

問いをもち、他者と考えを伝え合い、主体的に課題を追求する力を育む算数・数学学習 — 中学3年生四角形の中点を結んでできる図形の学習を通して —

1 単元のねらい

図形の性質を三角形の相似条件などを基にして確かめ、論理的に考察し表現し、相似な図形の性質を用いて考察することができるようにする。また、相似な図形の性質を具体的な場面で活用する力を伸ばす。

2 授業の構想

(1) 子どものとらえと資質・能力について

平方根の利用の学習で、「コピー機の拡大コピー」を題材に取り組んだ。「A4をA3に拡大するには何倍（何％）に拡大にすればよいか」と問いかけ、その答えを予想した。生徒からは「A3用紙はA4用紙2枚分だから2倍（200％）に拡大すればよい」という予想が多く出た。しかし、実際にコピー機で拡大すると200％ではうまくいかなかった。コピー機の機能から141％に拡大すればよいということがわかったが、「どうして141％でうまくいくのか」「なぜ2倍でないのか」という問いが生まれた。そこで「A4からA3に拡大するのに141％でうまくいく理由を説明しよう」という課題を設定した。個人で追求する際には、定規や電卓などを使い、A3とA4それぞれの長辺（縦）と短辺（横）の長さを測った生徒もいた。そしてその長さを比べ、A3とA4の辺の長さの倍率が約1.41倍であることから141％であると考えた生徒が多くいた（図1）。具体的な数で考えた生徒の発表に対して、「具体的な数では誤差が出るので、文字を使った説明が良いのではないか」という意見が出た。そこから、文字を使った説明を考え、学級で共有した（図2）。授業を通して、日常生活の中にある数学を探し、問いを見つけ、数や式などの数学的な表現を用いて他者とお互いの考えを伝え合ったり、他者の多様な考え・価値観に触れたりしながら、よりよい解決の方法を探索する姿が見られた。このような姿が現れる数学学習こそ、本学校園算数・数学科が考える子どもの豊かな算数・数学観を育むことができると考える。

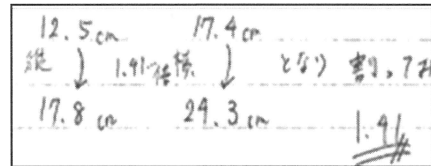


図1

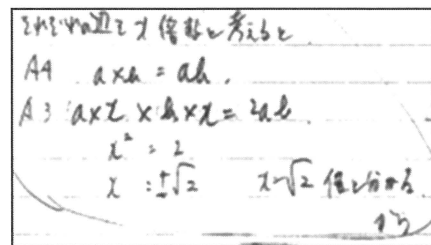


図2

(2) 資質・能力を育むために

単元を通して、生徒がもった問いを、既習事項を用いて数学的に説明する活動を取り入れた。第1次では、根拠に基づいて、図形が相似であることを証明する活動を行った。第2次では、平行線と線分の比について、補助線を引いて、既習事項を用いて性質を探った。第3次では、四角形の中点を結んでできる図形の性質を探った。そして、四角形の各辺の中点を結んでできる図形が4種類になる理由を追求する活動を行った。既習事項をもとに図形の性質を発見し、四角形の中にできる図形の辺や角が対角線に関係していることを、他者と考えを伝え合いながら、主体的に課題を追求する姿を期待し、次のような手立てを重視した。

取り上げる題材として、四角形の中点を結んだときにできる図形がどのような図形になるのか追求した。まず、もととなる四角形を自由に作図し、中点を結んでできる図形が人と異なる状況をつくった。その後「もとになる図形で形が決まるのか」「他にどんな図形ができるのか」など、生徒に問いが生まれ、自ら解決したいという思いを引き出すようにした。第14時では、「他にどんな図形ができるのか」という問いを取り上げ、それを課題とした。追求の際には、四角形の中点を結んでできる図形の変化に注目できるようにGC (Geometric Constructor) を用いた。GCを使うことでたくさんの図形を取り上げることができるようにした。第15時では、中にできる図形が、「本当にその四角形になるのか」と問いかけ、証明する必要性に気付けるようにした。そして、自ら証明したい図形を選び、主体的にその証明を考えることができるようにした。

