1$ と計算できる。よって、(2.10)式は次式となる。

$$|v(t)| \leq a, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.11)$$

(2.4), (2.8)式を、文献11)でも使われた次の状態

$$x = [r, \dot{r}, r + L\theta, \dot{r} + L\dot{\theta}]' \quad (2.12)$$

を用いて、状態方程式で表すと次式を得る。

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (2.13)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 & \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。ここで $\omega_n = \sqrt{g/L}$ とおいた。Aの固有値は $\{-1/T, -1/T, -\omega_n, \omega_n\}$ である。

問題は、「(2.9), (2.11)式の下で、(2.13)式を安定化する制御則を求めよ」という、取扱いがより簡単な入力制約問題となった。この問題の解として得られる制御則は、(2.3)式を満たすので、元の問題の解である。

### 2.3.2 部分状態フィードバック制御による安定化

座標変換によって(2.13)式を安定な部分系と不安定な部分系に分離し、2.3.1節の問題を「不安定な部分系(1次系)を入力 $v$ の振幅制限下で安定化する」という、さらに簡単な問題に変換して解く。

次の座標変換を導入する。

$$w = Sx \quad (2.14)$$

ただし

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + T(T\omega_n - 2) & -T^2 & s_{33} & s_{34} \\ T(T\omega_n + 2) & T^2 & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$s_{33} = -\frac{(T\omega_n - 1)^2 + \omega_n}{\omega_n}, \quad s_{34} = \frac{(T\omega_n - 1)^2 + \omega_n}{\omega_n^2}$$

$$s_{43} = -\frac{(T\omega_n + 1)^2}{\omega_n}, \quad s_{44} = -\frac{(T\omega_n + 1)^2}{\omega_n^2}$$

$S$  によって (2.13) 式は次式に変換される

$$\dot{w} = \tilde{A}w + \tilde{B}v \quad (2.16)$$

ただし

$$\tilde{A} = SAS^{-1}, \quad \tilde{B} = SB$$

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \omega_n \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{T^2} \\ -1 \\ 1 \end{array} \right]$$

である.

$\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  の分割に合わせて,  $w$  を

$$w = \begin{bmatrix} w_s \\ w_u \end{bmatrix}, \quad w_s = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad w_u = w_4$$

と分割する. 設計の考え方は次のとおりである.  $w_u$  部分系を平衡点  $w_u = 0$  のまわりで局所的に漸近安定化する飽和制御則  $v(t) = f(w_u(t))$  を構成し, これを系全体に適用する. このとき, 吸引領域にある初期状態に対して,  $w_u(t)$  は 0 に近づくので  $v(t)$  も 0 に近づく. さらに,  $w_s$  部分系は漸近安定なので,  $w_s$  も 0 に近づく. したがって, 問題は次のように簡単化された.

「(2.11) 式の下で,  $w_u$  部分系を漸近安定化する制御則  $v$  を求めよ。」

(2.16) 式から,  $w_u$  部分系を局所的に漸近安定化する  $v$  の一つは次式で与えられる<sup>14)</sup>.

$$v = -\text{sat}((\omega_n + k)w_u, a), \quad k > 0 \quad (2.17)$$

ただし,  $\text{sat}(\cdot, \cdot)$  は次式で定義される.

$$\text{sat}(\xi, a) = \text{sgn}(\xi) \min\{|\xi|, a\} \quad (2.18)$$

$s_4$  を  $S$  の第4行とすると,  $w_u = s_4x$  なので, (2.17) 式は次式とかける.

$$v = -\text{sat}((\omega_n + k)s_4x, a) \quad (2.19)$$

### 2.3.3 $w_u$ 部分系の吸引領域

次の正定関数を考える.

$$V = \frac{1}{2}w_u^2 \quad (2.20)$$

この時間微分は次式となる.

$$\dot{V} = w_u \dot{w}_u = w_u(\omega_n w_u - \text{sat}((\omega_n + k)w_u, a))$$

これから,  $|\omega_n w_u(0)| < a$  のとき,  $\dot{V}(t) \leq 0$  となり, さらに,  $\dot{V} = 0$  となるのは  $w_u = 0$  のときに限られることがわかる. したがって, LaSalle の不変性定理<sup>15)</sup> から,  $w_u$  部分系は,  $|\omega_n w_u(0)| < a$ , すなわち, 次式を満たす初期状態 ( $w_u$  部分系の吸引領域) に対して漸近安定となる.

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ x : |s_4x| < \frac{a}{\omega_n} \right\} \quad (2.21)$$

$a/\omega_n$  は定数なので,  $\mathcal{X}_0$  の大きさは,  $\|s_4\|$  の大きさに反比例すると考えられる. (2.15) 式より,  $\|s_4\|$  は  $T$  の単調増加関数となるので,  $T \rightarrow 0$  のとき,  $\|s_4\|$  は最小となり, 吸引領域が最大となる. また,  $\mathcal{X}_0$  の大きさは  $k$  の値に依存しない. (2.9), (2.21) 式から, 初期状態  $x(0)$  は次の集合に属さなければならない.

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ x : |s_4x| < \frac{a}{\omega_n}, [x_1 \ x_2]' \in \mathcal{R} \right\} \quad (2.22)$$

**注意 1**  $v$  に飽和がないとし,  $T \rightarrow 0$  とするとき, 初期状態  $[r(0) \dot{r}(0) \theta(0) \dot{\theta}(0)]' = [0 \ 0 \ \theta_0 \ 0]'$  に対する  $|r(t)|$  のピーク値は  $k$  の単調増加関数となり,  $k \rightarrow 0$  のとき,  $|r(t)|$  のピーク値はその下限  $L\theta_0$  に近づく. このとき, 本制御則を線形の範囲で使う場合, 本制御則は Lin ら<sup>1)</sup> の制御則と同じ種類の制御則となる.

## 2.4 シミュレーションによる検討

制御対象のパラメータ  $\omega_n$  は今回使用した実験装置のものとした.

$$\omega_n = 5.98[\text{rad/s}], \quad L = \frac{g}{\omega_n^2} = 0.274[\text{m}], \quad g = 9.81[\text{m/s}^2]$$

また, 台車の許容振幅を  $a = 0.2[\text{m}]$  とする. 以下では, 提案法と Lin らの方法の制御則を比較する.

[Lin らの方法による設計法<sup>1)</sup>]

- 1) 台車駆動部に対して Fig. 2.3 の補償を行う.
- 2)  $v$  を次式で与える.

$$v = -(\omega_n + k)s_4x \quad (2.23)$$

- 3) 設計パラメータ  $T, k$  に十分小さな正数を与える.

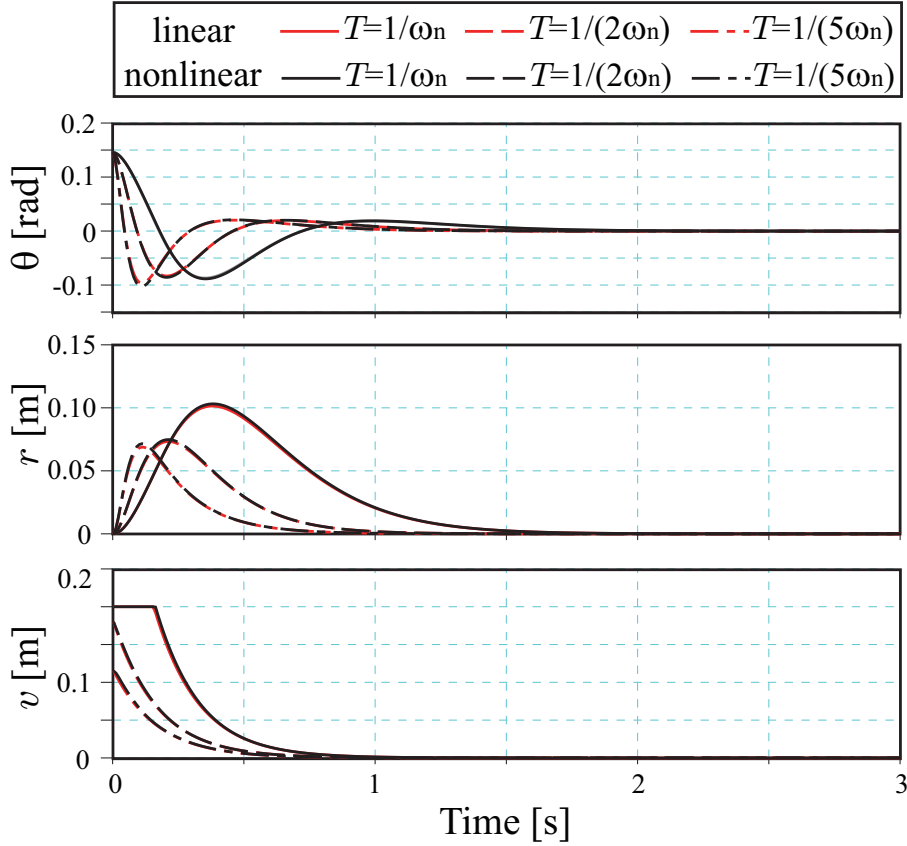
### 2.4.1 初期値応答の比較

倒立振子の非線形モデル (2.2), (2.8) 式と線形化モデル (2.13) 式に対して提案法を適用したシミュレーション結果を Fig. 2.4 に示す. ここで設計パラメータ  $k$  は  $k = \omega_n$  とし,  $T$  は次の3種類を与えた.

$$T = \frac{1}{n\omega_n}, \quad (n = 1, 2, 5)$$

初期条件は, (4.5), (2.22) 式より,  $r(0) = 0, \dot{r}(0) = 0, \theta(0) = 0$  とした場合の集合  $\mathcal{X}_1$  の倒立限界角度  $\theta_a$  を用いて,  $T = 1/\omega_n$  に対する  $\theta_a$  を 0.8 倍したものを与えた. (2.22) 式から,  $\theta_a$  は次式で計算できる.

$$\theta_a = \frac{1}{g} \frac{a\omega_n^2}{(T\omega_n + 1)^2} \quad (2.24)$$



**Fig. 2.4:** Numerical results for the proposed control law: the case for a small initial state.

すなわち,

$$r(0) = 0, \dot{r}(0) = 0, \theta(0) = 0.146 \text{ [rad]}, \dot{\theta}(0) = 0$$

とした。

Fig. 2.4 より，提案法を用いることで台車の振幅制限を満たしながら安定化できている。過渡応答は  $T$  を小さくすると速くなり，台車の振幅のピーク値が小さくなる傾向が見られる。この場合， $\theta(0)$  が小さいためモデル間の応答の差が非常に小さい。

次に，吸引領域がより大きくなる  $T = 1/(5\omega_n)$  に対する  $\theta_a$  により  $\theta(0)$  を与えた場合のシミュレーション結果を Fig. 2.5 に示す。ここで， $\theta_a|_{T=1/(5\omega_n)} = 0.506 \text{ [rad]}$

を用いて,

$$\theta(0) = \alpha\theta_a|_{T=1/(5\omega_n)}, \quad (\alpha = 0.7, 0.8, 0.9)$$

とした. その他の条件は Fig. 2.4 の非線形モデルのシミュレーションと同様とした.

Fig. 2.5 では, 初期状態が大きくなるにつれて, 入力  $v$  の飽和している期間が長くなっており,  $\alpha = 0.9$  では線形モデルの吸引領域に属す初期値であるにもかかわらず振子の転倒が起こっている. このように, 非線形モデルに対する吸引領域は (2.21) 式の領域より狭くなる. 非線形モデルに対する吸引領域については次節で考察する.

Fig. 2.5 と同様の初期条件に対して, Lin らの方法を適用した場合のシミュレーションを Fig. 2.6 に示す. ここで, 設計パラメータは  $T = 1/(5\omega_n)$ ,  $k = 0.01\omega_n$  とした.

Fig. 2.6 より, Lin らの方法では, 3つの初期条件のすべてに対して倒立が達成されているが, 初期条件によっては台車の振幅制限が満たされない. また, 小さな  $k$  による遅いモードが  $r$  の応答に現れている.

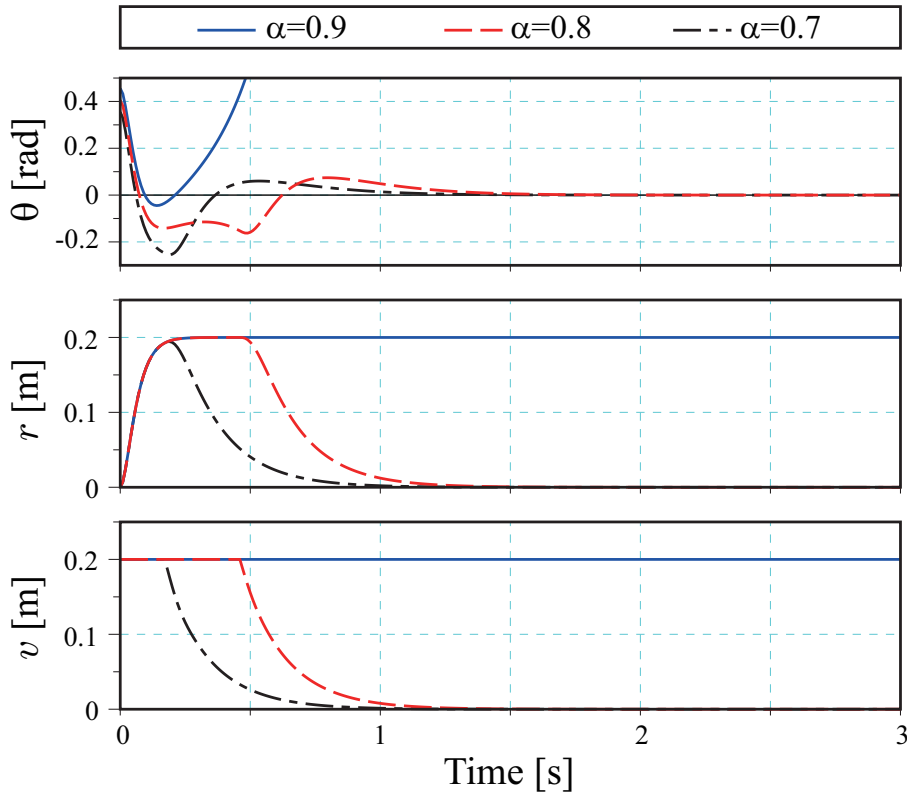
## 2.4.2 非線形モデルの吸引領域

非線形モデルを用いたシミュレーションから, 安定化可能な初期値を調べる. 簡単のため次式の初期条件を用いて,  $\theta(0) - \dot{\theta}(0)$  平面における安定化領域に限定する.

$$x(0) = [0, 0, L\theta(0), L\dot{\theta}(0)]' \quad (2.25)$$

シミュレーションは同平面のメッシュ状の点に対して行った.

Fig. 2.7 に提案法を非線形モデルに用いた場合の吸引領域と, (2.21) 式の吸引領域 (以降それぞれ, 非線形吸引領域と線形吸引領域と呼ぶ) とを比較したグラフを示す. ここで, 設計パラメータは  $T = 1/(5\omega_n)$ ,  $k = l\omega_n$ , ( $l = 0.1, 1, 2$ ),  $a = 0.2[\text{m}]$  としている. また,  $x(0)$  を用いて作られる吸引領域は原点对称となるため,  $\theta(0) - \dot{\theta}(0)$  平面上の第 1, 2 象限のみを示している. 非線形吸引領域は, 内部に安定化できない穴の領域をもっている.

