

伴って変わる数量に着目し、その関係を自分なりに説明し伝え合う子ども

— 中学1年「変化と対応」の実践から —

1 単元のねらい

具体的な事象を調べることを通して、比例、反比例について理解を深めるとともに、関数関係を見だし、表現しながら考察することができる。

2 授業の構想

(1) 子どものとらえについて

4月からの授業の中で「～についていろいろな方法で考えよう」「～について友だちに分かりやすく説明してみよう」等の活動を扱い、班や学級全体の場で生徒同士が説明し合う場面を多く取り入れている。文字の式の学習後に「数の石垣」を題材に課題学習に取り組んだ。「数の石垣」とは、隣り合う二つの石垣の数の和をそれらの上の石に入れていくものである。まず、「4段の石垣において最上段を3の倍数にするためには、最下段に入れる数字をどのような数字にすればよいか考えよう」という課題を設定した。生徒たちは、具体的な数を当てはめていく中で、「最下段の両端の数の和が3の倍数になれば、最上段は3の倍数になる」と予想し、文字式を使ってこのことを説明していった(図1)。その後、「最上段を5の倍数にするには」と自ら課題を発展させた。すると、「3の倍数のときに4段必要だったから、5の倍数にするには6段必要になる」と考え、6段の石垣を作り始めた(図2)。文字を使って説明する、条件を変える、見直しをもって問題解決する力をさらに伸ばしていくことは数学的な思考を深めていく上で非常に重要であり、このような生徒の姿こそ本学校園算数・数学科が考える豊かな学びの姿の一つだと考えた。

6月に行った「説明し伝え合う活動」についてのアンケートでは、「人に伝えることができなければ分かったとはいえないから説明することは大切だと思う」「説明して相手が“分かった”といってくれよううれしい」等、肯定的に受け止めている生徒が多かった。一方で「難しい」「どうやったらうまく相手に伝えられるのか分からない」等、スキルの不十分さや不安を抱いている生徒もいた。以上のような実態を踏まえて、継続的にペアや班、学級全体で説明し伝え合う場を設定し、学び合いの中で具体的な事象を調べることを通して、比例、反比例について理解を深めるとともに、関数関係を見だし表現し考察する能力をさらに高めていけるような学習を構想していくこととした。

(2) 本単元の内容と算数・数学科で考える思考力・判断力・表現力の育成との関わりについて

本学校園算数・数学科が考える豊かな学びの姿の一つに「学び合う関係の中で、友だちの様々な考えを受け止め、算数・数学のよさに気付き、活用していこう、さらに発展させていこうとする姿」がある。そこで、本単元においても授業の中で、学級全体の学び合いを活性化できるようにすることを重視した。自分の考えをもつ時間を確保し、必要に応じてペアや班での活動を取り入れていった。自分の考えたことを友だちに分かりやすく説明したり、友だちの考えを聞いたりする学び合いの中で、考え方に誤りを見付けたり、新たな問いが生まれたりする。さらに考え方を比較して、似

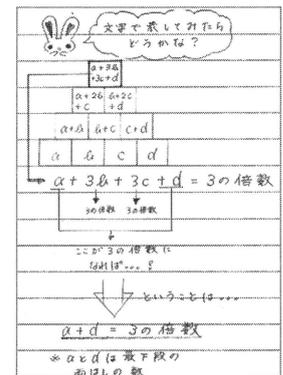


図1

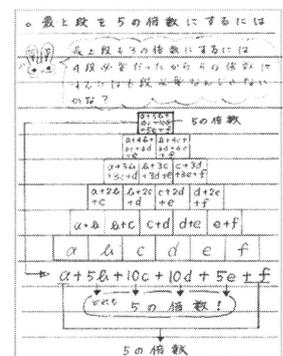


図2

た考え方を統合して考えることもできる。また、個人や班などの小グループでの活動で解決できなかった疑問を取り上げより分かりやすい説明を付け足したり、取り上げた問いに対してみんなで議論したりして深めていくことにつながっていく。このような学び合いの中で、数学的な思考力・判断力・表現力を高めていくことができると考える。

