

## 学んだことをいかして、日常生活の中に平方根がひそんでいることに気付く子ども

— 中学3年「平方根」の実践から —

### 1 単元のねらい

- (1) 正の数の平方根の必要性和意味を理解し、正の数の平方根を含む簡単な式の計算ができるようにするとともに、具体的な場面で平方根を用いて表したり処理したりすることができるようにする。さらに処理した結果を基にして、具体的な場面で数量やその関係について考えることができるようにする。
- (2) 学んだことをいかして、数学と日常生活との関連に気付くことができるようにする。

### 2 授業の構想

#### (1) 子どものとらえについて

生徒たちは、3年生になり最初の学習単元として、「A数と式」領域の「展開と因数分解」の学習に取り組んだ。その中の「式の計算の利用」では、文字を用いた式で数や図形の性質が成り立つことをとらえ説明する学習を行った。そこで「連続する二つの自然数で、大きい数の2乗から小さい数の2乗をひいた差について、なぜすぐに計算できるのか」という課題に取り組んだ。生徒はまず具体的な例から、「 $11+10=21$ のように、2つの数の和になっている。」「小さい方の数を2倍して1をたせばよい。」といった計算のきまりを予想した。そして、小さい方の自然数を $n$ 、大きい方の自然数を $n+1$ として説明をしていく際に、計算した結果を $n+(n+1)$ と表したり、 $2n+1$ と表したりするなど、予想したことに対する結論を導いていた。また中には、「二つの数を $a$ 、 $b$ として、因数分解して $(a+b)(a-b)$ と考え、この場合 $a-b=1$ となるから、二つの数の和になっている」と説明した生徒もいた。このように、これまでに学んだことをいかし、結果の見通しを立て、式を変形することができる生徒の姿こそ、本学校園算数・数学科が目指している豊かな学びの姿の一つであると考えられる。そして、こうした学びを支えているのが、数学的な思考力、判断力、表現力であるといえる。しかし、文字式を用いることよさやその必要性まで理解できる生徒がいる一方、ただ単に計算ができればよいと考え、なぜ文字式を用いて説明しなければならないのかと感じている生徒や、必要性は感じていても文字を用いて論理的に説明すること自体に抵抗を感じている生徒も多い。1年時から文字式を用いて学習することよさやその必要性を感じられるような学習場面を繰り返し設定してきているが、全体的な生徒の実態としてはまだ十分といえない。こうした点からも、継続的に学んだことをいかす学習課題・学習場面を設定していくことが必要であると考えた。

$11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$
$12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$
$13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$
$14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$

このような実態をふまえ、前学習単元と同領域でもある本単元では、有理数から無理数へと数の概念を拡張していく学習過程を通して、平方根を用いて思考し表現する力、そして学んだことをいかしていくための原動力ともいえる数学的な思考力等をさらに高めていけるような学習を構想していくことにした。

#### (2) 本単元の内容と算数・数学科で考える思考力・判断力・表現力の育成と関わりについて

なぜ「数と式」の学習をするのか、あるいは実際に学習したことをどのようにいかしていくのかという視点から考えると、大きく分けて次の二つの側面をあげることができる。

- 数学の学習を進めていく上で、「数と式」のその後の学習，あるいは「関数」「図形」「資料の活用」など他の領域の内容の基礎としていかす。(数学内でいかす)
- 日常生活や社会の中で、「数と式」に関する知識や技能，あるいは数学的な見方や考え方をいかす。(数学外でいかす)

その中の「数」の学習に関して，中学1年では，小学校で学んできた0以上の数から正の数と負の数の必要性を，これまでの経験や日常生活と関連付けて理解できるようにしてきた。また数の範囲を拡張することにより，減法がいつでも可能になること，計算法則や計算の順序に関するきまりを負の数まで広げても適応できることを学んできた。中学2年では，数そのものについて新しく学習する機会はないが，式の計算や連立方程式，一次関数，確率など様々な学習を通して，数の理解を深めてきている。

中学3年における本単元では，身近な生活の中に存在している平方根（無理数）の存在に目を向けることで，これまでに学習してきた有理数では表すことのできない量が存在することに気づき，新しい数の必要性を理解できるようにしていく。そしてこの数を記号 $\sqrt{\quad}$ を用いて表すことで，これまでの知識では表すことができなかった数を簡潔・明瞭に表すことができようになる。今回の改訂では，用語として「有理数」と「無理数」についても学習することになり，数の集合が有理数と無理数から成ることや，第1学年時と同様に数の範囲がさらに拡張されたことを認識できるようになる。そして今まで学習してきた有理数のときと同じように，数の大小や四則計算ができるかどうかを確かめていく学習過程を大切にしていくことで，新たな数の概念を築いていく。さらに数の範囲の拡張を，この後に学習する二次方程式や二次関数の学習の中でもとらえる機会を意図的につくっていききたい。