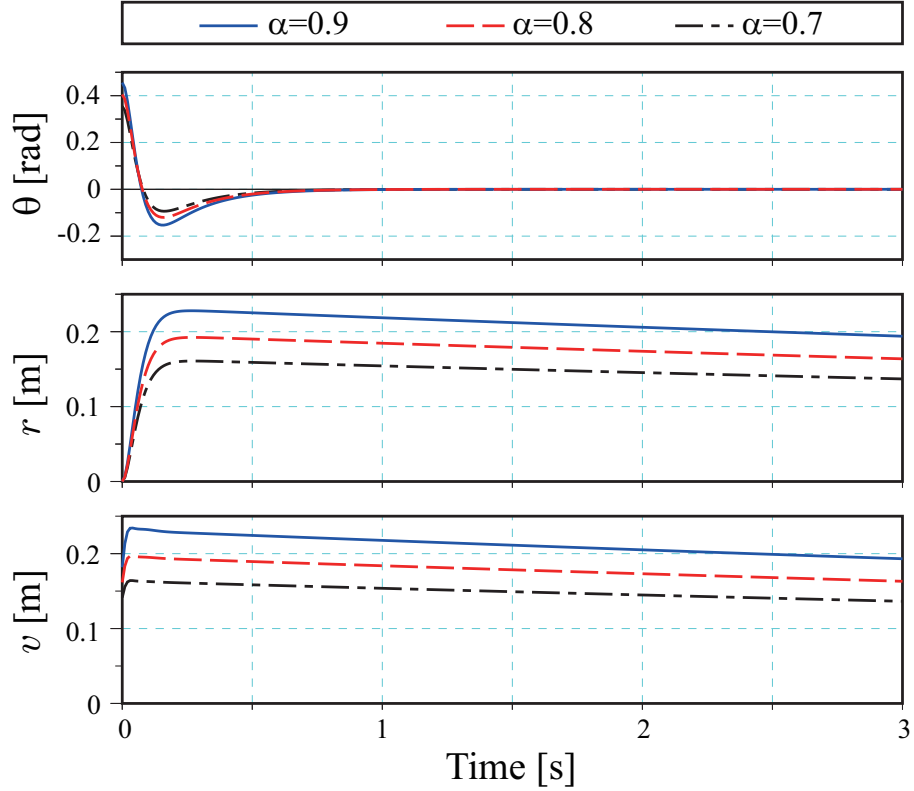


**Fig. 2.5:** Numerical results for the proposed control law: the case for a large initial state.

Fig. 2.7 より，提案法を用いて  $k$  をより大きく設定すると，安定化できない穴の領域は拡大し，ある程度小さな  $k$  以下では穴の領域は完全になくなる．また，吸引領域の外形の境界線は， $k$  に対して変化が小さく， $\theta(0) = 0$  近くではほぼ変化が見られない． $k$  をさらに大きく設定した別のシミュレーションでは，吸引領域内部に複数の穴が発生し，それぞれが拡大し最終的には原点近傍の非常に小さな領域でしか安定化を達成できなくなることがわかった．また， $k$  をさらに小さく設定したシミュレーションでは，不安定となる穴の領域が消え，領域がわずかに第 2, 4 象限に広がる．

このような安定化できない穴が生じる原因は，提案法では台車が入力飽和により本来の線形フィードバック時ほど素早く動けない区間があるためであると考えられる． $k$  を大きく与えるとき入力はより飽和しやすくなるため，不安定な領域も





**Fig. 2.6:** Numerical results for the control law of Lin et al.: the case for a large initial state.

現れやすい。

次に，Lin らの方法を適用した場合に生成される非線形吸引領域（制約値  $a = 0.2[\text{m}]$  に対して安定化を達成し，かつ  $|r| \leq a$  を満たす場合の初期値の集合）を Fig. 2.8 に示す．ここで，設計パラメータは Fig. 2.7 と同様に  $T = 1/(5\omega_n)$  とし， $k$  は  $k = l\omega_n$ ，( $l = 0.01, 0.1, 1$ ) と変化させた．

Lin らの方法を用いる場合，設計指針にもあるように  $k \rightarrow 0$  と変化させるにしたがって吸引領域は拡大する傾向があり，不安定な穴の領域は形成されないが， $k$  が大きな値を持つ場合，吸引領域は著しく縮小する．

このように，非線形吸引領域を用いて比較を行うと，提案法でも Lin らの方法と同様に  $T \rightarrow 0$ ， $k \rightarrow 0$  とすることが吸引領域を最大化する条件となっている．しかしながら，Lin らの方法に比べて，提案法では  $k$  をある程度大きくしても吸引領

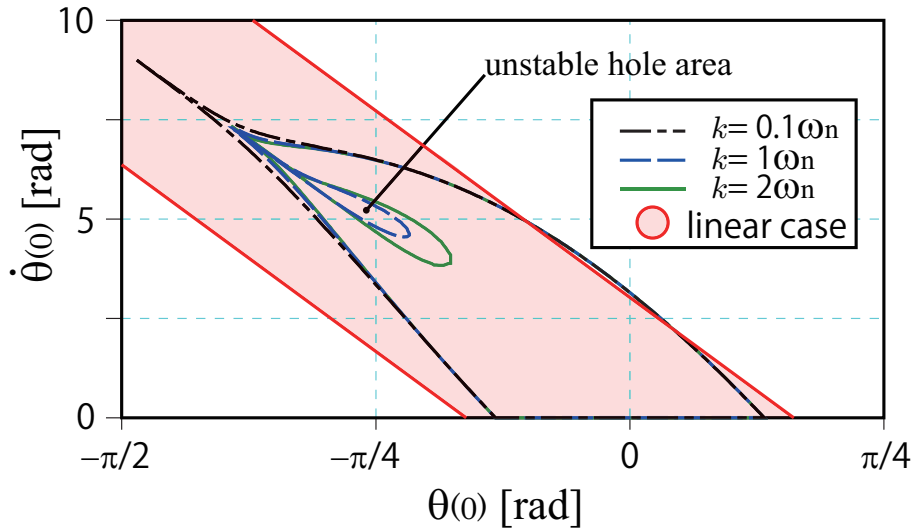


Fig. 2.7: Regions of attraction for the proposed method.

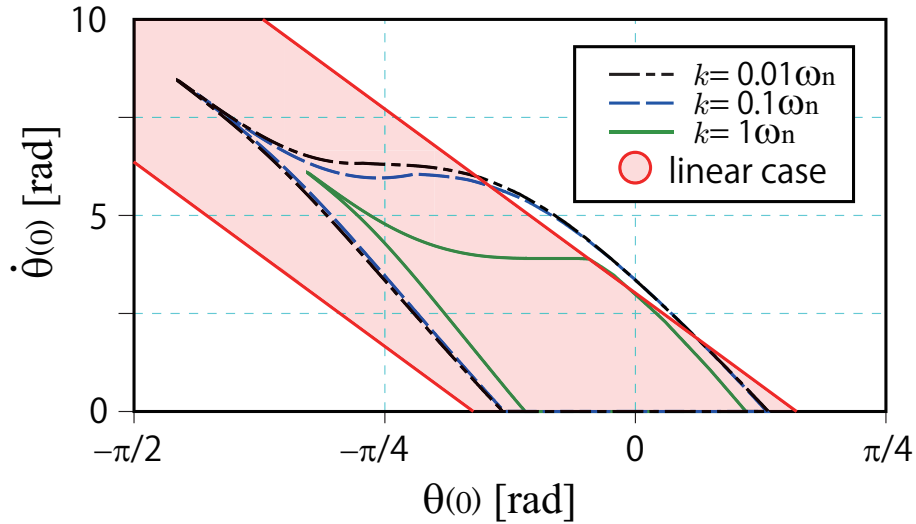
域の外側の境界線は大きく変化しないため、例えば、提案法を用いて不安定な穴の領域が発生しない最大の  $k$  を設定することで、最大吸引領域に近い非線形吸引領域を実現し、かつ応答に遅いモードが残る問題を解消できる。

Figs.2.7, 2.8 からわかるように、種々の  $T$  を設定し  $k \rightarrow 0$  とした場合に、提案法と Lin らの制御則が生成する非線形吸引領域は必ずしも一致せず、似てはいるものの互いに包含関係のない極限吸引領域に近づく。この  $k \rightarrow 0$  での吸引領域は任意の  $k$  の吸引領域の中でも最大に近いが、非線形性のため、かならずしも極大化されない。また、提案法では  $a, T$  が大きい場合には、不安定な穴の領域を消すためにより小さな  $k$  の設定が必要となる傾向がある。

$r(0) \neq 0, \dot{r}(0) \neq 0$  の場合、 $r$  の振幅制限内で制御する本制御則では安定化領域がより狭くなると思われるが詳細な検討は行っていない。

## 2.5 実機実験による検討

Fig. 2.2 の倒立振り子系において、台車はギヤド DC モータ（ツカサ電工製 TG-85R-SU-23.5, 定格出力 21[W], 減速比 1/23.5）およびプーリベルト機構（プーリのピッチ円直径 57.3[mm]）により駆動される。振り子の角変位  $\theta$  と台車の変位  $r$  はエ



**Fig. 2.8:** Regions of attraction for Lin et al.'s method.

ンコーダ（分解能はそれぞれ  $7.68 \times 10^{-4}$ [rad/pulse],  $5.00$  [ $\mu\text{m}/\text{pulse}$ ]) により測定した．コントローラは Windows ノートパソコン+DSP（エムエムティ製 s-BOX）であり，制御用プログラムは C 言語を用いた．サンプリング周期は  $1$ [ms] とし， $x_4 = \dot{r} + L\dot{\theta}$  は  $r$  を入力とする  $(x_3, x_4)$  部分系に対するオブザーバーによって推定した． $\dot{r}$  は Fig. 2.3 より  $\dot{r} = \tilde{u}_0$  として求めた．台車の許容振幅は  $a = 0.2$ [m] とした．

設計パラメータ  $T$ ,  $k$  について，まず台車駆動モータのバンド幅内で設定可能な  $T = 1/\omega_n$  とし，非線形吸引領域の大きさと同様に線形モードの速応性を考慮して  $k = 2\omega_n$  とした．また，比較のため，Lin らの制御則も同様に  $T = 1/\omega_n$  とし，非線形吸引領域を大きくするように  $k = 0.1\omega_n$  と設定した．上記の  $T$  に対して両制御系の非線形吸引領域はほぼ同じ大きさになる．初期値は吸引領域内にある適当な初期値として， $\theta(0) = 0.08$ [rad],  $\dot{\theta}(0) = 0.45$ [rad/s] とした．これは，振子を倒立状態 ( $x = 0$ ) から  $\theta$  が増加する方向に手でゆっくりと倒し， $\theta = 0.08$ [rad] となった時点で制御を開始することによって与えられる初期値である．オブザーバは倒立状態から正しい初期値 ( $x_3(0) = 0, x_4(0) = 0$ ) を用いて計算した．実験結果を Fig. 2.9 に示す．

Fig. 2.9 では，両制御則とも (2.3) 式を満たしながら倒立を実現しており，台車が原点近くに復帰した後は台車駆動系の不感帯や振子の回転摩擦抵抗などの非

線形性に起因する原点近傍のリミットサイクルへと収束する。Lin らの方法では、提案法に比べて台車の原点への復帰が遅く、リミットサイクルに周期の長い振動モードが見られる。以下では、 $\theta$  の検出誤差や  $\omega_n$  のモデル誤差がある場合の実験を行い、制御性能の変化を考察する。また、振り上げ安定化制御に提案法を用いた場合の有効性を検証する。

### 2.5.1 振子の角変位 $\theta$ に検出誤差がある場合

$\theta$  について、以下の誤差を考える。

$$\hat{\theta} = \theta + \theta_e \quad (\theta_e = \text{const.}) \quad (2.26)$$

このような角度誤差  $\theta_e$  は、振子角度設定時のゼロ点のズレや台車が走行する床の傾きの変化によって生じる。Fig. 2.9 の実験条件に対して、 $\theta_e = 0.005[\text{rad}]$  を与えた場合の実験結果を Fig. 2.10 に示す。

Fig. 2.10 では、台車変位  $r$  が振子倒立後に原点に復帰せず定常偏差を残してリミットサイクルに収束している。また、その定常偏差は Lin らの方法でより小さくなっており、他の実験から  $\theta_e$  の増加に比例して定常偏差が増加してゆくことがわかった。

$|\theta_e|$  が十分小さい場合、線形計算から、台車の定常偏差  $r(\infty)$  は次式となる。

$$r(\infty) = - \left( 1 + \frac{1}{k} \omega_n \right) (1 + T\omega_n)^2 L\theta_e \quad (2.27)$$

実験を行った制御則に対して、提案法で  $|r(\infty)| = 8.22 \times 10^{-3}[\text{m}]$ 、Lin らの方法で  $|r(\infty)| = 6.03 \times 10^{-2}[\text{m}]$  と計算でき、 $k$  をできるだけ大きく設定する提案法では  $\theta_e$  による台車の定常偏差  $|r(\infty)|$  をより小さくできる。

### 2.5.2 振子の固有角振動数 $\omega_n$ にモデル誤差がある場合

$\omega_n$  について、以下のモデル誤差を考える。

$$\omega'_n = \gamma\omega_n \quad (2.28)$$

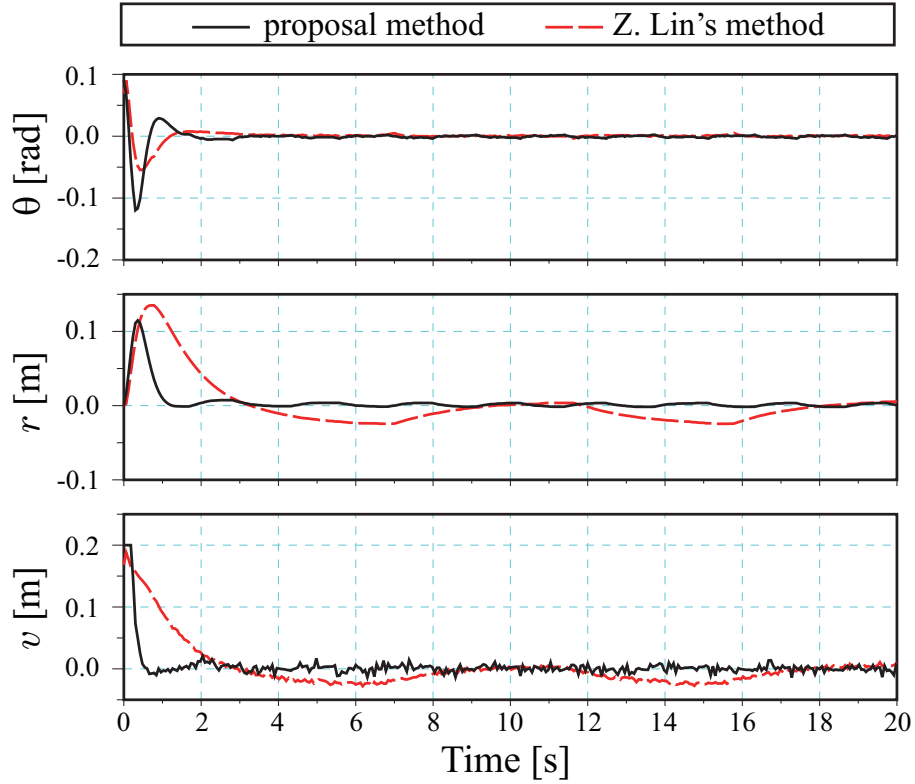


Fig. 2.9: Experimental results for the two methods.

係数  $\gamma$  は  $\omega_n$  の測定誤差によるモデル誤差を表しており、 $\omega'_n$  が (2.19) 式の  $v$  やオブザーバの計算に用いられる. Fig. 2.9 は  $\gamma = 1$  の場合の実験結果であり、 $\gamma$  を変化させた場合の実験結果を Fig. 2.11, 2.12 に示す. ただし、初期値は  $\theta(0) = 0.05[\text{rad}]$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.27[\text{rad/s}]$  とした.

Figs.2.11, 2.12 より、両方法とも、 $\gamma > 1$  の場合には台車の応答が振動的になり、 $\gamma < 1$  の場合には入力に大きなチャタリングが発生し台車の定常偏差が大きくなっている. さらに  $\gamma$  を大きくした場合には、徐々に吸引領域が縮小した. さらに  $\gamma$  を小さくした場合には、振子の安定化の途中で台車が振幅制限へと向かい安定化ができなくなった. このような影響は提案法でより顕著に表れ、台車の振幅制限下で倒立が達成された  $\gamma$  の範囲は、提案法で  $0.55 \leq \gamma \leq 1.30$ , Lin らの方法で  $0.55 \leq \gamma \leq 1.95$  であり、Lin らの方法でよりロバストに安定性を維持できていた.