生徒はこれまで、小学校では第4学年から第6学年にかけて、数量の関係を□、△、a、x等を用いて式に表しそれらに数を当てはめて調べたり、変化の様子を折れ線グラフで表し変化の特徴を読み取ったり、比例の関係を学び問題を解決したりしている。反比例は比例の理解を一層深めることをねらいとして、その関係を学んできている。中学校において第1学年では、具体的な事象の中から伴って変わる二つの数量を取り出して、その変化や対応の仕方に着目し、関数関係の意味を理解できるようにすることがねらいである。第2学年では一次関数、第3学年では関数 $y = ax^2$ を考察する。いずれにおいても、表、式、グラフを相互に関係付けながら、変化の割合やグラフの特徴等関数の理解を一層深め、関数関係を見だし表現し考察する能力を伸ばしていく。

(3) 思考力・判断力・表現力の育成に関する学び合う場面の構想について

本単元では、数学的活動として「日常生活で数学を利用する活動」を行うことができる。比例、反比例に関わる日常的な事象は数多くあり、他教科の内容に関連した事象も多い。その事象を比例、反比例であるとみなして、考察や処理ができるようになることが重要であると考え。その考え方を生徒自身が日常生活における出来事と照らして合わせて問題解決していく。生徒にとって身近な題材を扱うことで興味をもって取り組むことができる。生徒はその題材の関係を探る中で、その思考の過程や判断の根拠を言葉や数、式、図、表、グラフあるいは数学用語や数学特有の言い方等多様な表現方法を適切に用いて、それらに関連させながら説明する力を伸ばしていくことができると考える。また、日常の生活場面に近い状況の中から、数学化サイクル（図3）に当てはまる数学の既習事項を総合的に活用する場面では、思考、判断、表現する活動がたくさん考えられる。単に答えを求めることだけに終始せず、生徒の問いをつなぐことによって、思考力・判断力・表現力を育成していく。

上記のようなねらいをもち、本単元における具体的な学習を次に述べる第1次～第4次のように構想した。

第1次では、紙で小物入れの箱をつくる時、四隅から切り取る辺の長さに伴って変わっていくものを見いだす活動を行った。伴って変わる数量は、箱の高さ、底面の1辺の長さ、底面積、箱の容積等が考えられる。次に、生徒が見いだした数量を四隅から切り取る1辺の長さを x 、見いだした数量を y として、 x と y にどのような関係があるのかを追求していった。第1次のまとめでは、導き出した表や式を見比べ、分類した。これにより、比例はいろいろな関数の一つであることを知り、関数の概念の広がりを実感できるようにしたいと考えた。

第2次、第3次では、比例、反比例について学んでいった。小学校での学習を掘り起こしながら、変数を負の数まで拡張し、文字を用いた式で表現した。そのとき、比例、反比例の特徴を、表や式、グラフと相互に関連付けて考察し、根拠を明らかにして比例、反比例の関係になっていることを判断することができるようにしたいと考えた。

第4次では、具体的な事象から取り出した二つの数量の関係が比例、反比例であるかどうかを判

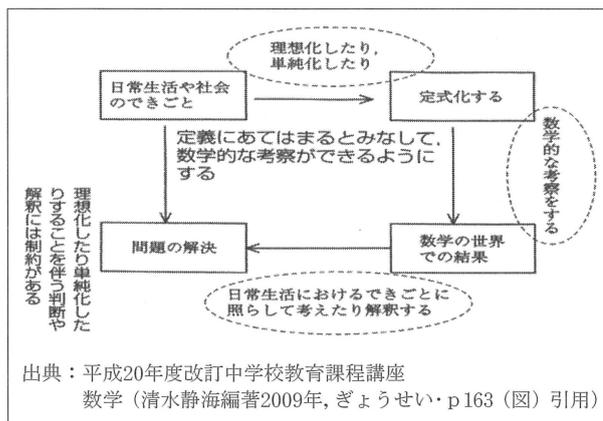


図3：数学化サイクル

断し、その変化や対応の特徴をとらえ、自分なりに説明することができるようにした。日常生活の中にある題材を扱い、比例や反比例を用いて調べたり、予測したりした結果が適切であるかどうかを振り返る場も設定した。身近な生活の中の題材として、紙の枚数と重さの関係、マラソン選手の記録、地震、ランドルト環を扱った。二つの変数の関係を表や式、グラフ等の数学的な表現を用いて、比例または反比例であるかどうかを判断し、自分なりに説明していく姿を大事にしたいと考えた。そのための教師からはたらきかけとしては、意図的な問いの投げかけや、生徒から生まれた問いをつないでいくことが重要である。「なぜそうなるのか」「そのように判断してよいのか」とその根拠を問い、これまでに習得した知識や技能、数学的な考え方を用いた説明を促し展開していきたいと考えた。