また本単元の学習内容を，数学的な思考力等の育成という視点から考えてみたい。正の平方根の意味と必要性を理解するために，できるだけ身近な事象と関連付けて理解できるようにしていく。具体的には，2乗するとaになる数を考察するために正方形を用いて，正方形の面積とその1辺の長さの関係から考えさせていきたい。また，大小関係や有理数と無理数，無理数と無理数などの四則計算について学習する際に，既習の有理数と有理数の計算から類推して考えていくことなど，これまでの学びをいかした多様な考え方が必要となる。そして日常生活における具体的な場面において，正の数の平方根を用いて表したり処理したりすることで，より深くその事象を考察できることになる。ただ単に平方根を含む式の計算という数的な処理ができるようにするのではなく，このような数学的な思考力等を高めていくことも，この単元の大きなねらいの一つである。

### (3) 思考力・判断力・表現力の育成に関する学び合う場面の構想について

上記の(1)(2)をふまえた上で，本単元における具体的な学習を次に述べる第1次～第5次のように構想した。

第1次の単元の導入では，2乗するとaになる数の存在を，いろいろな正方形の面積とその1辺の長さを求めることから気付かせていく。ここでは，班学習（4人程度）における学習形態を取り入れ，4マス×4マスの方眼紙の中にかくことができる正方形から追求していく。そしてこの正方形の1辺の長さを用いることが，生徒にとって今後の学習（大小関係や四則計算）において， $\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ を説明する際の根拠の一つとなるような学び合いにしていきたい。

第2次では，電卓を用いて平方根の値を求める体験的な学習を通して，無理数の存在を実感させるとともに，記号 $\sqrt{\quad}$ を用いて表すことの良いさを感じさせたい。

第3次では，その無理数について既習の有理数と比べながら，数の集合としてまとめていく。

第4次では、有理数と無理数、無理数と無理数などの四則計算について学習することになる。 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ は成り立つが、 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ は成り立たないことを、近似値を用いて計算する、面積の異なる正方形を用いて考える、反例を用いるなど、多様な見方や考え方を用いて説明していくような学び合いの機会をつくっていききたい。

第5次では、まず身近な生活の中で使用されている「いろいろな規格の紙の寸法の特徴」について考えさせる。その中から身の回りにある平方根として、B5判やA4判の紙からルート長方形の特徴について追求していく。共通な特徴を追求する中で、B5判やA4判の紙の2辺の長さの比が $1 : \sqrt{2}$ になっていることが予想できる。その理由を生徒が考える際に、折り曲げた紙から、単元の導入で用いた面積2の正方形の考え方をいかして説明ができることにつなげていけるようなはたらきかけを工夫していく。さらに新たな問いとして、B5判とB4判の紙との関係からB4判の紙の2辺の長さも $1 : \sqrt{2}$ になっていることに気付かせ、なぜこのような規格になっているかについても考えさせていきたい。これまでの学習をいかし、実際に生活の中に $\sqrt{2}$ が存在していることを実感するとともに、生徒一人一人が学び合いの中でしっかり思考し表現できるような学習活動を展開していきたい。

### 3 展開計画

次	主な学習	時	具体的な学習・内容 (◇印は、学び合い)
1	2乗するとaになる数について考えよう。 ・正の平方根の必要性和意味 ・平方根の大小関係	1	◇いろいろな正方形をかき、その面積と1辺の長さを求めることで、有理数では表すことのできない量があることに気付く。
		2	・新しい数を、根号 $\sqrt{\quad}$ を用いて表すことを知る。
		3	・正方形の1辺の長さを比較し、平方根の大小関係を考える。
2	平方根のおよその値を求めよう。 ・平方根の近似値	4	・平方数から $\sqrt{5}$ の近似値を求める。 ・電卓を使って近似値を求める。
3	有理数と無理数について学ぼう。	5 6	・有理数と無理数を用いて、これまで学んできたいろいろな数をまとめる。 ・ $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を考える。(発展)
4	根号をふくむ式の計算をしよう。 ・根号をふくむ式の乗法・除法 ・根号をふくむいろいろな式の計算	7	◇根号をふくむ式の乗法や除法、 $a\sqrt{b}$ について、近似値や異なる面積の正方形等を用いた説明を考える。
		8	
		9	・根号のついた数を、 $a\sqrt{b}$ の形や有理化する等、目的に応じて変形する。
		10	◇根号をふくむ式の和と差について、面積図や反例等を用いて説明する。
		11	・分配法則や乗法公式を使って、根号をふくむ式の積の計算ができる。
12	・根号をふくむ式の計算(問題演習)		
5	教科書の大きさ(B5判)からルート長方形の秘密を探ろう。～平方根の利用～	13	◇いろいろな規格の紙の寸法の特徴について考え、さらにA判やB判の紙からルート長方形の特徴について考える。
		14	・紙の大きさ(A判やB判)の秘密を、数学レポートにまとめる。