提案法は、(2.19) 式で  $k$  を大きくするためフィードバックゲインが比較的大きく

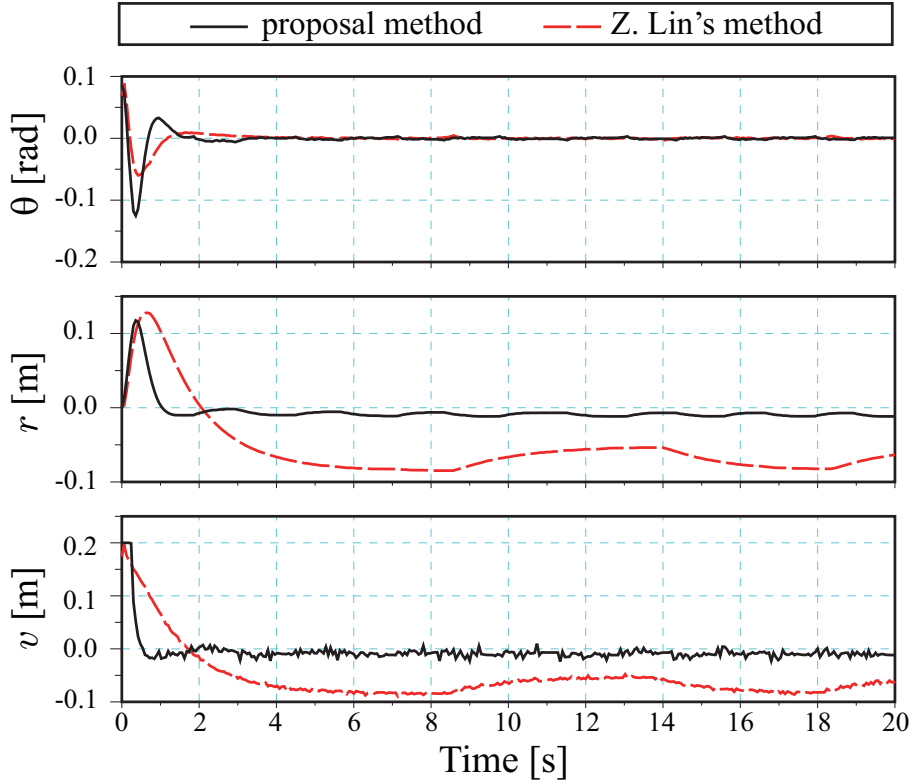
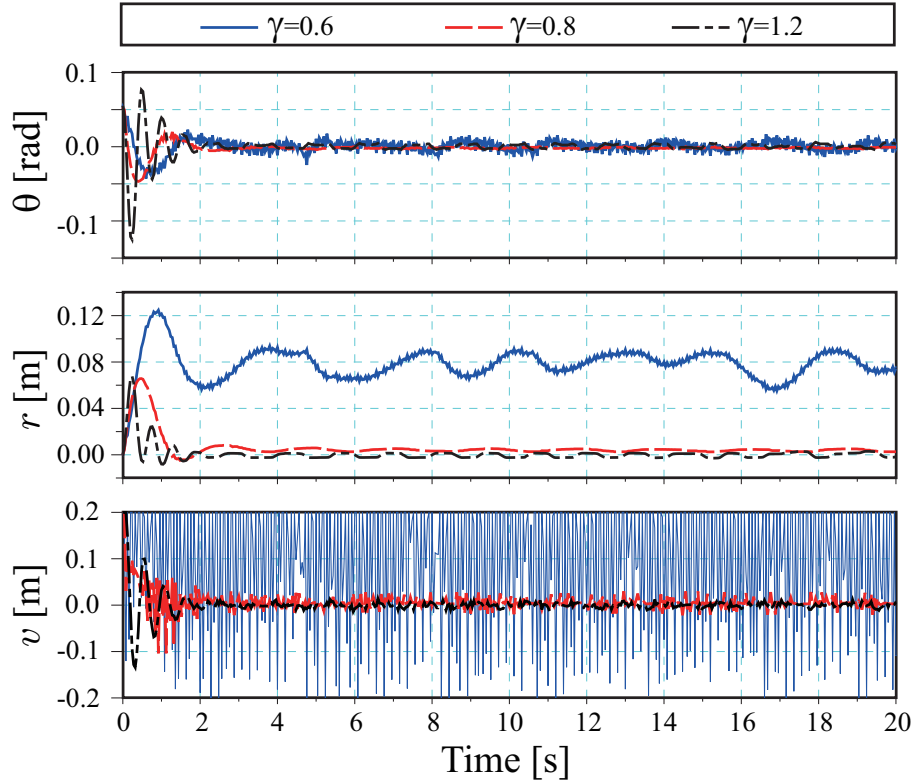


Fig. 2.10: Experimental results with measurement error in  $\theta$ .

なる。これにより制御系の速応性は改善されるが、モデル誤差の影響を受けやすくなる。 $\omega_n$  の測定誤差が大きいとき、 $k$  を小さめに設定することでこのような不安定な摂動を抑制することができる。

### 2.5.3 振り上げ安定化制御に用いた場合

本制御則を文献 2) の振り上げ制御と組み合わせて行った実験について述べる。 $a = 0.1[\text{m}]$  とし、本制御則のパラメータを  $T = 1/\omega_n, k = 2\omega_n$ 、振り上げ制御のパラメータを  $\zeta_a = 1, c_0 = 1, b_0 = 0.08V_d a/L, V_d = 2gL$  とした。また、振り上げ制御の間、 $\dot{\theta}$  は  $\theta$  の測定値より差分近似で求めた。振り上げ制御から安定化制御に切り換える基準として、 $r(0) = 0, \dot{r}(0) = 0$  とした非線形吸引領域内の領域として求め



**Fig. 2.11:** Experimental results for the proposed method with modeling error in  $\omega_n$ .

た以下を用いた.

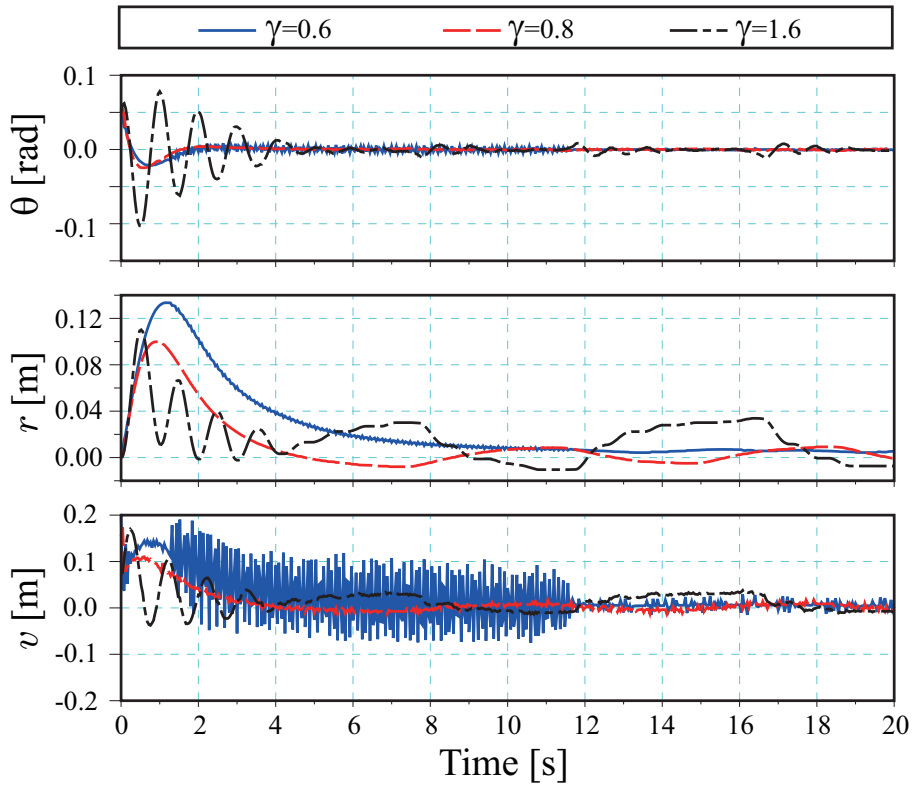
$$|s_4x| < 0.9 \frac{a}{\omega_n} \quad \text{and} \quad |\theta| < \frac{\pi}{8} \quad (2.29)$$

振子が鉛直下向きの状態  $[\theta \ \dot{\theta} \ r \ \dot{r}] = [-\pi \ 0 \ 0 \ 0]$  から振り上げを行い，状態が上記の切り換え関数内に入った時，安定化制御に切り換えた．安定化制御時は，上記の2次元オブザーバを用いたが，この初期値設定に必要な  $\dot{\theta}$  には切り換え時の  $\dot{\theta}$  の差分近似を用いた．実験結果を Fig. 2.13 に示す．

Fig. 2.13 において，安定化制御への切換点は

$$[\theta \ \dot{\theta} \ r \ \dot{r}] = [-0.373[\text{rad}] \ 2.301[\text{rad/s}] \ 0.008[\text{m}] \ 0.142[\text{m/s}]]$$

であり，安定化できていることがわかる．本実験で用いた振り上げ制御則は振子が倒立状態に近づくにつれて  $r$ ,  $\dot{r}$  が 0 に近づく特性がある．このため，上記の切換点が非線形吸引領域内に含まれたと考えられる．安定化制御に Lin らの方法を



**Fig. 2.12:** Experimental results for Lin et al.'s method with modeling error in  $\omega_n$ .

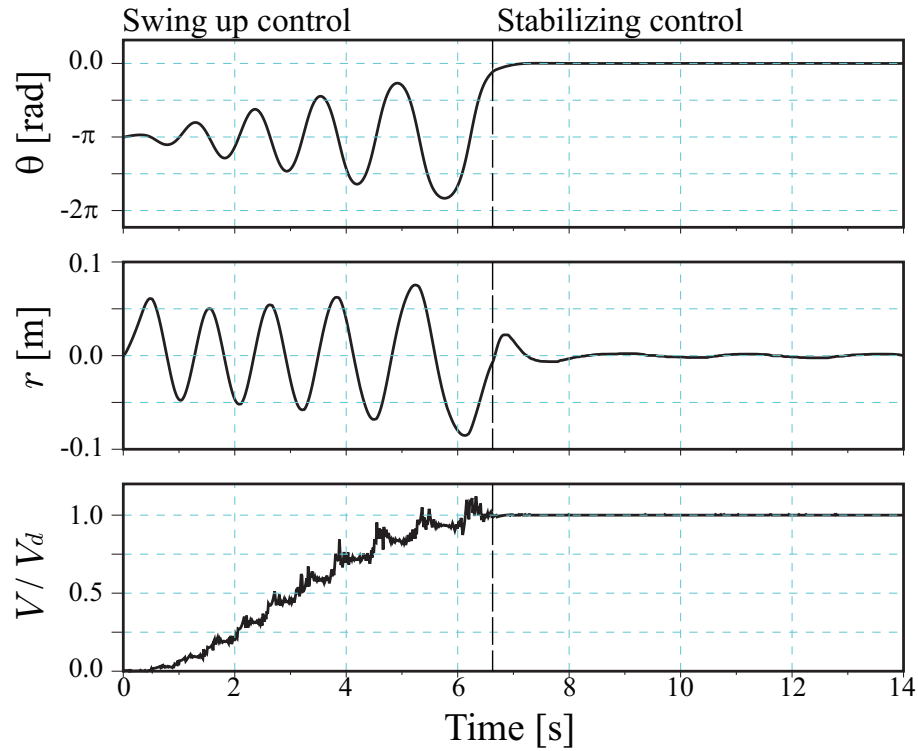
用いる場合にも、(2.29) 式の切り換え関数により安定化が可能であった。ただし、上述のように Lin らの方法は遅いモードを持ち、台車の振幅制限は保証されない。

安定化制御でもオブザーバの代わりに  $\dot{\theta}$  の差分近似を用いて制御できたが、エンコーダの量子化誤差のため平衡点近くではこの差分近似が高周波のパルス状信号となり、台車の運動にチャタリングが生じやすくなった。

## 2.6 おわりに

本章では、文献3) で提案された制御則の有効性を、数値シミュレーションと実機実験により検討した。提案法は、同種の問題に対する Lin らの方法と比べて、台車の振幅制限を扱うことができ、またより速い台車の応答が得られるという利点





**Fig. 2.13:** Experimental results for the swing-up and stabilizing control.

がある。提案法の非線形吸引領域は2つの設計パラメータ  $T, k$  を  $T \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  と設定することで大きくなり、Linらの方法と同等の最大非線形吸引領域を実現できる。また、提案法ではLinらの方法より大きな  $k$  を設定しても、Linらの方法と同程度の大きさの非線形吸引領域を得ることができた。すなわち、提案法では、設計パラメータ  $T$  や台車の振幅制限  $a$  に応じて  $k$  を設定することで、良好な応答特性をもちながら、比較的広い非線形吸引領域を得ることができる。

# 3. ビーム角の制限を考慮したボール ビーム系の安定化制御

## 3.1 はじめに

ボールビーム系はビームの上におかれたボールの位置をビームを傾けることによって制御しようとする系であり，制御理論の学習および検証用の制御対象として普及している<sup>16-18)</sup>．ボールの運動方程式に重力項や遠心力項の非線形項があり，これらを考慮したボール位置のサーボ問題<sup>19),20)</sup>や，系の半大域的安定化問題<sup>8),9)</sup>が研究されてきた．後者では，遠心力項を大きくしないために，ビームの角速度を小さく抑える効果を持つ飽和制御則が利用された．

一方，状態が平衡点近くに限られる場合，ボールビーム系は線形系として近似でき，線形制御理論によって比較的簡単に安定化制御則を求めることができる．この観点で設計された制御系は，モデル誤差や外乱の影響により状態が平衡点から大きく離れたとき，制御性能が劣化し，最悪の場合不安定となるため，状態の制約を陽に考慮した制御則が望ましい．また，現実の制御系は，アクチュエータの性能限界や装置の可動範囲からくる，入力や状態の制約が存在するため，このような問題の解は，広いクラスの制御対象に対する実用的な制御則を与える<sup>23)</sup>．

本章では，ビーム角の制約を考慮したボールビーム系の安定化問題を考える．まず，ビーム駆動系を2次遅れ系に補償することにより，ビーム角に対する制約問題を入力制約問題に単純化する．そして，モード分解法<sup>22),24),25)</sup>によってボールの不安定ダイナミクス（二重積分器）を分離し，問題をより簡単な入力制約付き二

重積分器の安定化問題として定式化する．実部が非正の極を持ち，入力制約があるプラントを大域的に漸近安定化する制御則の中に，入れ子構造の飽和関数を持つ状態フィードバック制御則があることが文献<sup>30),29)</sup>で示された．これらの文献では高次の多重積分器に適用可能な一般的な設計法を示しているが，示された制御則には調整可能なフィードバックゲインがなく応答特性が改善できなかった．本章では，線形の範囲で任意の極配置が可能な新たな入れ子形飽和制御則の設計法を提案する．

提案した飽和制御則は平衡点近傍で線形状態フィードバックに一致する構造を持つため，積分特性を持たず，そのままでは外乱やモデル誤差により，ボール位置に定常偏差が残る．しかし，積分器を有する線形補償器を用いた場合に，入力飽和により大きなオーバーシュートや不安定化が生ずるリセットwindアップ現象<sup>14)</sup>が知られており，提案法に積分器を追加して定常偏差を小さくすることは困難である．

安定化された非線形プラントの，モデル誤差による性能劣化を改善するため，内部モデル制御法<sup>31)</sup>(以降 IMC 法と呼称)が提案されているが，プラントの出力側に入る外乱に対しては上記のリセットwindアップが生じるため，これを抑制するアンチwindアップ補償器が必要となる<sup>32)</sup>．本章では，飽和制御則で安定化されたプラントとそのモデルの出力誤差のフィードバック量を絞る飽和関数を追加した誤差飽和型 IMC 構造を導入する．

本章はつぎのように構成される．第2節では，制御対象の数学モデルおよび状態制約の入力制約への変換について述べる．第3節では，問題をさらに簡単な入力制約付き二重積分器系の安定化問題として定式化し，系を漸近安定化する入れ子形飽和制御則を示す．また，実装時の計算アルゴリズムも示す．さらに，誤差飽和型 IMC 制御系の設計法を示す．第4節では，目標値応答と外乱応答に対するシミュレーションおよび実験結果を示す．そこで Hauser らの追従制御，Teel の飽和制御，IP 型制御と比較する．第5節では，結言を述べる．

## 3.2 制御対象の数学モデルと問題の記述

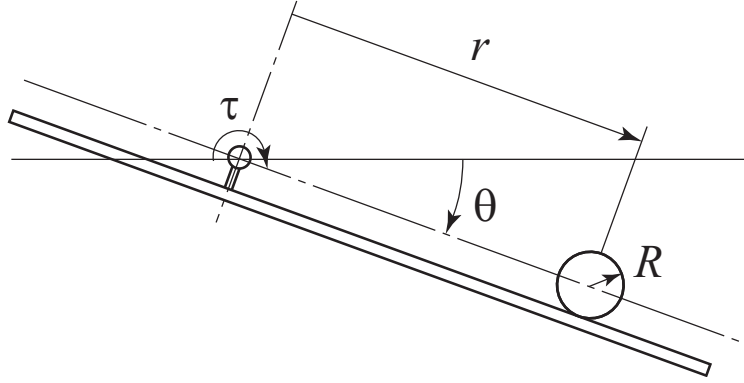


Fig. 3.1: Ball and beam system

Fig. 3.1 にボールビーム系のモデル図を示す．各記号の意味は以下のとおりである．

- $\theta(t)$  : 水平からのビームの角変位 [rad]
- $r(t)$  : 支点からのボールの位置 [m]
- $\tau(t)$  : ビームに作用するトルク [N·m]
- $J$  : ビームの慣性モーメント [kg·m<sup>2</sup>]
- $M$  : ボールの質量 [kg]
- $R$  : ボールの半径 [m]
- $J_b$  : ボールの慣性モーメント [kg·m<sup>2</sup>]  
(球なので  $J_b = \frac{2}{5}MR^2$ )
- $g$  : 重力加速度 [m/s<sup>2</sup>]