3 展開計画

次	主な学習	時	具体的な学習・内容（◇印は、学び合い）
1	伴って変わる二つの数量を見付けよう。	1 2 3	◇正方形の紙から小物入れをつくるとき、切る1辺の長さをxとしたとき、伴って変わっていくものを見いだす。その数量に関して変化の様子や対応の仕方を、グラフ、表、式を用いて表し、特徴から分類し、関数や比例の意味を知る。
2	比例について学ぼう。	4 5 6 7 8 9	<ul style="list-style-type: none"> ・比例の関係を見付け、それを表や式に表し比例の意味や表し方、特徴について考える。 ・変域を負の数まで拡張して、伴って変わる二つの数量を見だし、関数関係を調べる。 ・負の数まで含めた座標軸の取り方、座標等の用語とその表し方を理解する。 ・比例のグラフの特徴を調べる。 ・比例のグラフの特徴を理解し、式や対応表から比例のグラフをかく。 ・変数の変域を変えて、グラフをかく。
3	反比例について学ぼう。	10 11 12 13	<ul style="list-style-type: none"> ・反比例の意味やその表し方、特徴について考える。 ・反比例の特徴を調べる。 ・反比例のグラフの特徴を理解し、式や対応表から反比例のグラフをかく。 ・変数の変域を変えて、反比例のグラフをかく。
4	比例や反比例の関係を利用して、身近な問題を解決しよう。	14 15 16 17	<ul style="list-style-type: none"> ◇数量関係を比例や反比例ととらえて、それらの性質を問題に活用する。 ◇マラソンや地震の事象から、理想化したり単純化したりして比例とみなし、変化や対応の様子を調べたり、予測したりする。 ◇ランドルト環の秘密を探る。

4 授業の実際

(1) 伴って変わる二つの数量を見付けよう（第1次）

1 cm目盛りの16×16マスの方眼紙を配布し、下の方法でふたのない箱を実際に生徒が作る活動を行った（図4）。

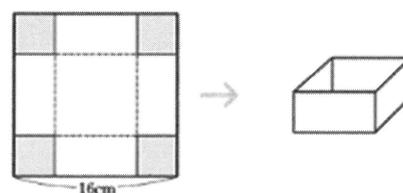


図4

【つくり方】

- (1) 1辺の長さが16cmの正方形の厚紙を用意する。
- (2) 四すみから、同じ大きさの正方形を切り取る。
- (3) 右の図の破線にそって折り曲げ、重なりあう辺をテープなどでとめる。

そして、次のような課題1を提示した。

【課題1】切り取る1辺の長さを変えると、それにもなって、どんな数量が変わるでしょうか。できるだけたくさん見付けてみよう。

個人で考える時間をとり、生徒は箱の高さ、底面の1辺の長さ、底面の周りの長さ、底面の対角線の長さ、箱のすべての辺の長さの合計、底面積、側面の1つの長方形の面積、側面積、展開図の面積、体積などを見付けた。生徒たちが見いだした数量の数には差があり、見いだした数量を説明し、学級全体で整理し、以下の六つについて詳しく調べていくことにした。

- ①箱の高さ ②底面の1辺の長さ ③底面積 ④側面積 ⑤展開図の面積 ⑥体積

次に、課題2を提示した。

【課題2】みんなが見いだした数量を①～⑥とする。切り取る1辺の長さをx、それぞれの数量をyとして、変化の様子や対応の仕方を調べてみよう。

この課題を扱う前に、 y を x の式で表すことの確認を行うため、前単元「文字の式」で扱った折り紙と画びょうの数の学習を振り返った。折り紙の枚数を x 、画びょうの数を y とするとき、表を使って変化を考え、 $y = 3x + 1$ で表すことができることを確認した。



図5

その後、個人で考える時間をとり、班の中で自分の考えを伝え合う場面を設定した(図5)。学級全体の学び合いの場面では、どのように式を作ったのか、それはどのような変化をしているのかに焦点をあてて行った。以下はその場面の授業記録である。生徒Aのノートは、学級全体の話し合いを通して、どんどん書き足されていった(図6)。