3 展開計画 (全24時間)

| 次 | 時 | 主な学習と具体的な学習・内容 | ◇願う子どもの姿 |
|---|--------------------------|---|--|
| 1 | 1 2・3 4・5 6・7 | <ul style="list-style-type: none"> ・形が同じ図形をかき、相似な図形の性質を確認しよう。 ・比の性質を使って辺の長さを求めよう。 ・2つの三角形は、どんな場合に相似になるか考えよう。 ・2つの三角形が相似になることを証明しよう。 | ◇図形が相似であることの証明を筋道立てて考える姿 |
| 2 | 8 9 10 11 12 | <ul style="list-style-type: none"> ・長さを測らないでノートを3等分にする方法はないか考えよう。 ・平行線と線分の比について考えよう。 ・平行線に挟まれた線分の比について、補助線を引き、考えよう。 ・三角形の角の二等分線と線分の比について、いろいろな補助線を引いて、考えよう。 ・平行線と線分の比の定理の逆が成り立つかどうか調べよう。 | ◇平行線と線分の比について、補助線を引いて、既習事項を用いて性質を考える姿 |
| 3 | 13 14 15 16 | <ul style="list-style-type: none"> ・四角形の中点を結んでできる図形が平行四辺形になることを証明しよう。 ・四角形の中点を結んでできる図形は、どんな図形ができるか考えよう。 ・四角形の中点を結んでできる図形が本当にそう言えるのか証明しよう。 ・外側がどんな図形のときに、どれに分類されるのか考えよう。 | ◇中点を結んでできる図形について、辺や角に注目して、図形がどの部分に関係するのか考える姿 |
| 4 | 17・18 19・20 | <ul style="list-style-type: none"> ・相似な図形をしきつめ、相似な図形の面積の関係を調べよう。 ・相似な立体の表面積と体積の比について調べよう。 | ◇相似比と面積比や体積比との関係を、文字を用いて説明する姿 |
| 5 | 21・22 23 24 | <ul style="list-style-type: none"> ・相似な図形の性質を利用して、身近にあるものの長さを求めよう。 ・相似な図形で学んだことについてレポートを書こう。 ・レポートに書いたことを発表しよう。 | ◇相似な図形で学んだことをレポートにまとめ、人に伝える姿 |

4 授業の実際

(1) 四角形の中点を結んでできる図形が平行四辺形になることを証明しよう。

(第3次第13時)

以下は四角形の中点を結んでできる図形を作図して、課題設定までの授業記録である。

| |
|--|
| <p>T : 四角形の中点を結んでできる図形はどんな図形になりましたか。</p> <p>生徒A : 平行四辺形になりました。</p> <p>T : みんな平行四辺形になりましたか？</p> <p>生徒B : 私は長方形になりました。</p> <p>T : あれ？周りの人はどんな図形ができましたか？</p> <p>生徒 : (周りの人の図形を確認する)</p> <p>T : 人によってできた図形が違うようですね。なぜ、他の人とできた図形が異なるのかな？</p> <p>生徒C : 外側の図形の形が異なるからです。</p> <p>T : 外側の図形の形に関係があるのかもしれませんがね。まずは、本当に平行四辺形になるのかどうか考えてみましょう。</p> |
|--|

三角形の中点を結び、中点連結定理についての学習をした。そのあとで、三角形を四角形に変えるとどうなるかと問いかけ、どんな図形ができるのかについて考えた。基となる四角形は自由に作図することで、他とずれを作り、「なぜ周りの人と異なる図形ができるのか」と生徒に問いが生まれるようにした。(図3)「外側の図形の形に関係があるのではないか」という発言から、「他にどんな図形ができるのか」など、さらに生徒たちの問いが広がっていった。その後一人の生徒の図形を取り上げ、中にできる図形が本当に平行四辺形になるのかを全体で証明を行った。次時につながるように「さらに追求してみたいこと」を視点にふりかえりを行ったところ、次のようなことが挙げられた。



図3：他の人の図形を確認する

- ・五角形や六角形ではどうなっていくのだろう。
- ・四角形の形によって、中点を結んだときにできる四角形が異なるのはなぜなのだろう。
- ・他にどんな図形ができるのかを探ってみたいです。

(2) 四角形の中点を結んでできる図形はどんな図形ができるか考えよう (第3次第14時)

「中点を結ぶと他にどんな図形ができるのか」というふりかえりを課題にして授業を行った。追求には、中にできる図形の変化が見えやすいようにGC (Geometric Constructor) を用いた。(図4) 凹四角形など外側の四角