$r$ ,  $\theta$  は測定可能とする．ボールとビームは常に接触し，ボールはビーム上を滑ることなく回転するものとする．また，ボールの転がり摩擦や各部分の散逸力は無視する．以上の仮定から，ボールビーム系の運動方程式は次式で得られる<sup>19)</sup>．

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + M\right) \ddot{r} - Mg \sin \theta - Mr\dot{\theta}^2 = 0 \quad (3.1)$$

$$(Mr^2 + J + J_b) \ddot{\theta} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} - Mgr \cos \theta = \tau \quad (3.2)$$

無次元数  $M_0$  を次式で定義する.

$$M_0 = \frac{M}{\frac{J_b}{R^2} + M} = \frac{M}{\frac{2}{5}M + M} = \frac{5}{7}$$

$|\theta|$ ,  $|\dot{\theta}|$  は十分小さいと仮定し, (3.1) 式を  $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$  近傍で線形近似すると次式を得る.

$$\ddot{\theta} = M_0 g \theta \quad (3.3)$$

(3.2) 式の運動方程式については, ボールの反力項を無視できる十分大きな  $\tau$  が使えるとして, つぎのように高ゲインフィードバック法<sup>33)</sup>で2次遅れ系に補償する. すなわち, ビーム角の後退差分として求めた角速度の近似値  $\hat{\dot{\theta}}$  を用いて次式の高ゲインフィードバック補償を行う.

$$\tau = F_v(u_0 - \hat{\dot{\theta}}) \quad (3.4)$$

$F_v$  は正の定数で,  $u_0$  は新たな入力である.  $F_v$  を大きく設定すると, (3.2) 式は近似的に次式となる.

$$\dot{\theta} = u_0 \quad (3.5)$$

これに対し, Fig. 3.2 の IP 型補償器を用いて, ビーム駆動系を時定数  $T > 0$  を持つ2次遅れ系となるよう補償する.

以上より, 駆動系補償後のボールビーム系のブロック線図は Fig. 3.3 となる.

$\theta$  にはつぎの制約があるとする.  $a$  は正の定数である.

$$|\theta(t)| \leq a, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.6)$$

(3.6) 式の条件はつぎの2つの条件が成立すれば満たされる<sup>2)</sup>.

$$|v(t)| \leq a_1, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.7)$$

$$[\theta(0) \quad \dot{\theta}(0)]' \in \mathcal{R} \quad (3.8)$$

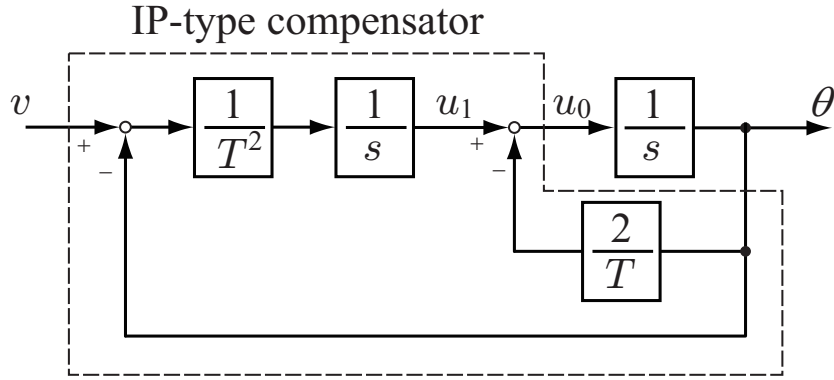


Fig. 3.2: The compensated drive system

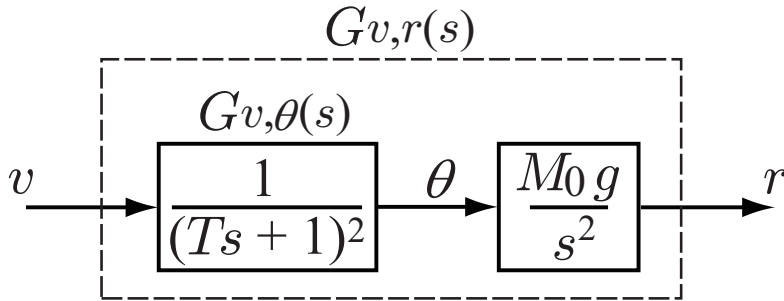


Fig. 3.3: Block diagram of the linearized system

ここで

$$a_1 = \frac{a}{\|g_{v,\theta}(t)\|_1}, \quad \|g_{v,\theta}(t)\|_1 = \int_0^\infty |g_{v,\theta}(t)| dt \quad (3.9)$$

$\mathcal{R}$  は, (3.7) 式を満たす入力  $v$  を用いて原点から到達可能な  $[\theta(t) \dot{\theta}(t)]'$  の集合で,  $g_{v,\theta}(t)$  は入力  $v$  からビーム角  $\theta$  までの伝達関数  $G_{v,\theta}(s)$  のインパルス応答である.  $G_{v,\theta}(s) = \frac{1}{(Ts+1)^2}$  に対して,  $\|g_{v,\theta}(t)\|_1 = 1$  なので  $a_1 = a$  である.

問題は, Fig. 3.3 の系に対して, (3.7) 式の入力制限内でボールを初期平衡点から目標位置  $r_f$  まで移動し, そこで系を漸近安定化させる制御則を求めることである.

### 3.3 設計法

本節では，一般性を失うことなく， $r_f = 0$  とし，問題を原点に対する安定化問題として解いた後に，0 でない  $r_f$  も含む場合への拡張や計測できない状態を推定するためのオブザーバの設計法を述べる．最後に，ボール位置の目標値追従特性を改善するための誤差飽和型 IMC 制御系の構成法を述べる．

#### 3.3.1 モード分解法によるモデルの低次元化

Fig. 3.3 の系をつぎの状態方程式で表す．

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (3.10)$$

ただし

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0g & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ u_1 \end{bmatrix},$$

座標変換

$$z = Sx, \quad S = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_0g} & \frac{2T}{M_0g} & T^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_0g} & 0 & T^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

により，(3.10) 式を次式のようにブロック対角化する．

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}v \quad (3.12)$$

ただし

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

上記の変換に合わせて、変換後の状態  $z$  を

$$z = \begin{bmatrix} z_{u,1} \\ z_{u,2} \\ \theta \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_u \\ z_s \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

と分離する。系はつぎのように分割された。

$$\dot{z}_u = A_{11}z_u + \bar{B}_1v \quad (3.14)$$

$$\dot{z}_s = A_{22}z_s + B_2v \quad (3.15)$$

$z_u$  部分系は  $\{0, 0\}$  の極を持ち不安定で、 $z_s$  部分系は  $\{-\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}\}$  の極を持ち漸近安定である。

よって問題は、(3.7) 式の入力制約のもとで、(3.14) 式の  $z_u$  部分系を漸近安定化する制御則を求めることに簡単化された。

### 3.3.2 入れ子形飽和制御による安定化

飽和関数を

$$\text{sat}(\zeta, a_1) = \text{sgn}(\zeta)\min(|\zeta|, a_1) \quad (3.16)$$

と定義し、 $v$  を次式で与える。

$$v = \text{sat}(v_0 + v_1, a_1) \quad (3.17)$$



ここで

$$v_0 = -f_0 z_{u,2}, \quad f_0 = \frac{a_1}{v'_{max}} \quad (3.18)$$

$$v_1 = \text{sat} \left( -f_0 f_1 \left( z_{u,1} + \frac{1}{f_0} z_{u,2} \right), a_1 \right) \quad (3.19)$$

であり,  $v'_{max}$ ,  $f_1$  は与えられる正の定数である.

また, 集合  $\mathcal{S}_0$  を次式で定義する.

$$\mathcal{S}_0 = \{z_{u,2} : |z_{u,2}| \leq v'_{max}\} \quad (3.20)$$

この時, つぎの定理が成り立つ.

**定理 1** (3.17) 式の  $v$  は,  $\mathcal{S}_0$  を正不変集合とし, (3.14) 式を大域的に漸近安定化する (証明は付録 I を参照).

(3.17) の制御則が線形の範囲で動作する場合, (3.14) 式の部分系の極は  $\{-f_0, -f_1\}$  に配置される.

$r_f \neq 0$  のとき,  $v$  の計算式で使用する  $z_{u,1}$ ,  $z_{u,2}$  を (3.11) 式で計算する場合に,  $x$  の代わりに,  $x$  から目標となる平衡点の状態  $x_e = [r_f \ 0 \ 0 \ 0]'$  を引いた  $x - x_e$  を用いればよい.

### 3.3.3 $v'_{max}$ の与え方

本制御系では, 有限時間  $\theta \equiv 0$  となり, ボールが等速運動する制御モードがある. このモードは  $z_u$  が  $\mathcal{S}_0$  の境界を運動するときに発生する. この間,  $\dot{z}_{u,2} = 0$  であり, (3.14) 式から,  $v = 0$  となる. (3.11) 式から

$$|z_{u,2}| = \left| \frac{1}{M_0 g} \dot{r} + T^2 u_1 \right| \quad (3.21)$$

であり,  $\mathcal{S}_0$  の境界では  $|z_{u,2}| = v'_{max}$  である. また,  $v = 0$  から  $\theta$ ,  $u_1$  も 0 に近づくので,  $u_1 = 0$  とおくと,  $v'_{max} M_0 g = |\dot{r}|$  となる. よって, 与えられた正数  $v_{max}$  に対して

$$v'_{max} = \frac{v_{max}}{M_0 g} \quad (3.22)$$

と選べば,  $|\dot{r}| \simeq v_{max}$  となり, このモードにおけるボールの速度を  $v_{max}$  で指定できる.

### 3.3.4 制御則の計算アルゴリズム

$r, \theta$  はセンサーによる計測から,  $u_1$  はコントローラの内部変数として入手可能である. 残りの変数  $\dot{r}$  は  $x_r = [r, \dot{r}]'$  部分系に対するオブザーバにより推定する.  $x_r$  部分系の状態方程式表現を次式とする.

$$\dot{x}_r(t) = A_{11}x_r(t) + B_b\theta(t), \quad r(t) = C_b x_r(t) \quad (3.23)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0g \end{bmatrix}, \quad C_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この系に対するオブザーバは次式で与えられる.

$$\dot{\hat{x}}_r(t) = (A_{11} - K_b C_b)\hat{x}_r(t) + B_b\theta(t) + K_b r(t) \quad (3.24)$$

$K_b$  は  $A_{11} - K_b C_b$  を安定行列にするオブザーバゲインである.

上記で得られた制御則の計算法を以下にまとめる.

- (1) 時刻  $t$  までの計測データ  $(\theta, r)$  から, (3.24) 式のオブザーバにより  $\dot{r}$  の推定  $\hat{\dot{r}}$  を求める.
- (2) Fig. 3.2 の補償器で 1 ステップ前に計算した  $u_1$  を合わせた状態  $\hat{x} = [r \ \hat{\dot{r}} \ \theta \ u_1]'$  から  $z_u$  の推定  $\hat{z}_u$  を次式で計算する.

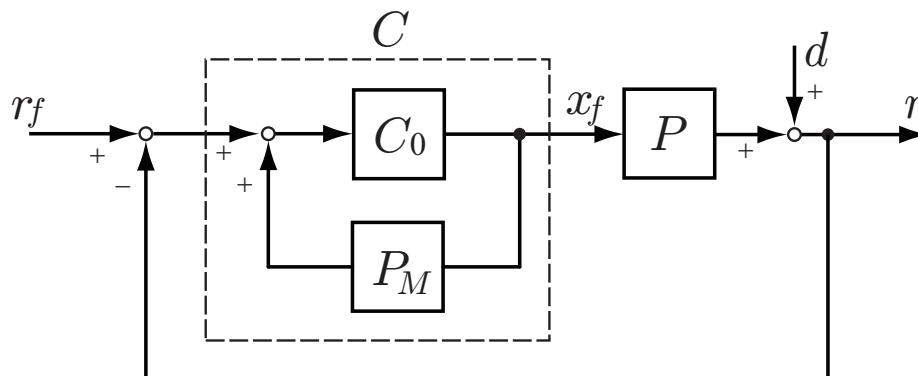
$$\hat{z}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} S(\hat{x} - x_e)$$

- (3) (3.17) 式より  $v$  を計算する.

### 3.3.5 誤差飽和型 IMC 制御系の構成法

本制御系はコントローラに積分特性を持たないため, 外乱やモデル誤差に対して  $r - r_f$  に偏差が生じる可能性がある. Fig. 3.4 の IMC 法はこのような既安定化

された非線形プラントに対し，プラントのダイナミクスを変えず入出力追従特性を向上させる有効な手段である<sup>31)</sup>。



**Fig. 3.4:** Block diagram of the conventional IMC control system

ここで，プラント  $P$  は提案法を用いた制御系で入力を  $r_f$ ，出力を  $r$  とした時の入出力関係

$$r = P(r_f) \quad (3.25)$$

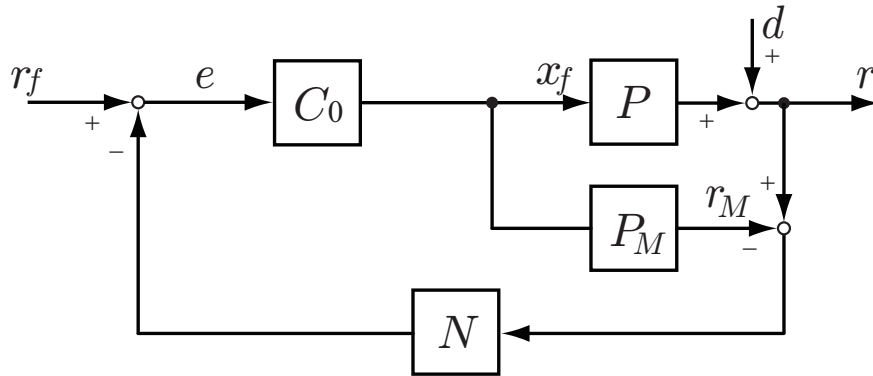
であり， $P_M$  は  $P$  のモデル， $C_0$  は安定な系（IMC フィルタ）である．平衡点近くでは  $P$ ， $P_M$ ， $C_0$ ， $C$  は線形系となり，伝達関数表現できる．それらを  $\bar{P}(s)$ ， $\bar{P}_M(s)$ ， $\bar{C}_0(s)$ ， $\bar{C}(s)$  と記すと，次式を満たすとき，平衡点近くでコントローラ  $C$  は積分特性を持つ．

$$\bar{C}_0(0)\bar{P}_M(0) = 1 \quad (3.26)$$

実際，このとき  $\bar{C}(s) = \frac{\bar{C}_0(s)}{1 - \bar{C}_0(s)\bar{P}_M(s)}$  が  $0$  の極を持つ． $\bar{P}_M(0) = 1$  なので  $\bar{C}_0(0) = 1$  が積分特性を持つ条件となる．

しかし，プラントの入力変数が飽和する場合には性能の劣化は避けられず，とりわけ，出力ステップ外乱応答などにより，IMC コントローラ  $C$  の持つ早いダイナミクスが飽和に遮られる場合に，この性能劣化が顕著に表れる<sup>32)</sup>。

そこで，ボールビーム系の出力側に入るステップ外乱  $d$  を想定し，この外乱による急峻な内部モデル  $P_M$  の出力との誤差のフィードバックを抑制するよう，Fig. 3.5 の誤差飽和型 IMC 制御系を導入する．Fig. 3.5 では  $P$  と  $P_M$  の出力誤差のフィー



**Fig. 3.5:** Block diagram of the IMC control system with an error saturation function

ドバックが飽和関数  $N$  を通過し、次式となる.

$$e = r_f - \text{sat}(r - r_M, e_{max}) \quad (3.27)$$

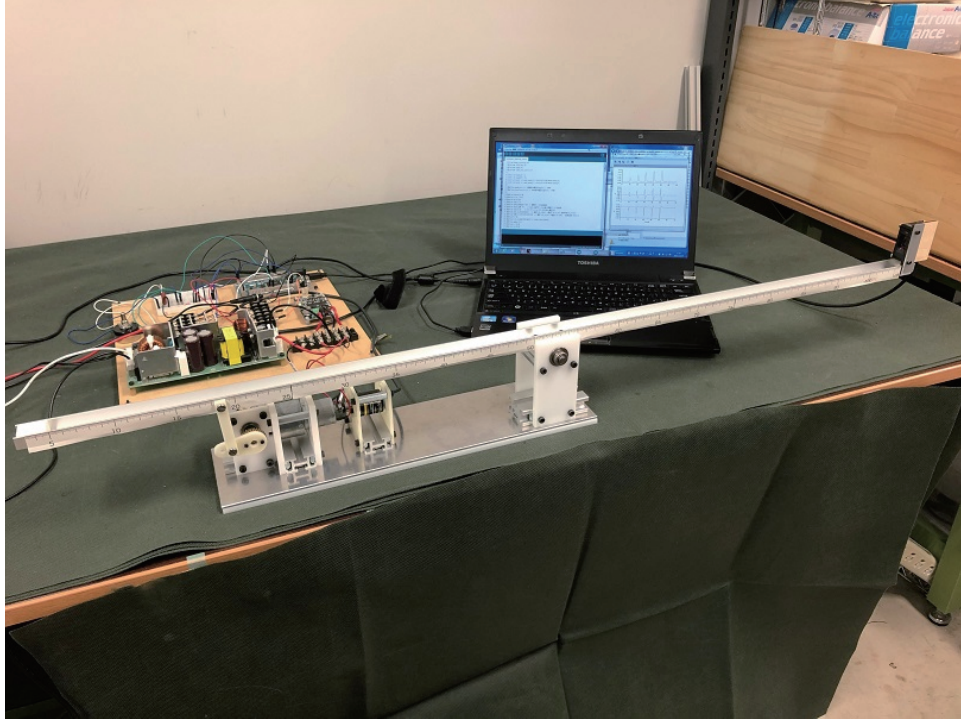
$e_{max}$  は正の定数である.