生徒A：底面の1辺の長さについて表にしてみました。そしたら、 x が1増えたら y は2減っていくから反比例だと思います。
 T 1：Aさんは表にして調べているようですが、みんなはどうか？
 生徒B：僕も初めは反比例だと思っていたけど、確か反比例は x の値が2倍、3倍になったら、 y の値は2分の1、3分の1になっていくはずだから、反比例とはいえないと思う。
 生徒C：でも、減っているから比例ではないから、やっぱり反比例だと思う。
 生徒D：私は、反比例でないと思います。私は表から式を作ってみました。 $y = 16 - 2x$ になるから、反比例の式とは違うから反比例でないと思います。

対応表から変化をみて数列として考えたり、帰納的に考えたり、式は違うのに同じ意味や考え方であることを知り、式をつくることのおもしろさを味わうことができた(図7)。

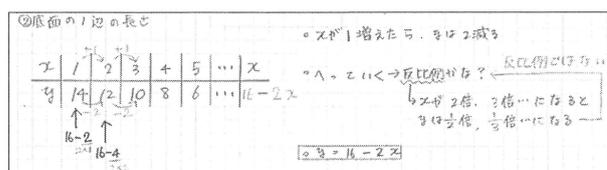


図6：生徒Aのノート

授業のまとめでは、①～⑥について変化の様子や対応の仕方や式の形などの共通点を見つけ出し、分類することを行った。生徒が考えた分類の視点は、「増え方が一定」「 x が2倍、3倍になると、 y も2倍、3倍になる」「式の形の特徴」などがあった。評価基準によって、生徒の分類の視点を評価すると、右の表1のようなになる。分類することにより、小学校で学習した比例、反比例以外にも $y = ax + b$ の形や $y = ax^2$ や $y = ax^2 + bx + c$ 、 $y = ax^3$ 含んだ式など、比例関係は関数の一つにすぎず、その他にも様々な関数が存在することを実感を持って理解することができた。

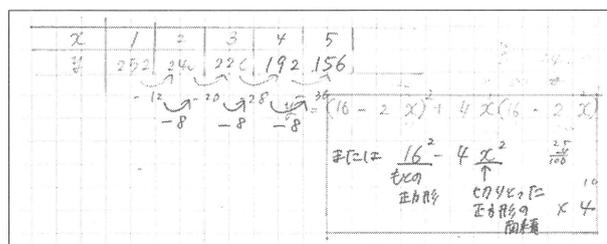


図7：生徒Dのノート

表1：評価基準と結果(第1次)

評価基準		
A	B	C
いくつかの数量に関する表や式の特徴から、複数の視点で分類することができる。	いくつかの数量に関する表や式の特徴から、一つの視点で分類することができる。	表や式に表すことができず、分類することができない。
56%	42%	2%

(2) 比例や反比例の関係を利用して、身近な問題を解決しよう(第4次第16・17時)

第4次第16時では、ランドルト環にひそむ関数関係を題材とした。まず導入では、視力検査表を提示し、Cの形をした黒い輪のことをランドルト環ということを確認し、検査表の仕組みについて気付きを交流する時間をとり、「視力とランドルト環の大きさの関係を探ろう」という課題を設定した。以下は導入部分の授業記録である。

T 2：視力検査表をみて、視力ってどうやって決まるのかな？
 生徒E：ランドルト環の大きさがいろいろあるから、大きさによって決まると思います。
 生徒A：大きさといっても、検査表を見る距離によっても大きさは変わってくると思う。
 T 3：距離に注目した人、他にもいる？(10名程度挙手する)