### 4 授業の実際

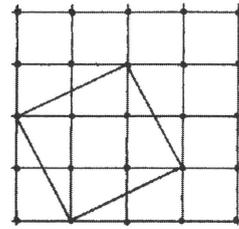
#### (1) 2乗するとaになる数について考えよう。(第1時)

##### ① 学習課題の意図

日常生活の中には、例えば面積が $2\text{ cm}^2$ の正方形の1辺の長さのように、有理数では表すことのできない量が存在する。このような量あるいは数を表すために、そして「新しい数」として正の数の平方根の必要性和意味を理解できるようにするために、導入で次のような学習課題に取り組んだ。

右の図のように、1 cm目盛りの4×4マスの方眼紙があります。この方眼紙をつかって、いろいろな大きさの正方形をつくってみよう。

そのときのそれぞれの正方形の面積はいくらになりますか。また、1辺の長さも求めてみよう。



正方形の面積 5 cm<sup>2</sup>

## ② 授業展開（生徒の反応）と考察

4×4マスの方眼紙が九つ貼り付けてあるワークシートを配布した。そして、まずこの中に面積の異なるいろいろな大きさの正方形をかいていった。すぐに多くの生徒がマス目を利用して面積1cm<sup>2</sup>、4cm<sup>2</sup>、9cm<sup>2</sup>、16cm<sup>2</sup>の正方形をかいていった。班学習の形態で取り組んでいたため、やがて一部の生徒が面積2cm<sup>2</sup>の正方形がかけることに気付くと、ちょっと工夫することで面積5cm<sup>2</sup>、8cm<sup>2</sup>、10cm<sup>2</sup>の正方形がかけることにも気付いていった。この条件でつくることができる正方形は8種類であるが、早くできた生徒は九つ目があるのではないかと、さらに試行錯誤しながら追求をしていた。次に各正方形の1辺の長さを考えていった。面積2cm<sup>2</sup>、5cm<sup>2</sup>、8cm<sup>2</sup>、10cm<sup>2</sup>の正方形の1辺の長さははっきりと分からないが、生徒の中には8種類の正方形の面積と1辺の長さを表にまとめることによって、おおよその1辺の長さを考える生徒もいた。また、面積2cm<sup>2</sup>の正方形の1辺の長さが実測から1.4cmから1.5cmの間であると分かり、2乗して2になる数の追求が行われた。そこで、これらの数（例えば2乗して2になる数）がどんな数になるのかを考える場を学び合いの場面として設定した。こうした追求が、無理数の存在に興味をもたせ、√を用いることの必要性を強めることになったといえる。

## (2) 根号をふくむ式の計算をしよう。(第7・8時、第10時)

### ① 学習課題の意図

これまで小学校からの学習の中で、新しい数（例えば、小数や分数、負の数）を学習した後はその数の大小関係について考え、そして計算の仕方について学習してきた。今回も同じように根号を含む式の四則計算について、これまでに学習したことをいかしながら計算の仕方を考えていった。帰納的な考え、あるいは類推的な考えから予想したことを、演繹的に説明することで計算のきまりとしてまとめていく。こうした思考を進めていく際に、第1時に用いた正方形の図を活用することもできる。授業の中では、次の四則計算を学習課題とした。

$\sqrt{2} + \sqrt{8}$      $\sqrt{2} - \sqrt{8}$      $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$      $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$  を計算すると・・・

### ② 授業展開（生徒の反応）と考察

それぞれの計算の答えを予想し、それが正しいかどうかの説明を考えていくという流れで学習を進めた。実際は、第7・8時で「根号をふくむ式の乗法・除法」、第10時で「根号をふくむ式の和と差」の学習を行ったが、次にその一部を紹介する。