### 3.4 シミュレーションと実験結果

実験装置の概観を Fig. 4.3 に示す.

ビームは中央で回転支持されたアルミチャンネル (溝の幅 18 mm, 長さ 1000 mm) で, ボールはプラスチック球 (直径 38 mm, 重量 52.7 g) である. ビームはギヤド DC モータ (ツカサ電工 TG-47H-SV-10-HB, 減速比:1/10, 定格電圧:24V) で駆動され, ボール位置およびビーム角度は, それぞれレーザ距離センサ (北陽電機 LX2-257AG) および, ロータリーエンコーダ (オムロン E6A2-CW3C 500P/R) で計測した. コントローラとしてマイコンボード Arduino Due を用いた. サンプル周期は 1ms である.

本節では, まず IMC 制御系を用いない場合の提案法の挙動について, 疑似線形化手法を用いた Hauser らの追従制御と, 提案法と同様の低次元化モデルに対して設計した Teel の飽和制御について比較実験を行った. つぎに, IMC 制御系を用いた



**Fig. 3.6:** View of the experimental system

場合の提案法の挙動について、一般的な入出力追従に用いられる積分器付き補償器として IP 型制御系との比較実験を行った。

ここで、上記の Hauser らの追従制御は  $\theta$  の制約をもともと考慮しておらず、IP 型制御系もまた  $\theta$  の制約からくる入力制約に対して安定性が保証されない制御法である。このため、目標値  $r_f(t)$  の速度の上限値を  $0.05[\text{m/s}]$  で飽和させるフィードフォワード補償器を導入し、 $\theta$  を小さく抑える条件で実験を行った。 $r_f(t)$  を生成するブロック線図を Fig. 3.7 に示す ( $N$  は飽和関数を示す)。  $T_0 = 0.5[\text{s}]$  とし、関数  $r_o(t)$  はつぎの矩形波で与えた。

$$r_o = 0.15\text{sgn}(\sin \omega t)[\text{m}], \quad \omega = 0.2[\text{rad/s}]$$

比較対象の 3 つの制御則の設計法を以下に示す。

[Hauser らの追従制御の設計法<sup>19)</sup>]

遠心加速度項を無視する近似法を用いて設計を行う。(3.2) 式より、新たな入力

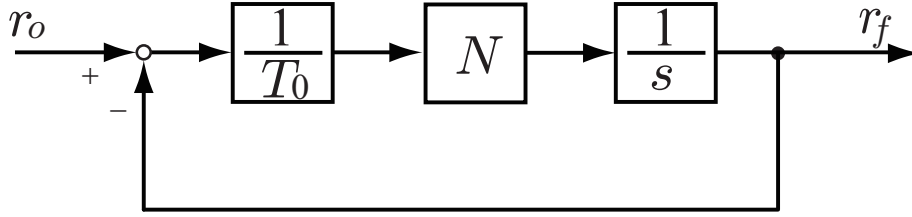


Fig. 3.7: Block diagram of the reference generator

$u'$  を定義し、つぎの非線形変換を行う。

$$\tau = 2Mr\dot{r}\dot{\theta} - Mgr \cos \theta + (Mr^2 + J + J_b)u' \quad (3.28)$$

さらに非線形座標変換

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \Phi(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ M_0g \sin \theta \\ M_0g\dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

により、(3.1) , (3.2) 式は次式に変換される。

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \psi_2(r, \dot{\theta}) \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = -M_0g\dot{\theta}^2 \sin \theta + u' M_0g \cos \theta =: u'' \end{cases} \quad (3.30)$$

ただし

$$\begin{aligned} \psi_2(r, \dot{\theta}) &= M_0r\dot{\theta}^2, \\ u' &= \frac{u'' + M_0g\dot{\theta}^2 \sin \theta}{M_0g \cos \theta} \end{aligned}$$

連続微分可能なボール位置の目標軌道  $r_f(t)$  に対して、近似的な追従制御は次式となる。

$$\begin{aligned} u'' &= r_f^{(4)} + \alpha_3(r_f^{(3)} - \xi_4) + \alpha_2(\ddot{r}_f - \xi_3) \\ &\quad + \alpha_1(\dot{r}_f - \xi_2) + \alpha_0(r_f - \xi_1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

ここで、 $r_f^{(i)}$  は  $r_f$  の  $t$  に関する  $i$  回微分である ( $r_f$  が飽和した場合、これらの微分は 0 とした).  $\alpha_i$  は任意のフィードバックゲインで、 $\psi_2(r, \dot{\theta}) = 0$  と近似した場合の (3.30) 式の極が安定となるよう選ぶ.

**注意 2** Hauser らの方法は駆動系を事前に安定化しないため、 $\theta$  の制約を直接考慮することはできない.

### [Teel の飽和制御の設計法<sup>30)</sup>]

座標変換

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = S_u z_u, \quad S_u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

を用いて、(3.14) 式を次式に変換する.

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (3.33)$$

(3.7) 式の入力制約のもと、(3.33) 式の系を漸近安定化する制御則は以下となる.

$$\begin{aligned} v(t) &= -\text{sat}(w_2(t) + \text{sat}(w_1(t), a_2), a_1) \\ &0 < a_2 < \frac{1}{2}a_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

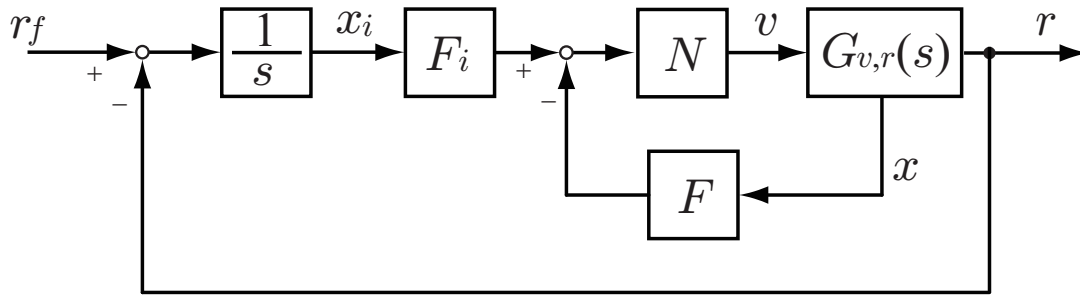
**注意 3** 同様の問題を扱った Sussmann らの方法<sup>29)</sup> は (3.34) 式の  $a_2$  の範囲が  $0 < a_2 \leq (2 - \sqrt{3})a_1$  であり、Teel の方法より保守的な条件を持つ. また、Teel の方法と Sussmann らの方法は、いずれも平衡点近くで制御系の極を  $\{-1, -1\}$  に配置する線形状態フィードバック制御となる.

### [IP 型制御系の設計法]

Fig. 3.3 の制御系に対し、ボール目標位置  $r_f(t)$  とボールの位置  $r(t)$  の偏差を積分する形で積分器を追加した Fig. 4.1 の IP 型制御系を考える.

追加した積分器の出力を  $x_i$  とすると、次式を得る.

$$\dot{x}_i = r_f - r = r_f - Cx \quad (3.35)$$



**Fig. 3.8:** Block diagram of the IP-type control system

$x$  と  $x_i$  を併合した状態を

$$x_a = \left[ r \quad \dot{r} \quad \theta \quad u_1 \mid x_i \right]' \quad (3.36)$$

と定義すると,  $x_a$  に関する状態方程式は次式となる.

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a v \quad (3.37)$$

ただし

$$A_a = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \\ 0 \end{array} \right]$$

制御則は以下となる.

$$v = \text{sat}(-F_a x_a, a_1) \quad (3.38)$$

$F_a$  は任意の安定化フィードバックゲインである.



**注意 4** ここで示した IP 型制御系において、入力飽和が発生した場合の安定性は保証されない。

### 3.4.1 IMC 制御系を用いない場合の制御応答

Hauser らの方法, Teel の方法, 提案法 (IMC なし) を用いたシミュレーションおよび実験結果を以下に示す。共通部分として,  $a = 0.05[\text{rad}]$  とし, オブザーバゲイン  $K_b$  は  $A_{11} - K_b C_b$  の固有値が  $\{-5, -5\}$  となるように設計した。

Hauser らの方法では, フィードバックゲイン  $\alpha_i$  は制御系の極を  $\{-\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -3, -3\} = \{-5, -5, -3, -3\}$  に配置するよう選んだ。すなわち  $[\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_0] = [16 \ 94 \ 240 \ 225]$  とした。Teel の方法の設計パラメータは,  $T = 0.2[\text{s}]$ ,  $a_2 = a_1/2 - 10^{-6} = 0.025 - 10^{-6}$  とした。提案法 (IMC なし) の設計パラメータは,  $T = 0.2[\text{s}]$ ,  $v_{max} = 0.1[\text{m/s}]$ ,  $f_0 = a/v'_{max} = 3.51$ ,  $f_1 = 3$  とした。

各方法を用いた目標値応答と出力外乱応答を Fig. 3.9-3.11 に示す。グラフ中の実線が実験結果, 破線がシミュレーション結果, 一点鎖線が目標値  $r_f(t)$  を示している。また, 出力外乱応答は  $r_f(t) = 0$  とし, ボール位置の計測値に作用する加法外乱  $d$  を,  $r = r_{measure} + d$  とプログラム上で与えた場合の応答である。外乱  $d$  は次式で与えた。

$$d = a_d \text{sgn}(\sin \omega t)[\text{m}], \quad \omega = 0.2[\text{rad/s}] \quad (3.39)$$

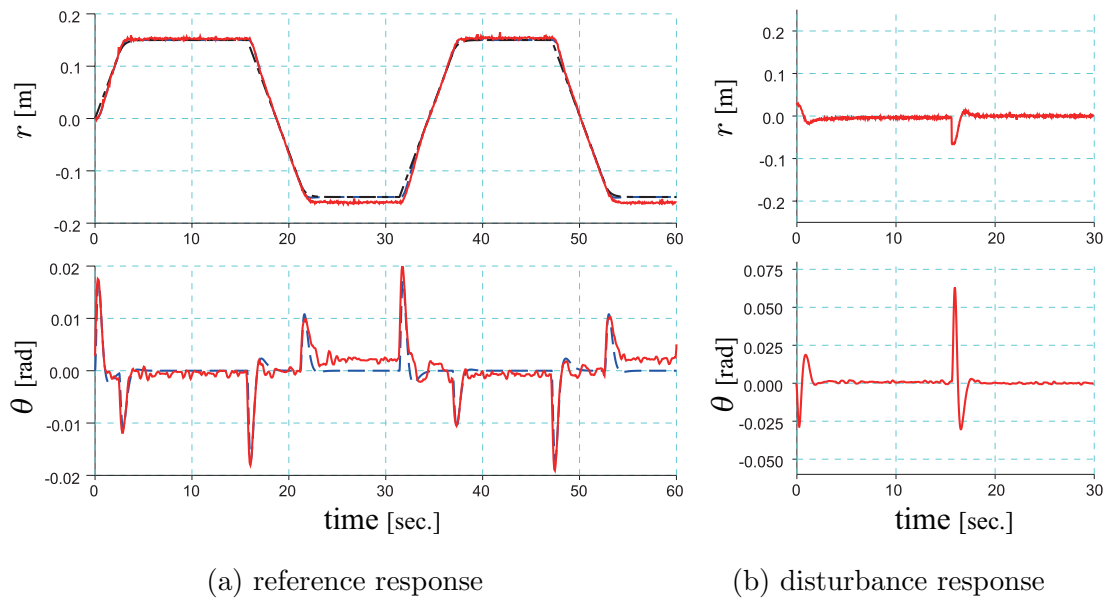
提案法および Teel の方法では  $a_d = 0.1[\text{m}]$  として実験を行ったが, Hauser らの方法では, 同条件ではビーム角の可動域を大きく逸脱してしまうため,  $a_d = 0.03[\text{m}]$  の場合の実験結果を示している。

Hauser らの方法は制御則の構造上  $\theta$  の振幅制約を考慮できないため, 外乱の作用により容易に制約を超過してしまうが, 目標値  $r_f$  の微分値を利用するサーボ構造により  $r_f$  に対する追従特性は  $r_f$  の微分が 0 でない区間で, ほかの 2 つの方法に比べ優れた結果が得られた。ただし, コントローラに積分器を持たないため, Fig. 3.9-a の実験結果のボール位置  $r$  の応答の 30 秒付近では, 目標値に対して約  $0.01[\text{m}]$  程度の定常偏差が残っている。この定常偏差は 3 つの制御法を用いた実験で共通

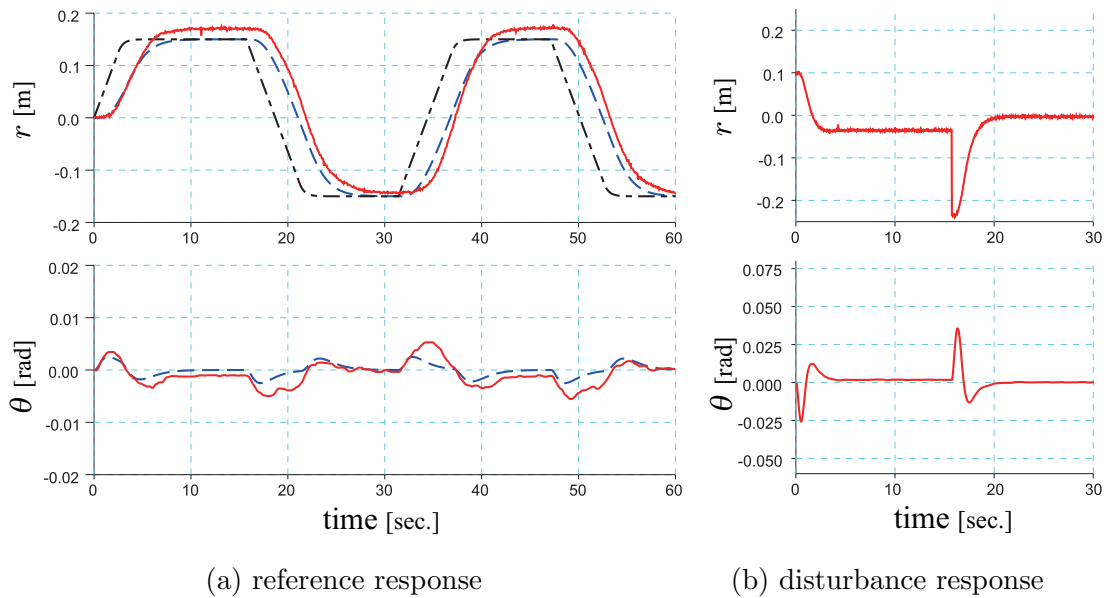
してみられ，平衡点付近でボールとビームの摩擦によりボールが静止したものと考えられる．