生徒F：一つのランドルト環を見たとき、僕から見た大きさ（一番前の席）と列の一番後ろの席の生徒Aさんから見た大きさは違います。だから、距離によって変わってくる。

生徒G：視力を測るには、距離と大きさの二つが関係しているということで良いと思います。

生徒E：確かに距離も関係していると思うけど、この検査表の上に5m用と書いてあるから、距離のことは今は考えなくて良いと思います。

生徒多：ほんとだ～。

T 4：そうですね。では、今日は距離を5mと一定にして、大きさに注目して考えていきましょう。Eさんが見つけた大きさはどうなっているかな。

生徒H：視力が大きくなると、だんだん小さくなっている。

生徒K：でも視力1.0まではずっとあるのに、視力1.1や2.0は測定できない。

生徒I：表に無いだけで、作れば測ることができると思う。

T 5：表に無い視力のランドルト環を作ることできるの？

生徒J：マサイ族は視力6.0だってテレビで見たことあるから、測るためのランドルト環はあると思う。

生徒A：視力0.1以下、例えば、視力0.05とか0.01とかのランドルト環を作ってみよう。

生徒E：視力と大きさについて調べれば作ることができると思います。

T 6：じゃあ、みんなで視力とランドルト環の大きさの関係を探ってみよう。どんな関係があるか予想を書いてみよう。

生徒F：反比例していると思う。

生徒多：同じです。

T 7：ほんとに反比例しているのかな？それを調べてみましょう。

生徒は、視力を x 、それに伴って変わるランドルト環の大きさを y として、個人で実測しながら変化や対応の様子を調べていった。生徒が着目したランドルト環の大きさには、すき間の幅、外側の直径、内側の直径、面積等があった。

学級全体の学び合いでは、視力と自分が着目したランドルト環の大きさの関係を表や式、グラフ等の数学的な表現を用いて、反比例であるかどうかを判断し、自分なりに説明していく姿を大事にして行った。以下は、ランドルト環の直径に着目した学級全体の学び合いの授業記録と生徒のノートである（図8～図10）。

生徒E：私はランドルト環の直径について調べ、表にしました。表を横に見たとき、 x が2倍、3倍になると y が2分の1、3分の1になっているし、表を縦に見ても、 x y の値がほぼ0.75と一定なので反比例とみなすことができると思います。

T 8：Eさんと同じで直径を調べた人いますか。（半数の生徒が手を挙げた）

生徒F：僕も反比例だと思う。なぜかという、僕はグラフにしてみました。グラフにすると反比例のグラフになったからです。

生徒A：私もEさんと同じように表をかきました。そして、式に表してみました。すると、式が $y = 0.75/x$ になったので、反比例だと思います。

生徒E：Aさんの式はすごく良いと思います。式にすれば、僕たちが知りたかった視力6.0や0.01のランドルト環の直径の大きさがわかるからです。

生徒K： x に0.01を代入すると、75になるから、視力0.01のランドルト環の直径は75cmです。

生徒多：大きいな。

T 9：もし実際にランドルト環をつくる時、その情報だけでつくることはできますか。

生徒E：すき間の大きさも必要になってくると思う。私はすき間の関係を調べたけど、すき間もやっぱり反比例だったよ。

生徒L：内側の直径も必要かもしれない。

この後、視力検査表にない視力のランドルト環を作成するためには複数の大きさの情報がないとつukれないことに気付いた生徒たちは、内側の直径やすき間、太さなどの複数の視点から関係を探った。学び合いの中で友だちの考えを聞き、様々な考え方を比較する場を設定したことで、視力とランドルト環の大きさの関係が複数の観点から、どの場合も反比例になっていることに気付いていった。生徒Eの発言から、「視力0.01のランドルト環を作るには…」と、表の縦や横の関係から自分なりに反比例と判断すると、式を作り、0.01のときの大きさを出していった。自分が測定したデータから関数関係を見いだすことで、データにはないことを求めることができる式化することのよさを感じる事ができた。評価基準に基づく評価は下の表2のようになる。また第17時において、第16時で学習したことや今後各自で追求したことをレポートにまとめる活動を行った。

5 成果と課題

「変化と対応」の学習前後に、「比例，反比例とはどんなことですか。どんなときに比例，反比例しているといえますか。」という自由記述の調査を行った。事前調査では，表を変化を横にみて「一方が2倍，3倍になると，もう一方も2倍，3倍になるものが比例」「…2分の1，3分の1となるものが反比例」と記述する生徒が多かった。また，生徒Aのように具体的な例を挙げて表をかいて説明する生徒が多くいた（図11）。表の対応を縦にみて説明する生徒は全体の28%しかいなかった。本単元を学習したことで，比例，反比例についての判断の根拠を言葉や数，式，図，表，グラフあるいは数学术語や数学特有の言い方等多様な表現方法を適切に用いて，それらを関連させながら説明する活動を多く行った。それにより生徒Aの事後調査からも，表を横にみる，縦にみる，式，グラフなどを使い説明する変容が見られた（図12）。