第10時における学習では次のような課題をもとに学び合いをおこなった。

$\sqrt{2} + \sqrt{8}$  が  $\sqrt{10}$  になること（あるいはならないこと）の説明や計算の仕方を考えよう。

この課題に対して個人や班の中で追求を行い、その後に学級全体で様々な考えを交流させる時間をとった。「これまでの学習で用いた考え方を使うことはできないだろうか」といった問いかけから、次のような説明を多くの考え方を引き出すことができた。

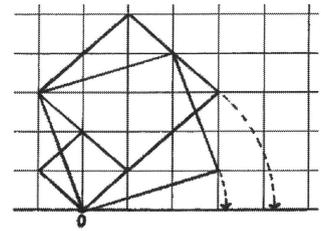
\*平方根の近似値から考えると、 $\sqrt{2}=1.414\dots$ 、 $\sqrt{8}=2.828\dots$ だから、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 4.242\dots$   
 $\sqrt{10}=3.162\dots$ となり、正しくない。

さらに、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 4.242\dots$ から、 $4.242^2 = 17.994\dots$ となり、 $\sqrt{18}$ になりそう。

\* 例えば $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ となり、 $\sqrt{13}$ にはならないので、 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ は $\sqrt{10}$ にならない。

\* (右図) のように面積2, 8, 10の正方形を工夫してかくことで、 $(\sqrt{2} + \sqrt{8})$ 、 $\sqrt{10}$ の各辺の長さの違いから、 $\sqrt{10}$ にならない。

\* 乗法の説明のときのように、 $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$ と $(\sqrt{10})^2$ を計算して比べてみると、  
 $\rightarrow$  どちらも10になるので正しい。  
 $\rightarrow$  18と10になるので正しくない。



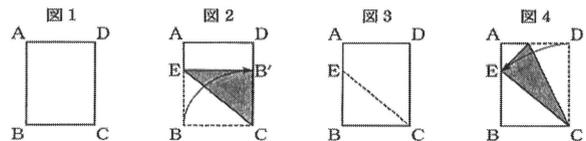
このように既習の近似値の考え方や平方根と正方形の面積との関係を用いながら説明しようとしたり、特別な数を用いることによる反例を示すことによって説明しようとする生徒も見られた。また、根号を含む式の乗法の学習の際に用いた $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$ と $(\sqrt{10})^2$ を比較して考えようとした生徒も多くみられ、その中で $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$ の計算については未習ということから、授業の中では同じ考え方で説明していても結論が異なるという状況もおこり、さらに学び合いを深めることができた。

### (3) 教科書の大きさ (B 5判) からルート長方形の秘密を探ろう。(第13・14時)

#### ① 学習課題の意図

身近な生活の中で利用されている「いろいろな規格の紙の寸法の特徴」について考え、さらにB判やA判サイズの紙から「ルート長方形の特徴」について考える一連の学習活動を行った。日常生活の中に平方根がひそんでいることに気付くとともに、学んだことをいかしながら課題解決いくために、次のような学習課題を設定した。

B 5判の紙の縦横比が $1 : \sqrt{2}$ になっていることを、図1～4(右図)のような折り方で、確かめられる理由を説明しよう。



#### ② 授業展開 (生徒の反応) と考察

##### (i) いろいろな規格の紙を分類してみよう。

導入では、規格の異なる六つの紙を配り、自由な発想で分類していくことで、紙の寸法の特徴に目を向けさせた。

- B 5判サイズ
- B 4判サイズ
- A 4判サイズ
- レーターサイズ
- 写真四つ切サイズ
- 黄金比サイズ

##### (ii) 折り曲げたときに、DCとECがぴったり重なった紙の寸法の共通な特徴を考えよう。

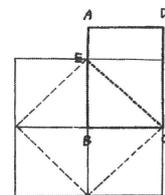
次に、追求する課題の視点を明確化させるために、この6種類の紙をある共通点をもったものと、そうでないものとで分類することを考えさせた。ここで図1～4のような手順で、6種類の紙を折ってみることで、図4のように辺DCがECに重なるように折ると、DCとECがぴったり重なるものと、そうでないものに分けることができた。生徒にとっては「なぜそうなるのか。」という問いが原動力となり、また折り曲げるという操作の過程をふまえ、B 5判、B 4判、A 4判の紙の寸法の共通な特徴として、縦横比に目を向けていった。ものさしを使って実測し、電卓を用いて縦横比を計算していく中で、「縦は、横の長さのおよそ1.41…倍となっている。」ことに気付き、さらにここから既習の平方根の近似値の学習につなげて、「およそ $1.41\dots = \sqrt{2}$ と考えることができるから、 $1 : \sqrt{2}$ と予想できる。」ことを多くの生徒が班学習の中から気付いていった。

$$\begin{pmatrix} B 5 - 182 : 257 = 1 : 1.41\dots \\ A 4 - 210 : 297 = 1 : 1.43\dots \\ B 4 - 257 : 364 = 1 : 1.42\dots \end{pmatrix}$$