Teelの方法では $\theta$ の振幅制約を考慮できるため，外乱応答においても制約は満たされ，不安定化することもないが，フィードバックゲインに相当する調整パラメータを持たず，目標値追従特性や定常特性の調整ができない．今回の実験では，応答速度もほかの2つの方法に比べ遅く，Fig. 3.10-aの実験結果のボール位置の定常偏差も15秒付近で約0.02[m]と比較的大きな結果となった．

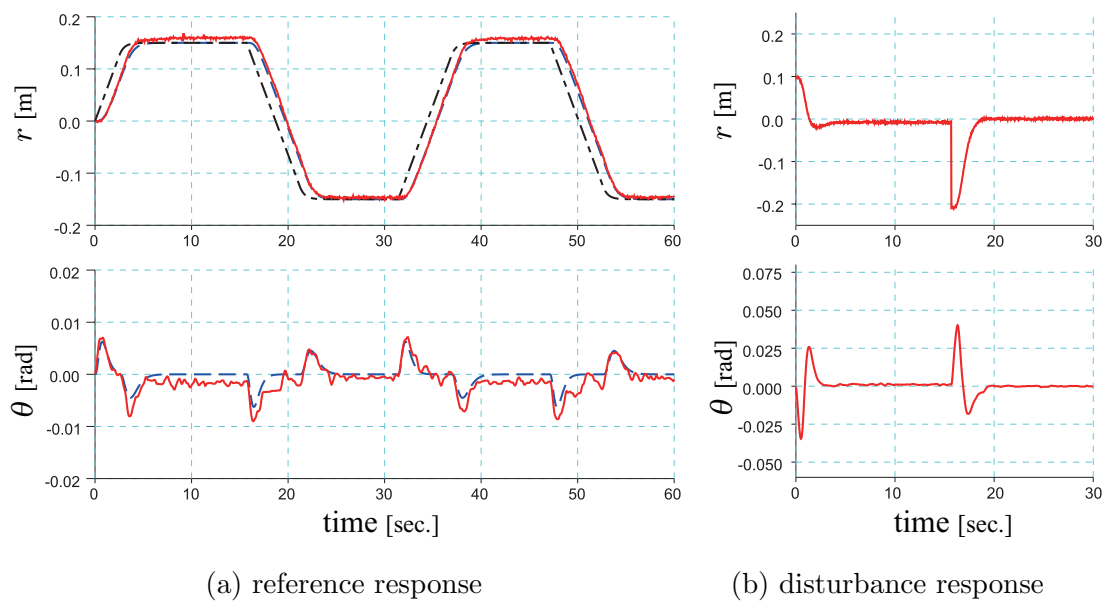
提案法はTeelの方法に似た入れ子形飽和制御則で調整可能なゲインパラメータを持つため， $\theta$ の制約を陽に考慮しながら応答性能の改善が可能である．平衡点付近では単なる線形状態フィードバック制御と一致するため，Fig. 3.11-aの実験結果のボール位置の応答波形では約0.01[m]の定常偏差が生じたが，Hauserらの方法と同程度に抑えられている．



**Fig. 3.9:** Simulation and experimental results using Hauser's method



**Fig. 3.10:** Simulation and experimental results using Teel's method



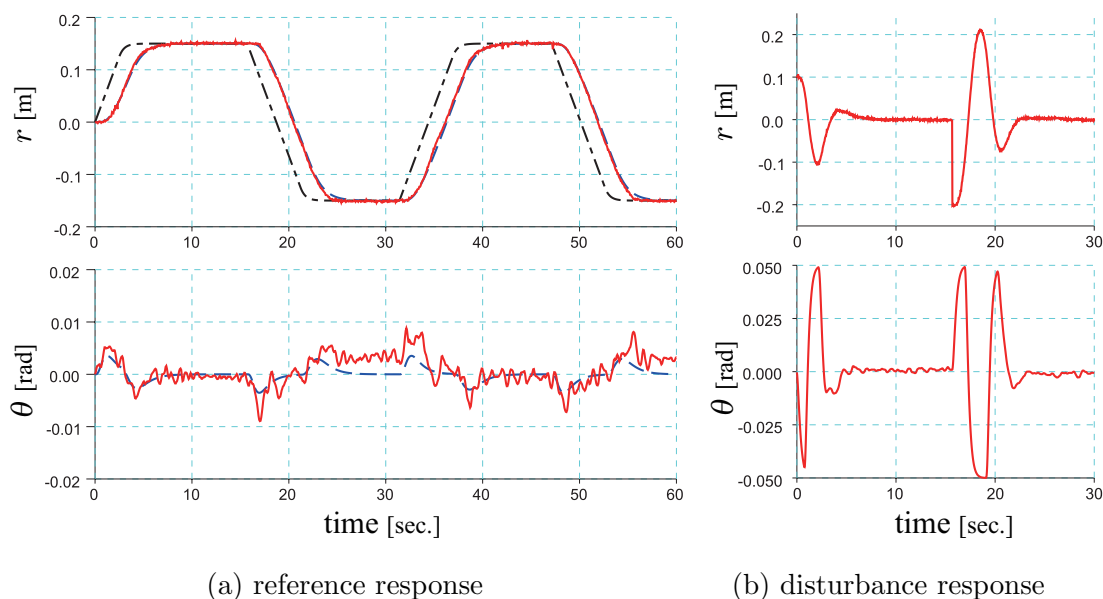
**Fig. 3.11:** Simulation and experimental results using the proposed method

### 3.4.2 IMC 制御系を用いる場合の制御応答 (IP 型制御系との比較)

前節の実験ではボール位置に定常偏差が残った。提案法では定常偏差を改善するため、誤差飽和型 IMC 制御系を導入した。同じく定常偏差に対して改善効果を持つ IP 型制御系を比較対象とし、それぞれの方法を用いたシミュレーションおよび実験

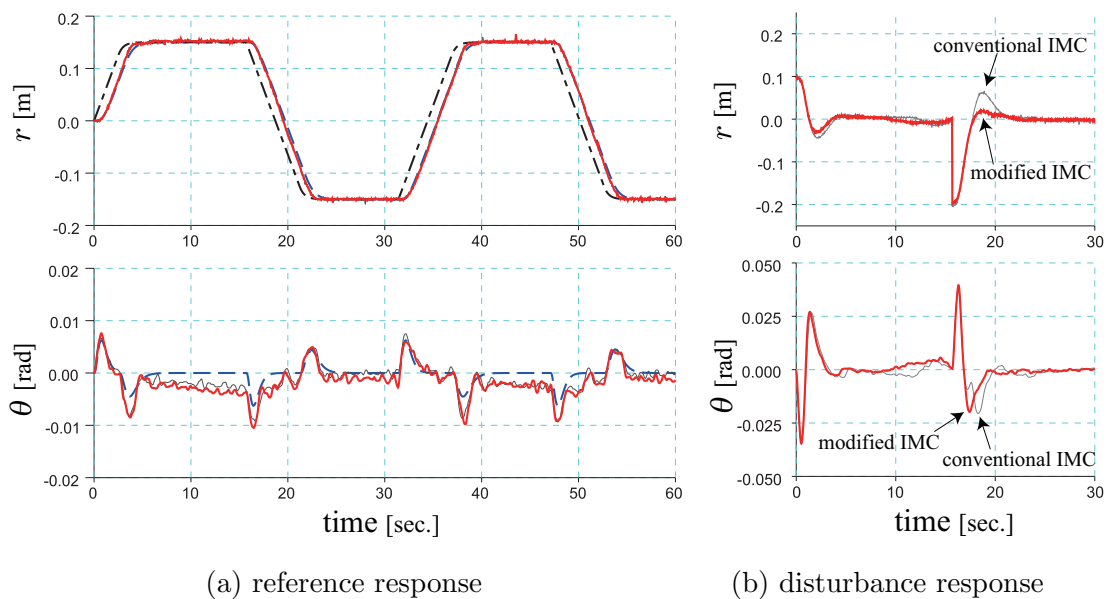
結果を以下に示す. 共通部分の設計は前節と同様とした. IP型制御系のフィードバックゲイン  $F_a$  は制御系の極を  $\{-\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -4, -4, -1\} = \{-5, -5, -4, -4, -1\}$  に配置するよう選んだ. すなわち  $F_a = [4.338 \ 2.745 \ 0.960 \ 0.360 \ -2.283]$  とした. 提案法の設計パラメータは前節と同様であり, Fig. 3.5 のIMC構造において, IMCコントローラ  $C_0(s)$  を入出力をそれぞれ,  $e, x_f$  とした Fig. 3.7 のブロック線図で設計し, Fig. 3.5 の目標軌道は直接  $r_f = r_o$  とした.

IP型制御系と誤差飽和型IMC制御を用いた提案法について, 目標値応答と出力外乱応答を Fig. 3.12, 3.13 に示す. ここで, 各実験条件は前節と同様とし, 外乱の振幅は  $a_d = 0.1[\text{m}]$  とした. Fig. 3.13 の誤差飽和型IMC制御を用いた提案法の結果では, 参考のため, 誤差を飽和させない通常のIMC制御 (Fig. 3.4) を用いた提案法の実験結果を細線で示している.



**Fig. 3.12:** Simulation and experimental results using the IP-type controller

IP型制御系では積分器の効果により, Fig. 3.12-a の実験におけるボール位置の定常偏差は  $0.002[\text{m}]$  以下に抑えられており, ボール静止後にもわずかに残った偏差を改善するためビーム角が摂動していることがわかる. また, 積分器を含めたすべての制御系の極を任意に配置できるため, Teel らの方法に比べて応答は早い, 追加した積分器の零極の実部を負の方向に大きく配置した別の実験では, ロ



**Fig. 3.13:** Simulation and experimental results using the proposed method with the modified IMC structure

バスタビリティ低下のため駆動部にチャタリングが生じやすくなった。このため、追加した積分器の零極はあまり左に配置できず、提案法に比べればやや応答は遅くなる。また、本設計では制約のため入力を無理やり飽和させているため、安定性は保証されない。このため、外乱応答においては $\theta$ の上下限を行き来するような大きなハンチングが表れている。別途実施したシミュレーションでは $a_d = 0.13[\text{m}]$ とした外乱応答で不安定化が確認された。

提案法では、IP型制御系と同様に、Fig. 3.13-aの実験におけるボール位置の定常偏差が $0.002[\text{m}]$ 以下に抑えられ、かつ、Fig. 3.11-aのIMC制御系を持たない提案法と同等の応答速度を達成している。この効用はIMC構造によるものであるため、目標値応答においては通常のIMC制御でもほぼ変わらない応答が得られている。しかし、外乱応答においては、内部モデルには入らない出力のステップ外乱が直接フィードバックされてしまうため、Fig. 3.13-bのボール位置の応答波形において、20秒付近にハンチングがみられる。誤差飽和型IMC制御系の応答では、このステップ外乱の値を飽和により抑えてフィードバックするため、通常のIMC制御系を使用した場合に比べ、ハンチングが小さくなる。

## 3.5 おわりに

ビーム角に制限があるボールビーム系の安定化制御問題について、制約のもとで線形化モデルの大域的漸近安定化を実現する入れ子形飽和制御則と誤差飽和型 IMC 構造を用いる制御系の設計法を提案し、シミュレーションおよび実験によって提案法の有効性を確認した。

提案法は Teel らの飽和制御則に似た制御構造を持つが、ゲインが調整可能なため、応答特性の改善が可能であるというメリットをもつ。パラメータ  $f_1$  を大きくすれば、線形の範囲で制御系の速応性が向上するが、ノイズやモデル誤差に弱くなる。 $f_0$  についても、 $f_1$  と同様のことが言え、 $v_{max}$  を大きく設定しすぎると応答速度が遅くなる。

提案法を用いた制御則は、ビームが水平となりボールが等速運動する制御モードがある。このモードにおけるボールの速度は1つの制御極により指定でき、ほぼその速度以下でボール搬送が行われるという特徴がある。また、ビームの角速度についても、入力制約によって一定値以下に保たれることが、ビーム角と同様の方法で証明できる。すなわち、 $|\theta|, |\dot{\theta}|$  を小さく保つよう設計でき、意図的に線形化誤差の影響を抑えた設計も可能である。

本章で提案した誤差飽和型 IMC 構造による積分特性の導入は、飽和制御系の目標値応答や外乱応答に対して、定常特性を改善し、かつリセットウィンドアップ現象を抑制する有効な方法である。ただし、外乱が測定または推定できる場合、それを IMC の内部モデルにも適用すれば、通常の IMC 制御でも外乱応答を改善できる可能性がある<sup>35)</sup>。

また、誤差飽和型 IMC 制御系を用いた場合の安定性については、プラントと内部モデルが全く同じである場合に完全なフィードフォワードコントローラになることしか言えず、誤差飽和量  $e_{max}$  は試行錯誤的に調整することとなる。

# 4. ビーム角の制限を考慮したボール ビーム系の安定化問題に対する制 御器設計法の一般化とむだ時間系 を含んだ拡張

## 4.1 はじめに

3章ではビーム角の制限を考慮したボールビーム系の安定化問題に対する飽和制御則の設計法の実例を示したが、設計法の中で用いたモード分解法は、安定な非最小位相系との直列結合を追加したより広い制御対象についても、同様の入力制約付き二重積分器の安定化問題に定式化できる。本章で検討される具体例は、出力むだ時間の追加である。本章の内容は、*58th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan* (2019) での報告<sup>23)</sup>を引用している。

まず、線形化したボールビーム系の伝達関数を  $G_F(s)G_b(s)G_a(s)$  とする。 $G_F(s)$  は既安定化された駆動系であり、緩和フィルタ<sup>21)</sup>の役割を持つ。 $G_a(s)$  はむだ時間や非最小位相要素がある場合も扱えるように追加した全域通過関数である。 $G_b(s)$  はボールの運動モードを表す二重積分器である。そして、モード分解法<sup>22),24),25)</sup>により、 $G_b(s)$  に対する部分系を分離した状態方程式を求め、この部分系を大域的に漸近安定化する飽和制御則を導く。状態は、 $G_a(s)$  に対応する部分系の極を不変とするオブザーバを用いて推定する。また、このように設計されたレギュレー

タ・オブザーバが、ある IMC 構造を持つコントローラとなることを示す。ちなみに、文献<sup>26)</sup>でこのような  $G_a(s)$  の動特性を変えないレギュレータとオブザーバの設計で、オブザーバ・状態予測器構造<sup>27),28)</sup>を持つミス補償型のコントローラが得られることが示されている。

また、以上の設計された飽和制御則は、3章と同様に積分特性を持たないので、そのままでは、外乱やモデル誤差により、ボールの位置に定常偏差が残る。この問題についても、同様に IMC 制御系を使用して定常特性を改善できる。

本章は次のように構成される。第2節では、制御対象を有理のインナー関数を含む線形系としてモデル化し、問題を状態制約問題として記述する。第3節では、問題をボールの運動モードを表す不安定部分系に対する入力制約問題に単純化し、系を大域漸近安定化する飽和制御則を求める。また、コントローラがある IMC 構造を持つことを示す。第4節では、目標値と外乱応答に対するシミュレーションおよび実験結果を示す。また、むだ時間がある場合の実験結果も示す。第5節では、結言を述べる。

## 4.2 制御対象の数学モデルと問題の記述

ボールビーム系の運動方程式を再掲する。

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + M\right) \ddot{r} - Mg \sin \theta - Mr\dot{\theta}^2 = 0 \quad (*3.1)$$

アクチュエータの入力  $v$  から  $\theta$  までが厳密にプロパーで安定な伝達関数  $G_F(s)$  を持つように補償されているとする。  $G_F(s)$  は十分な速応性を持ち、その動特性は改善する必要がないとする。

$\theta$ ,  $\dot{\theta}$  は十分小さいとして、(3.1) 式を線形化し、

$$M_0 = \frac{M}{\frac{J_b}{R^2} + M} = \frac{5}{7}$$

とおくと次式を得る。

$$\ddot{r} = M_0 g \theta \quad (*3.3)$$



制御対象の出力  $y$  は、むだ時間系等も考慮できるように、次式で与えられるとする。

$$y(s) = G_a(s)r(s) \quad (4.1)$$

$G_a(s)$  は有理なインナー関数であり、 $G_a(0) = 1$  とする。  $\theta$  から  $r$  までの伝達関数を  $G_b(s)$  とし、  $\theta$  から  $y$  までの伝達関数を  $G_P(s)$  とする。 すなわち

$$\frac{y(s)}{\theta(s)} = G_P(s) = G_a(s)G_b(s) = G_b(s)G_a(s) \quad (4.2)$$

(3.3) 式から

$$G_b(s) = \frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{M_0g}{s^2} \quad (4.3)$$

また、  $v$  から  $y$  までの伝達関数を  $G(s)$  で表す。 すなわち、  $G(s) = G_P(s)G_F(s)$  である。 以上から、 Fig.4.1 のブロック線図を得る。  $G(s)$  には極零消去がないとする。 また、  $G(s)$  は原点に零点を持たないとする。 さらに、  $\theta$ 、  $y$  および、  $G_F(s)$  の状態  $x_3$  は入手可能とする。

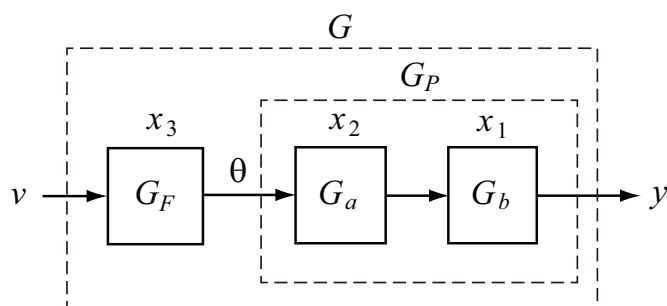


Fig. 4.1: Block diagram of the compensated system.