身近な生活の中にある比例や反比例についての事前調査では，買い物の買ったものの個数と値段，お風呂の水を溜めるときの時間と深さ，長方形の面積などを見付けることができた生徒は全体の半数だけであった。その結果を踏まえ，単元を通して，生活の中のある比例や反比例の具体例を生徒たちと探しながら授業を進めた結果，多くの生徒がたくさん見つけることができるようになった（図13）。マラソンの世界記録のタイムや地震の震源からの距離と初期微動継続時間の関係など，厳密には比例ではないが，比例とみなすことができると学び合いを通して気付いていった。生徒の感想には，「比例とみなすことで，生活の中にはたくさんの数学が使われていると感じることができた」と書かれていた。このように，日常生活と関連させて学習していくことが今後も必要だと感じる。

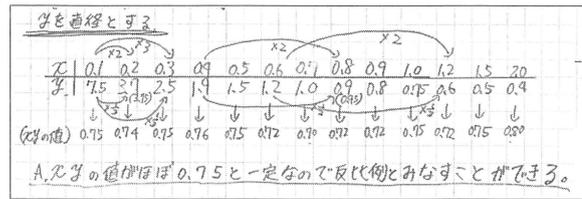


図8：生徒Eのノート

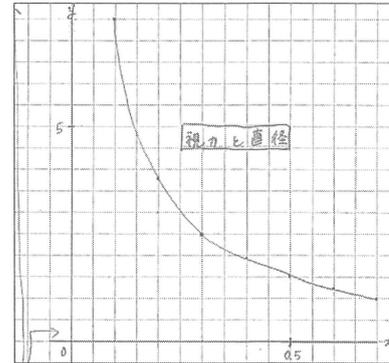


図9：生徒Fのノート

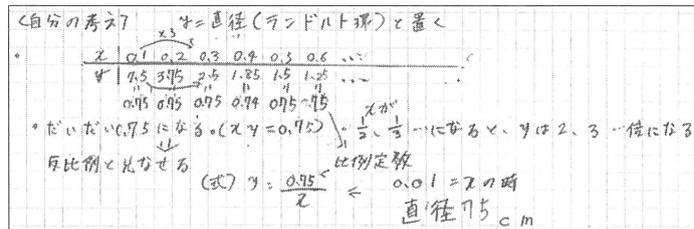


図10：生徒Aのノート

表2：評価基準と結果（第4次第16・17時）

A	B	C
複数の視点から反比例であることを判断し，自分なりに根拠を明らかにして説明することができる。	一つの視点から反比例であることを判断し，自分なりに根拠を明らかにして説明することができる。	表から反比例であることを推測することができず曖昧な説明をしている。
58%	33%	9%

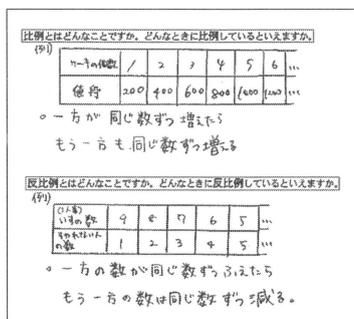


図11：生徒Aの事前調査

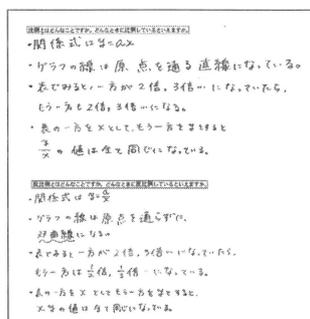


図12：生徒Aの事後調査

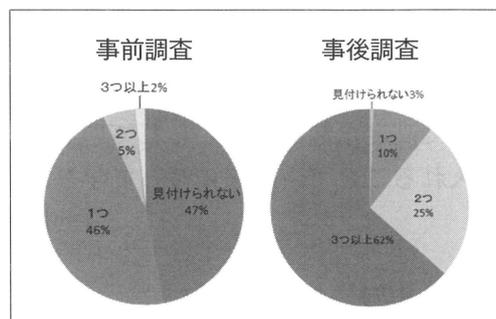


図13：調査「生活の中にある比例の具体例を見つけなさい。」での解答数