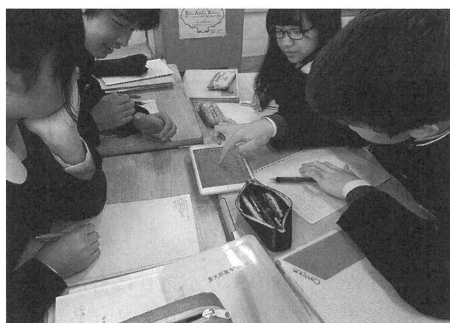


図4：GCで追求

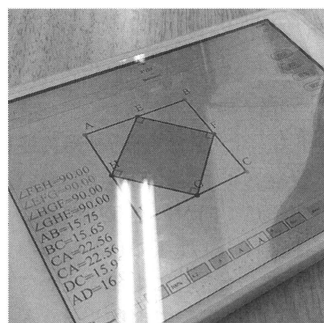


図5

形を様々な形にして、中にできる図形がどのような形になるのかを追求していった。中の図形が4種類にしかないことを不思議に思う生徒もいた。また、四角形が本当にその図形になるのかを辺の長さや角の大きさを測り確かめようとしている班もいた。(図5) 生徒はGCを用いて、様々な四角形の中点を結んでできる図形について調べて、ノートに整理をした。以下はその時間の生徒のふりかえりである。

- ・外側の四角形によって中の図形が変わることがわかりました。それらに決まりや規則性があるのでしょうか。
- ・中に同じ図形ができるとき、外にできる図形には何か規則性があるのかどうか知りたいです。
- ・いろいろな四角形の中点で結んでみると、どれも平行四辺形に分類されるものだった。
- ・ひし形なのか長方形なのか判断に困った図形があった。
- ・4種類しかないのは理由があるのだろうか。台形はできないのだろうか。

(3) 四角形の中点を結んでできる図形が本当にそう言えるのか証明しよう (第3次第15時)

以下は前時に調べた図形を整理し、課題を設定するまでの授業記録である。

T : 長方形→ひし形(?)と整理した班がいましたが、なんで(?)と書いたのですか?
 生徒D : ひし形のような形でしたが、平行四辺形と迷ったので、(?)と書きました。
 T : 他にも同じように迷った班がいましたが、本当にその図形だと確信をもって言うためにはどうすればいいですか?
 生徒E : 証明をすればいいと思います。
 T : では、今日は前回まとめた結果が本当にその図形になるのか証明しましょう。

前時の学習で調べた図形を整理すると、(?)と書いてまとめている班があった。理由を確認すると、ひし形なのか平行四辺形なのか分からなかったということであった。「本当にそう言えるのか確かめるにはどうすればいいかな」と問いかけると、「証明をすればいい」という反応があった。GCを用いて、図形を確かめるだけではなく、証明することの必要性に気付いたようだった。そこで、課題を「四角形の midpoint を結んでできる図形が本当にその図形だと言えるのか証明しよう」と設定した。「全部の証明を考えないといけないけど、どうしようか」と問いかけると、班で割り振ったら良いという意見が出た。そこで、班で証明を分担し、その証明を共有した。(図6)個人で追求した後に、グループでそれぞれの証明を発表し、全体で共有した。4種類の証明を全体で共有することで、全ての証明に対角線が関係していることに気づき、4種類の証明を聞くことが、次回の課題解決にせまるための手立てになると感じた。

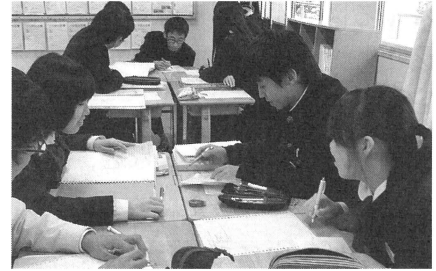


図6：証明を班員に説明

(4) 外側の図形がどんな図形のときに、どれに分類されるのか考えよう。(第3次第16時)
 以下は前時に証明した図形を整理し、課題を設定するまでの授業記録である。

T : 中にできる図形に注目して欲しいのだけど、気付いたことありますか?
 生徒F : 全ての図形は向かい合う辺が等しい。
 生徒G : 向かい合う辺が全て平行。
 生徒H : 4種類にしかない。
 T : 本当に4種類しかできないのかな? 前回のふりかえりに台形はできるのかな? と考えた人がいたのだけど、できると思う人? (少数挙手) できないと思う人? (多数挙手)
 (作図をして、台形にならないことを確認)
 T : なぜ、台形にならないのかな?
 生徒H : 全ての証明に中点連結定理を使うため、向かい合う辺は必ず平行になるからじゃないかな。
 生徒I : そういうことか!
 T : 4種類になる理由はわかりましたね。他のふりかえりに、どんな図形のときに、どれに分類されるのかが知りたいと書いてありました。今日はこのことについて考えてみましょう。

前時のふりかえりに、4種類になるには理由があるのかという問いをもった生徒がいた。その問いを解決するために、台形ができるかどうか、実際に作図をして、できた図形を全体で共有した。(図7)「なぜ台形はできないのか」と問いかけると、「全ての証明に中点連結定理を用いるため、向かい合う辺は必ず平行になる」と説明した生徒がいた。自ら証明を行った生徒たちは、その説明に納得している様子だった。4種類全ての証明を全体で共有し、その共通点を明確にすることで、4種類にしかないのということを確認するのに有効的であったと考えられる。以下は課題を設定して、グループで活動をしている時のグループ内の会話である。