$\theta$  には次の制約があるとする。  $a$  は与えられる正の定数である。

$$|\theta(t)| \leq a, \quad \forall t \geq 0 \quad (*3.6)$$

問題は、系の安定平衡点から、(3.6) 式の制限内で、ボールを目標位置  $r_f$  まで移動し、そこで系を漸近安定化させる制御則を求めることである。一般性を失うことなく、 $r_f = 0$  とする。

## 4.3 設計法

### 4.3.1 入力制約問題への変換

Fig.4.1 の系を次の状態方程式で表す.

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad y = Cx \quad (4.4)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = B_{P1}C_F, \quad A_{23} = B_{P2}C_F$$

ここで,  $G_P(s)$  と  $G_F(s)$  の実現をそれぞれ次式とした.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{P1} \\ B_{P2} \end{bmatrix} \theta$$
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$\dot{x}_3 = A_{33}x_3 + B_3v, \quad \theta = C_Fx_3$$

(3.6) 式の条件は次の二つの条件が成立すれば満たされる<sup>2)</sup>.

$$|v(t)| \leq a_1, \quad \forall t \geq 0 \quad (*3.7)$$

$$x_3(0) \in \mathcal{R} \quad (4.5)$$

ここで,

$$a_1 = \frac{a}{\|G_F(s)\|_1}$$

であり,  $\mathcal{R}$  は  $x_3(0) = 0$  から, (3.7) 式を満たす  $v$  によって到達可能な  $x_3(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  すべての集合である.  $\|G_F(s)\|_1$  は  $G_F(s)$  の 1 ノルムである.

よって, 問題の解は, 次のより簡単な入力制約問題を解くことによって得られる. 「(4.4) 式の系に対して, (3.7) 式の条件の下で, 状態  $x$  を 0 に近づける安定化制御則を求めよ.」

### 4.3.2 部分状態フィードバック制御による安定化

座標変換によって, (4.4) 式を  $A_{11}$  の固有値を持つ不安定な部分系と  $A_{22}$  と  $A_{33}$  の固有値を持つ安定な部分系に分離し, 4.3.1 節の問題を不安定な部分系を入力  $v$  の振幅制限下で安定化するというさらに簡単な問題に変換して解く.

$x$  に対して次の座標変換を適用する.

$$z = Sx \quad (4.6)$$

$$S = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

ここで,  $X$  は次のシルベスター方程式の解である.

$$-A_{11}X + X \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

$A_{11}$  と  $\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}$  は共通の固有値を持たないので, (4.8) 式は一意に解ける<sup>34)</sup>.

このとき, (4.4) 式は次のように変換される.

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}v, \quad y = \tilde{C}z \quad (4.9)$$

ただし

$$\tilde{A} = SAS^{-1} = \left[ \begin{array}{c|cc} A_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{array} \right]$$

$$\tilde{B} = SB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CS^{-1} \left[ C_1 \mid \tilde{C}_2 \quad \tilde{C}_3 \right]$$

$\tilde{A}$  の分割に合わせて  $z$  を次のように分割する.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_s \end{bmatrix}$$

すなわち、上記の座標変換によって、系は次の二つの部分系に分離された。

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + \tilde{B}_1v \quad (4.10)$$

$$\dot{z}_s = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix} z_s + \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} v \quad (4.11)$$

$z_1$  部分系は不安定であり、 $z_s$  部分系は漸近安定である。よって、 $|v| \leq a_1$  の下で  $z_1$  部分系を漸近安定化する制御則は系全体を漸近安定化する。さらに、(3.7) 式の条件が成立すれば、制御則は制限条件 (3.6) 式を満たす。よって、この制御則は元の問題の解となる。

4.3.1 節の入力制約問題は低次元化されさらに簡単化された。「(4.10) 式の系に対して、(3.7) 式の条件の下で、状態  $z_1$  を 0 に近づける安定化制御則を求めよ。」

この問題に対して、次節の飽和制御則  $v = f(z_1)$  を適用する。

実際には、 $z_1$  は計測できないので、 $G_P(s)$  に対する次式のオブザーバを利用して推定する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{P1} \\ B_{P2} \end{bmatrix} \theta \\ &+ \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} (y - \hat{y}), \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

ただし、 $K_1$  は  $A_{11} - K_1C_1$  を安定行列とするオブザーバゲインである。(4.6) 式から、 $z_1$  の推定  $\hat{z}_1$  は次式で計算される。

$$\hat{z}_1 = \begin{bmatrix} I & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  がコントローラの状態である。

$z_1$  部分系の動特性のみを変える制御則に加え、 $A_{11}$  のみの固有値を変えるオブザーバによって、次節で示すように、IMC 構造を持つコントローラが得られる。

### 4.3.3 コントローラのIMC構造

コントローラの状態方程式は次式となる.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + Bv + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (y - \hat{y}) \quad (4.14)$$

$$\hat{y} = C \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

上式を  $S$  によって座標変換すると次式となる.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (y - \hat{y}) \quad (4.16)$$

$$\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 \quad (4.17)$$

ただし

$$\hat{y}_1 = C_1 \hat{z}_1, \quad \hat{y}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(4.16), (4.17) 式から

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A_c & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (y - \hat{y}_2) \quad (4.18)$$

ただし

$$A_c = A_{11} - K_1 C_1$$

$G(s) = G_P(s)G_F(s)$  は次式のように分解される.

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \quad (4.19)$$

ただし

$$G_1(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}\tilde{B}_1$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{C}_3 \end{bmatrix} \left( sI - \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

これらの関係から, Fig.4.2のブロック線図を得る. 図中において,  $H(s) = (sI - A_c)^{-1}$  である.

ブロック線図から, 制御系はコントローラからプラントの  $G_2(s)$  の部分が見えないIMC構造となっており,  $G_2(s)$  の部分の動特性を変えないことがわかる.

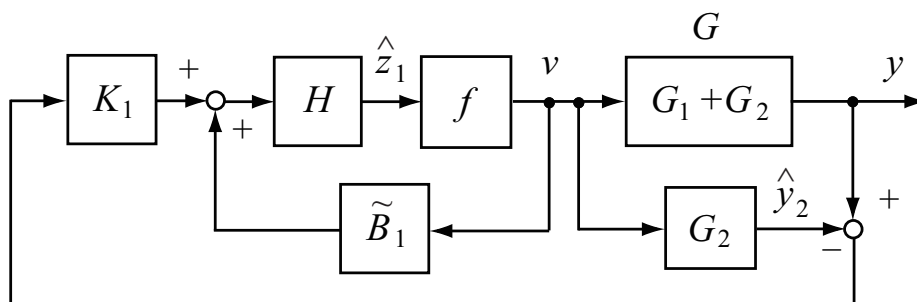


Fig. 4.2: Block diagram of the control system.

$r_f$  が 0 でない場合, 上記の飽和制御則を  $y$  が  $r_f$  に収束するように修正する.

$$v = f(\hat{z}_1, r_f) \quad (4.20)$$

**注意 5**  $G_a(s)$  がむだ時間要素  $e^{-Ls}$  ( $L$  は正の定数) を含む場合, むだ時間要素を有理関数近似 (パデ近似など) すれば上記の設計法を適用できる.

#### 4.3.4 $z_1$ 部分系に対する飽和制御則

$z_1$  部分系に座標変換

$$z_u = S_2 z_1 \quad (4.21)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_{11} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.22)$$

を適用すると次式となる.

$$\dot{z}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad |v| \leq a_1 \quad (4.23)$$

(4.21) 式は (3.14) 式に一致するため, 以降は 3.3.2 節から 3.3.5 節までの入れ子状飽和制御と誤差飽和型 IMC 制御系を適用すればよい.

### 4.4 シミュレーションと実験結果

実験装置の概観を Fig.4.3 に示す. ビームは中央で回転支持されたアルミチャンネル (溝の幅 18 mm, 長さ 700 mm) で, ボールはプラスチック球 (直径 38 mm, 重量 52.7 g) である. ビームは RC サーボ (双葉電子工業 スタンダードサーボ S3010) で駆動され, ビーム角およびボールの位置はそれぞれポテンシオメータ (緑測器 無接触形回転角度センサ CP-2UN), 赤外線距離センサ (シャープ GP2Y0A21YK) で計測した. コントローラとしてマイコンボード Arduino Due を用いた. サンプル周期は 10ms である.

予め駆動系を  $G_F = \frac{1}{Ts+1}$ ,  $T = 0.2$  s と補償した. 目標値を  $r_f = 0.2$  m と与え, ビーム角の最大振幅を  $a = 0.02$  rad とした.  $v_{max} = 0.04$  m/s に対して  $f_0 = 3.502$  となった. また,  $f_1 = 1.2$  と与えた. オブザーバゲイン  $K_1$  は  $A_{11} - K_1 C_1$  の極が  $\{-10, -10\}$  となるように設計した. IMC フィルタは, センサノイズ等に対して適度なフィルタ効果を持ち, (3.26) 式を満たすように  $C_0(s) = \frac{1}{0.2s+1}$  と与えた.  $G_a(s) = e^{-Ls}$  とし,  $r$  の計測に  $L = 0.2$  s の遅れがあると想定し, マイコンボード上にむだ時間を実装した. 設計では,  $e^{-Ls}$  の代わりにその 3 次パデ近似を用いた.

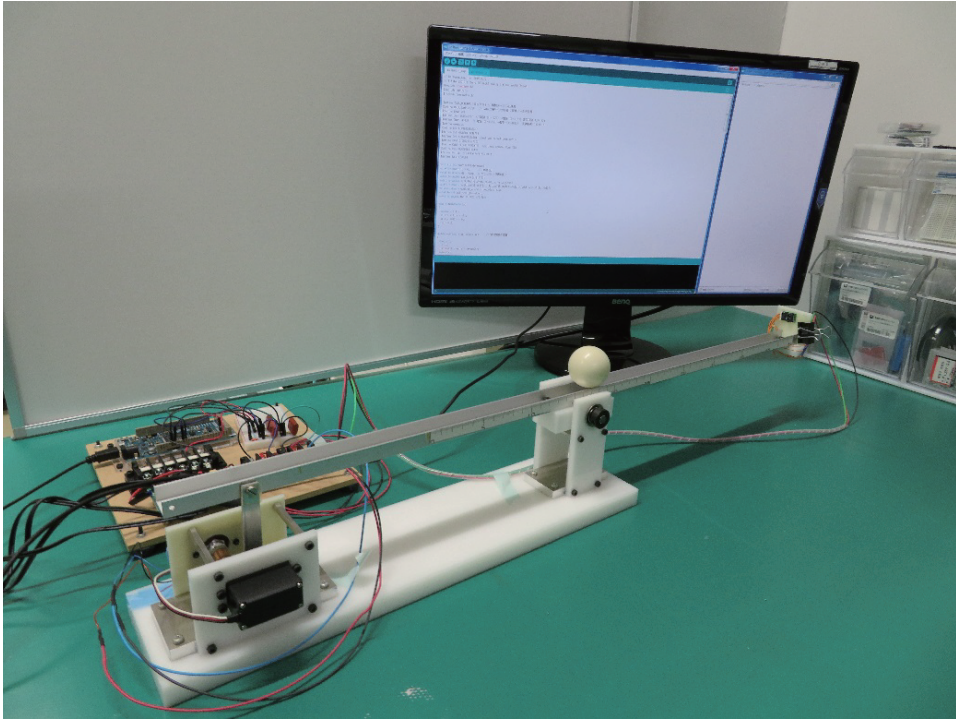


Fig. 4.3: View of the experimental system.

シミュレーションと実験結果を Fig.4.4 に示す. 比較のため, むだ時間が存在するが設計では考慮しなかった場合のシミュレーション結果も示す. むだ時間を考慮した制御系においても, IMC 制御系が有効に働き,  $r$  の定常偏差を改善するよう  $\theta$  が動いている. むだ時間を考慮しなかった設計の応答波形は, 発散的に振動しており, 不安定化が確認できる. この振動の程度は時数を下げるか, 同じ次数でむだ時間を長くするにつれて, むだ時間の近似精度が悪くなるため, 制御系の応答がより振動的になった. また, むだ時間がないとして (すなわち  $G_a(s) = 1$ ) 設計を行った場合の別の実験では, むだ時間の有無による応答の変化はほぼ  $L$  時間がずれただけであったため, 提案法によってむだ時間が良好に補償されていることがわかる.



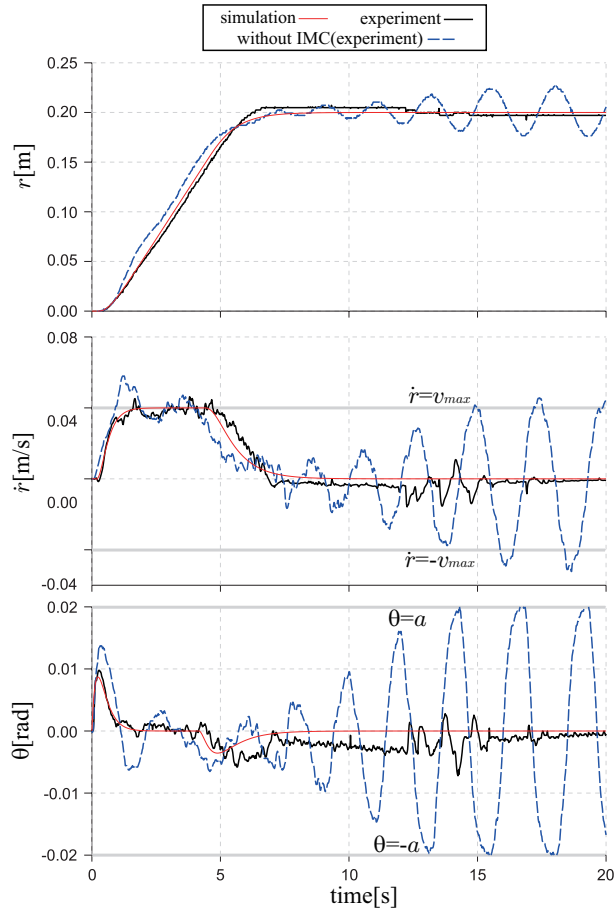


Fig. 4.4: Experimental results for a dead-time process.