1.4…ということは  
 $\sqrt{2}$ を表すことができて  
 $\rightarrow 1 : \sqrt{2}$ になる。

(iii) 本当に、B 5判の紙の縦横比が $1:\sqrt{2}$ になっていることの説明を考えよう。

図1～4の手順で紙を折っていくことが、 $1:\sqrt{2}$ の説明につながっていることを個人や班、そして学級全体で考えていった。BCを1としたとき、ECが $\sqrt{2}$ になることを示すためには、右図のように面積2の正方形とみて考えていくことになる。これは、この単元の学習の中で用いてきた正方形の図がイメージできるかどうか重要である。「以前に学習したことは使えないか」という視点でこうした図をより多くの生徒がかいて追求できるよう、正方形EBCB'やその対角線ECに着目させるようなはたらきかけを行っていった。そして、説明の見通しが立った生徒が班の中や学級全体の場で説明することで理解を深めることができた。また中には、正方形EBCB'をひし形とみて、ひし形の面積の求め方からECが $\sqrt{2}$ になることを説明することができた生徒もいた。実際の授業の中で、個人追求から図を用いて説明を考えることができた生徒はわずか1割程度であった。しかし班や学級全体での学習後に行った評価問題をみると、A 5判の紙について、縦横比が $1:\sqrt{2}$ になっていることを適切に説明できている生徒が8割を越えていた。この内容を数学レポートにまとめることによって、さらに深い理解につなげることができたといえる。この学習から正方形の1辺と対角線の比も $1:\sqrt{2}$ になることがわかり、今後の学習にいかしていくことができるようになった生徒もいると考えられる。



(iv) 三つの規格の紙（B 5判、B 4判、A 4判）についてどんな関係があるかを考えよう。

さらに発展的な課題として、三つの規格の紙からいさうなことを追求していった。授業やその後の数学レポートから生徒が見付けたものをまとめると次のようになる。これらの中のいくつかを全体で確認して、さらに学びを深めていくことができた。

B 5判 $\Leftrightarrow$ B 4判 $\Leftrightarrow$ A 4判	B 5判 $\Leftrightarrow$ B 4判
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 大きさは異なるが、形はすべて同じ。</li> <li>• 拡大・縮小の関係になっている。</li> <li>• 重ねてみると、折り目(対角線)が一直線上に並ぶ。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 面積が2倍になっている。</li> <li>• B 4判を半分に折ったものと同じ大きさ。</li> <li>• B 5判の縦(一辺)の長さと、B 4判の横(一辺)の長さが等しい。</li> </ul>
A 4判 $\Leftrightarrow$ B 4判	B 5判 $\Leftrightarrow$ A 4判
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 縦、横ともに、約1.22倍になっている。</li> <li>• B 4判の対角線の長さとA 4判の1辺の長さが等しい。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 縦、横ともに、約1.15倍になっている。</li> </ul>

最後に、この学習後の一人の生徒の「学習のふりかえり」の記述を紹介する。

B 4, A 5などのいろいろな大きさの紙の共通点を考えたりするのは、面白かったけど難しかったです。ここでは、比例式など、今まで学習してきたことを生かすことが多かったですが、フル活用して取り組むことができ、自分で理解を深め、自分なりに考えたりすることができたので、とてもよかったです。けど理解することはよくできたので、やっぱりそれを伝える「発表」をもっと頑張っていきたいです。

## 5 成果と課題

この単元の学習を通して、生徒は「無理数」という新しい数に出会い、終末では数学と日常生活との関連を、これまでに学んだことをいかしながら追求できたことが、先の「学習のふりかえり」からも読み取ることができる。ただ単に平方根という学習内容を理解しただけではなく、その学習過程を通して算数・数学科が目指している数学的な思考力等を高めることができたといえる。さらにこうした力を高めるために、一つの学習単元、あるいは小学校算数科からつながっている学習単元の中に、発達段階に応じてどのような仕掛けを取り入れていくのかを、実践を通して追究していきたい。

(文責 後藤 幸広)