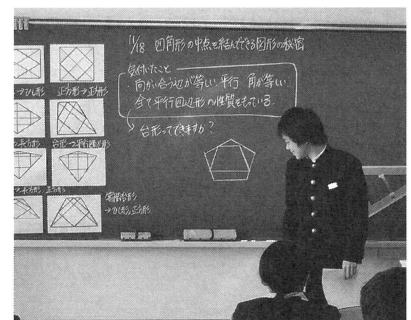


図7：台形ができるか作図

以下は課題を設定して、グループで活動をしている時のグループ内の会話である。

生徒J：まずは分類してみようよ。
 生徒K：傾き関係ある？
 生徒L：いや、関係なかった。
 生徒J：全部に共通することはないかな？
 生徒K：全部に共通することはないんじゃない？
 生徒J：たこ形とひし形は両方も長方形になるよね。共通点があるんじゃない？
 生徒L：あつわかった。垂直に交わっている。
 生徒M：本当だ。対角線が垂直に交わったときは長方形になるんだ。
 生徒J：対角線に注目したら、全部分類できるんじゃない？

多くの班は、上記のように自分たちで共通点を探し、対角線に着目して分類をしていった。対角線について着目できない班については、「長方形になるたこ形やひし形には共通点がないかな」と問いかけ、共通点を探すようにはたらきかけた。授業の終末は、どのように分類したかを全体で共有した。(図8)

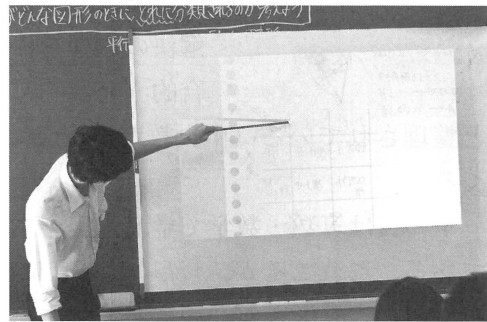


図8：全体で共有

授業の中で凹四角形についての追求は行わなかったが、「凹四角形についてはどうなるのだろうか」と考え、同じように対角線で、分類ができるかを探っている生徒がいた。このように問いを見つけ、主体的に取り組む姿が多くみられた。以下はその日のふりかえりである。

- ・私は台形ができるのではないかなと思ったけど、H君の説明で4種類にしかならない理由が分かった。
- ・凹四角形についても言えるのではないかなと思ったけど、対角線がどこかわからなかったの、その部分が知りたい。
- ・凹四角形についても同じ事が言えた。凹四角形の中にも対角線の関係によって、名前が異なっているのではないかと思った。
- ・難しい課題だったけど、班の人の説明でよく分かりました。

5 おわりに

生徒に問いが生まれるために、生徒のふりかえりの内容を導入や展開で取り上げ、全体の問いになるようにはたらきかけた。単元を通して、ふりかえりを丁寧に取り上げることで、「凹四角形にしたらどうなるのかな」「4種類になるのは何でなんだろう」など、問いをもち、主体的に授業を受ける姿勢が見られた。また、他者と考えを伝え合うことで、他の人の考えた問いを共有し、深い学びをしている様子であった。こうした授業を行い、作成したレポートには、さらに調べてみたいことをテーマに挙げ、探求しているものがあった。(図9) 以上のような姿勢が見られたことは、生徒の主体的に課題を追求する力を育むために、有効的であったと考えられる。

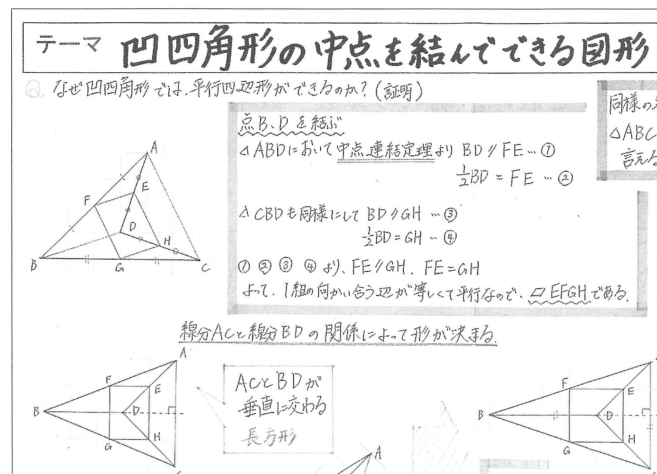


図9：生徒のレポート

(文責 中林 千春)