## 4.5 おわりに

3章で示したビーム角の制限を考慮したボールビーム系の安定化問題に対する飽和制御則の設計法について、安定な非最小位相系の直列結合を含んだより広いクラスの制御問題へと拡張した設計法を示した。同設計法で設計された制御則のオブザーバ・状態予測器構造は、あるIMC構造を持つコントローラに一致することを示した。

提案法を用いた実験では、無視すれば不安定化を招くむだ時間の存在下でも、 $\theta$ の制約を満たしつつボールを所定の位置への搬送を実現し、提案法の有効性を確認した。

## 5. 結論

本論文では、アクチュエータの移動幅に制約を考慮した不安定制御系に対して、2つの入力飽和制御を用いた安定化制御系の設計手法を提案し、制御工学上のベンチマーク問題として知られている、倒立振り子系とボールビーム系を例に具体的な設計法と実験結果を示した。

提案する設計法は、まず、制御対象の数学モデルから第一原理計算で得られた非線形微分方程式について、駆動系を任意の方法で事前安定化し、任意の制御平衡点まわりでオイラー近似して線形化された系の状態方程式を得る。次に、得られた状態方程式の入力からアクチュエータ振幅までの伝達関数関係を用いて、状態制約を入力制約に変換する。次に、モード分解法を用いて、状態方程式から不安定極のみをもつより低次元な不安定部分系を分離し、状態制約を考慮した全体系の安定化問題を、より簡単な入力制約を考慮した縮退部分系の安定化問題に定式化する。この問題の解は、上記の入力制約を扱った線形系の安定性解析によって得られる。

倒立振り子系に対しては、駆動台車の振幅制約を考慮した安定化問題について、飽和関数を用いた線形フィードバック制御則を提案し、提案法によって導かれる制御則を倒立振り子の線形化モデルに用いた場合の安定化できる初期値の集合である、吸引領域を示した。提案法は、駆動系の時定数を0に近づけることで、Linらと同等の最大吸引領域が得られる。また、非線形モデルを用いたシミュレーションから、安定可能な初期値を網羅的に調べ、線形化誤差によって縮小される実際の非線形吸引領域を可視化した。この結果、提案法はパラメータの変化に伴って非線形吸引領域の内部に不安定となる穴の領域が生じるが、この穴の領域が生じない限界のパラメータ設計を用いることで、Linらの方法に比べてより広い吸引領域を

持ちながらより早い制御応答が実現できることを明らかにした。提案法は Lin らの制御則に比べて吸引領域を小さくせずに制御ゲインを調整できる範囲が広いいため、振子角度の計測誤差や固有振動数のモデル誤差に対してよりロバストな制御則が得られる。また、シミュレーションによって得た非線形吸引領域は、提案法と振り上げ制御則を組み合わせて振り上げ安定化制御を実現する場合に、振り上げ制御から安定化制御に切り替えるための切り替え基準の決定指針に利用できる。

ボールビーム系に対しては、ビーム角の制約を考慮した安定化問題について、制約のもとで線形化モデルの大域的漸近安定化を実現する入れ子形飽和制御則と誤差飽和型 IMC 構造を用いる制御系の設計法を提案し、シミュレーションおよび実験によって提案法の有効性を確認した。提案法は Teel らの飽和制御則に似た制御構造を持つが、ゲインが調整可能なため、応答特性の改善が可能であるというメリットをもつ。また、提案法を用いた制御則は、ビームが水平となりボールが等速運動する制御モードがある。このモードにおけるボールの速度は 1 つの制御極により指定でき、ほぼその速度以下でボール搬送が行われるという特徴がある。加えて、ビームの角速度についても、入力制約によって一定値以下に保たれることが、ビーム角と同様の方法で証明できる。すなわち、 $|\theta|, |\dot{\theta}|$  を小さく保つよう設計でき、意図的に線形化誤差の影響を抑えた設計も可能である。本章で提案した誤差飽和型 IMC 構造による積分特性の導入は、飽和制御系の目標値応答や外乱応答に対して、定常特性を改善し、かつリセットウィンドアップ現象を抑制する有効な方法である。ただし、外乱が測定または推定できる場合、それを IMC の内部モデルにも適用すれば、通常の IMC 制御でも外乱応答を改善できる可能性がある<sup>35)</sup>。また、誤差飽和型 IMC 制御系を用いた場合の安定性については、プラントと内部モデルが全く同じである場合に完全なフィードフォワードコントローラになることしか言えず、誤差飽和量  $e_{max}$  は試行錯誤的に調整することとなる。

また、ビーム角の制約を考慮したボールビーム系の安定化問題に適用された上記の入れ子形飽和制御則の設計法について、安定な非最小位相系の直列結合を含んだより広いクラスの制御問題へと拡張した設計法を示した。同設計法で設計された制御則のオブザーバ・状態予測器構造は、IMC 構造を持つコントローラに一

致する特徴を持つ。また、提案法を用いた実験では、無視すれば不安定化を招くむだ時間の存在下でも、 $\theta$ の制約を満たしつつボールを所定の位置への搬送を実現し、提案法の有効性を確認した。4章の定式化により得られた設計法は、系の極に複数の重複しない実部が正の極と2つの零極とを持つ高次な制御対象に対して適用できる。

以上が本研究によって得られた結果である。

本論文では、モード分解法と入力制約変換のテクニックを用いて、状態制約問題の中でも特に難しい不安定ダイナミクスをもつ系の安定化問題を入力制約問題に定式化し、入力制約問題に対する安定性解析の知見を状態制約問題へと拡張した。一連の研究で得られた制御系の設計体系は、似た線形化モデル構造を持つ、船や自動車、航空機に代表される操舵系や液体タンクの水位制御系、可変ロープ長クレーンの制振制御系などの産業機械を安全な動作範囲で運用するための制御手法への応用が期待できる。

## 参考文献

- 1) Z. Lin, A. Saberi, M. Gutmann and Y.A. Shamash : Linear controller for an inverted pendulum having restricted travel: a high-and-low gain approach, *Automatica*, **32**-6, 933/937, 1996.
- 2) 吉田, 松本 : 支点移動幅の制限を考慮した並進型倒立振子の振り上げ制御, システム制御情報学会論文誌, **16**-8, 397/405, 2003.
- 3) K. Yoshida and I. Matsumoto : Stabilizing control for an inverted pendulum with restricted travel, *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 543/548, 2009.
- 4) Q. Wei, W. P. Dayawansa and W. S. Levine : Nonlinear controller for an inverted pendulum having restricted travel, *Automatica*, **31**-6, 841/850, 1995.
- 5) N. Sakamoto and A. J. van der Shaft : Analytical Approximation Methods for the Stabilizing Solution of the Hamilton-Jacobi Equation, *IEEE Trans. Automat. Control*, **53**-10, 2335/2350, 2008.
- 6) 藤本, 坂本 : 非線形最適制御による倒立振子の振り上げ安定化, 計測自動制御学会論文誌, **48**-7, 423/430, 2012.
- 7) 梅田, 坂本, 梅村 : 状態および入力ノルム制約を満足する非線形最適制御器の設計, 計測自動制御学会論文誌, **49**-3, 345/352, 2013.
- 8) A. R. Teel : Using saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems, *Proc. of the IFAC Nonlinear Control Systems Design*, 379/384, 1992.

- 9) A. R. Teel : Semi-global stabilization of the ‘ball beam’ using ‘output’ feedback, *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 2577/2581, 1993.
- 10) C. Aguilar-Ibanez, J. C. Martinez-Garcia, A. Soria-Lopez and Jose de Jesus Rubio : On the Stabilization of the Inverted-Cart Pendulum Using the Saturation Function Approach, *Mathematical Problems in Engineering*, **2011-856015**, 2011.
- 11) H. Kwakernaak and R. Sivan : *Linear Optimal Control Systems*, 4/6 Wiley-Interscience, 1972.
- 12) S. Skogestad and I. Postlethwaite : *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, 24/25, John Wiley & Sons Ltd, 2005.
- 13) J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum : *Feedback Control Theory*, 15/24, Macmillan Publishing Company, 1992.
- 14) T. Hu and Z. Lin : *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*, Birkhäuser, 2001.
- 15) H. K. Khalil : *Nonlinear Systems*, 126/128, Prentice Hall, 2002.
- 16) W. Yu and F. Ortiz, Stability analysis of PD regulation for ball and beam system, *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications*, pp.517-522, 2005.
- 17) E. L. Renk, H. J. Palanthandalam-Madapusi, and D. S. Bernstein, Linear and Hammerstein subspace identification of a human controlling a ball and beam using the Quanser engineering trainer haptic interface, *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications*, pp.1618-1623, 2005.
- 18) 吉田, 松本, 状態制限を考慮したボールビーム系の安定化制御, 第9回制御部門大会, WC3-2, 2009.

- 19) J. Hauser, S. Sastry and P. Kokotović, “Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 3, pp. 392–398, 1992.
- 20) J. Huang and W. J. Rugh, “An approximation method for the nonlinear servomechanism problem,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 9, pp. 1395–1398, 1992.
- 21) M. Tomizuka, D. M. Auslander, and Y. Takahashi, Simple finite-time settling control and manipulated-variable softening for reverse reaction, overshoot, and oscillatory processes, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 100, pp.50–58, March 1978.
- 22) W. M. Wonham, *Linear multivariable control: a geometric approach, 2nd edition*, Springer-Verlag, 1979.
- 23) D. Kinoshita, K. Yoshida, Stabilizing control for a ball and beam system considering the restricted beam angle and ball speed, *58th Annual Conference of SICE*, pp.170-176, 2019.
- 24) H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel, and M. Hautus, *Control theory for linear systems*, Springer-Verlag, 2001.
- 25) 木下, 吉田, 松本, 台車の振幅制限を考慮した倒立振子の安定化制御, 計測自動制御学会論文集, Vol. 53, No. 7, pp.408–415, 2017.
- 26) K. Hashikura, Y. Ohta, and A. Kojima, An internal state decomposition approach to a discrete-time  $H^2$  control problem with irrational input non-minimum phase property, *Systems & Control Letters*, Vol.60, pp.513–520, 2012.
- 27) L. Mirkin and N. Raskin, Every stabilizing dead-time controller has an observer-predictor-based structure, *Automatica*, Vol. 39, pp.1747–1754, 2003.

- 28) L. Mirkin, On the approximation of distributed-delay control laws, *Systems & Control Letters*, Vol. 51, pp.331-342, 2004.
- 29) H. J. Sussmann, E. D. Sontag, and Y. Yang, A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, pp.2411-2425, 1994.
- 30) A. R. Teel, Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded control, *Systems & Control Letters*, Vol. 18, pp.165-171, 1992.
- 31) M. Morari and E. Zafiriou, *Robust process control*, Prentice-Hall, Inc., pp.39-56, 1998.
- 32) A. Zheng, M. V. Kothare, M. Morari: Anti-windup design for internal model control, *International Journal of Control*, **60**, 1015/1024 (1994)
- 33) H. S. Black: Stabilized feedback amplifiers, *Bell System Technical Journal*, **13**, 1/18 (1934)
- 34) F.R. Gantmacher, *The theory of matrices Vol.I*, Chelsea Publishing Company, p.225, 1959.
- 35) 則次, 高岩, 外乱オブザーバを用いた空気圧位置決め制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, Vol.31, No.1, pp.82-88, 1995.
- 36) 木村, 中村, 伊吹, 三平, 状態制約を有する非線形システムに対する状態方程式を保持する変換—システム蘇生変換—, 計測自動制御学会論文集, Vol.53, No.6, pp.337-345, 2017.
- 37) L. Yuanlong and Z. Lin : *Stability and Performance of Control Systems with Actuator Saturation*, Birkhäuser, 2018.
- 38) 大塚, 非線形最適制御入門, コロナ社, 2011.



- 39) C. Barbu, R. Sepulchre, W. Lin, P. V. Kokotovic, Global asymptotic Stabilization of the Ball-Beam system, *Proceedings of the 36th Conf. on Decision and Control*, San Diego, California USA, 1997.

## 研究業績

### 学術誌掲載論文

1. 木下, 吉田, 松本, 台車の振幅制限を考慮した倒立振子の安定化制御, 計測自動制御学会論文集, Vol. 53, No. 7, pp.408–415, 2017.
2. 木下, 吉田, ビーム角の制限を考慮したボールビーム系の安定化制御, 計測自動制御学会論文集, 2020/10 投稿.

### 口頭発表論文

1. 木下, 吉田, 都築, ビーム角とボール速度の制限を考慮したボールビーム系の IMC 型搬送制御則, 第 25 回計測自動制御学会中国支部学術講演会, 2016.
2. 木下, 吉田, ビーム角とボール速度の制限を考慮したボールビーム系の安定化制御, 第 26 回計測自動制御学会中国支部学術講演会, 2017.
3. D. Kinoshita, K. Yoshida, Stabilizing control for a ball and beam system considering the restricted beam angle and ball speed, 58th Annual Conference of SICE, pp.170-176, 2019.

## 付録I 3.3.2節 定理1の証明

まず,  $z_u(0) \in \mathcal{S}_0$  とし,

$$V_0 := \frac{1}{2} z_{u,2}^2$$

を定義する.  $v$  の与え方から  $|v_0(0)| = a_1$ , すなわち,  $z_u(0) \in \partial\mathcal{S}_0$  のとき

$$\dot{V}_0 = z_{u,2} \dot{z}_{u,2} = z_{u,2} v \leq 0$$

となることから,  $|z_{u,2}(t)| \leq v'_{max}$ ,  $t \geq 0$ , すなわち,  $z_u(t) \in \mathcal{S}_0$ ,  $t \geq 0$  となるので,  $\mathcal{S}_0$  は正不変集合である. このとき,  $|v_0| \leq a_1$  となり,  $z_u \in \mathcal{S}_0$  に対して, (3.17) 式を (3.14) 式に代入した次式の表現が可能となる.

$$\dot{z}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -f_0 \end{bmatrix} z_u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{v}_1 \quad (\text{I.1})$$

$$\tilde{v}_1(t) = \alpha(t)v_1(t), \quad 0 \leq \alpha(t) \leq 1 \quad (\text{I.2})$$

この系に座標変換

$$\tilde{z}_u = \begin{bmatrix} \tilde{z}_{u,1} \\ \tilde{z}_{u,2} \end{bmatrix} = S_u z_u, \quad S_u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{f_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を適用すると次式を得る.

$$\dot{\tilde{z}}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -f_0 \end{bmatrix} \tilde{z}_u + \begin{bmatrix} \frac{1}{f_0} \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{v}_1 \quad (\text{I.3})$$

このとき,  $\tilde{z}_{u,2}$  ( $= z_{u,2}$ ) 部分系の固有値が  $-f_0 < 0$  であることから,  $\tilde{z}_{u,2}$  部分系は漸近安定である.

また

$$V_1 := \frac{1}{2} \tilde{z}_{u,1}^2$$

を定義する.  $V_1$  の時間微分は次式である.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \tilde{z}_{u,1} \dot{\tilde{z}}_{u,1} = \tilde{z}_{u,1} \frac{1}{f_0} \tilde{v}_1 \\ &= -\frac{1}{f_0} \alpha \tilde{z}_{u,1} \text{sat}(f_0 f_1 \tilde{z}_{u,1}, a_1) \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

$\tilde{z}_{u,1} = 0$  のとき  $\tilde{v}_1 = 0$  となり,  $\tilde{z}_{u,2} \rightarrow 0$  となる. よって, 系の状態は原点に近づく.  $\tilde{z}_{u,1} \neq 0$  のとき  $\alpha(t) \neq 0$  をつぎのように示せる.  $\alpha(t) \equiv 0$  は  $|v_0| = |-f_0 z_{u,2}| \equiv a_1$  のときに生じる. また, このとき,  $\tilde{v}_1 \equiv 0$  となり, (I.3) 式から

$$\dot{\tilde{z}}_{u,2} = -f_0 \tilde{z}_{u,2}$$

が成立する. このとき,  $\dot{V}_0 = z_{u,2} \dot{z}_{u,2} = -f_0 z_{u,2}^2 < 0$  となるが, これは  $|-f_0 z_{u,2}|^2 = f_0^2 z_{u,2}^2 \equiv a_1^2$  に反する. よって,  $\alpha \neq 0$  である. これから,  $\tilde{z}_{u,1} \rightarrow 0$ , すなわち,  $\tilde{v}_1(t) \rightarrow 0$  がわかり,  $\tilde{z}_{u,2}$  部分系は漸近安定なので, 有界で 0 に収束する  $\tilde{v}_1$  が入力されても  $\tilde{z}_{u,2} \rightarrow 0$  となる.

つぎに,  $z_u \notin \mathcal{S}_0$  とする. このとき,  $|v_0| > a_1$ ,  $|v_1| \leq a_1$  なので,  $v$  の符号は  $v_0$  の符号に等しくなる. よって

$$\dot{V}_0 = z_{u,2} v < 0 \quad (\text{I.5})$$

となり,  $z_u(t) \rightarrow \partial \mathcal{S}_0$  がわかる.  $z_u(t)$  は有限時間で  $\partial \mathcal{S}_0$  に達する. もしそうでなければ,  $\partial \mathcal{S}_0$  に正不変集合が存在することになるが, 上記の議論から, そのような集合は存在しない.

# 謝 辞

本研究を行うにあたり，終始適切な助言を賜り，丁寧にご指導いただいた吉田和信教授に誠意を表すとともに厚く御礼申し上げます。また，日々の活動に際して助言，激励をいただきました都築卓有規助教に深く感謝いたします。