

『豊かに考え、表現する数学学習』 を実現するための課題設定について

光 森 千 修

はじめに

平成20年3月告示の新学習指導要領における数学科の目標には、

『**『数学的活動を通して**，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，**数学的な表現や処理の仕方を習得し**，**事象を数理的に考察し表現する能力を高める**とともに，**数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し**，それらを**活用して考えたりしようとする態度を育てる**』

とある。

また，その中でも特に数学的活動の指導に当たっては、

- ① 数学的活動を楽しめるようにするとともに，数学を学習することの意義や数学の必要性などを**実感する機会を設ける**。
- ② 自ら課題を見だし，解決するための構想を立て，実践し，その結果を**評価・改善する機会を設ける**。
- ③ 数学的活動の過程を振り返り，レポートに**まとめ発表することなどを通して**，その成果を共有する機会を設ける。

と、留意点が述べられている。

そこで、生徒の実態を踏まえながら、図形領域において、以下のようなことを研究しようと思いついた。

1. 生徒の実態から

生徒は、基礎的な知識や技能の習得はおおむね良好である。しかし、1つの解法で問題が解ければよしとする程度に留まったり、友だちと同じ考えをすることで安心してしまいう生徒がいた。そして、課題を考える際に式に表すことは得意とするが、小学校で培ってきた絵、図、文章などで表記し、多様な方法で考えようとする姿勢があまり見受けられないと感じた。そのため、豊かに考え、その手段として問題解決の過程を表現する力、必要な数学的概念に立ち返り説明する力はやや弱いと考えられた。

一方、1つの解法で満足することなく、他の解法や友だちとは違った視点から課題を捉え思考する生徒もいる。そのため、クラスで分かり合う場では、そのような考え方を聞いて、「あー、なるほど」「難しい」「自分のやり方の方がいい」などいろいろなつぶやきをすることもある。しかし、自分の考えに自信をもって、自らが積極的に挙手をして発表するということは少ない。

このような生徒の実態を踏まえて、普段から具体的に課題の場面がつかみやすいものを題材としたり、小学校の〇年生で学習していることが基となっていることなどを伝えながら学習を進めていくことにした。

2. 授業の取り組み例（第2学年）

（1）式の計算

「陸上競技場のレーンの幅とスタートラインの位置を文字を使って考える」ことを課題にし、普段何気なくスタートラインに立っている生徒もスタートラインの位置の違いはレーンの幅によって決まることに気づくことができた。

（2）連立方程式の導入

「バスケットボールの2点シュートと3点シュートがそれぞれ何本ずつ入ったか」を導入課題とした。入った得点だけを決めて本数を求める際、表を書きながら本数を1本ずつ変えて考える生徒、かけ算の式を書いて得点を計算しながら考える生徒、それぞれの本数を未知数 x 、 y として二元一次方程式の形に表して代入しながら考える生徒などの姿があった。そして、考えていく過程で本数が分数になり現実にはあり得ない状況が出てきたり、最大や最小で何本までしかシュートができないことなどを生徒が見つけた。連立方程式についての理解が深まっていった。その上で、1つの条件では解が1つに決まらないというスッキリしない状態が生徒の中で起こったため、条件を1つ加え、入ったシュートの合計本数も決めると、ぴったり合う解が1つ見つかるということを見いだすことができた。

（3）連立方程式の利用

漢文の「孫子算経」を提示することで、学習に興味を示すとともに、文章を読み取って課題に向かう姿勢が見られた。そして、課題解決では、学習したての連立方程式を用いて解く生徒が一番多かったが、小学校で学習している鶴亀算で解く生徒もいた。また、中学1年で学習する一次方程式でも解けることを示すと、1つの問題でも多様な解き方があることを実感している姿が見られた。

つまり、生徒たちが問題解決において、具体的な場面のイメージをもつことができると自分の考えをしっかりとちやすくなり、それによって多様な考え方を引き出すことがしやすくなると考えた。

このような課題設定における取り組みの成果をふまえた上で、『豊かに考え、表現する』子どもの姿を実現するべく、第2学年の図形領域において、数学的活動を多く取り入れた実践を行った。

3. 研究のねらい

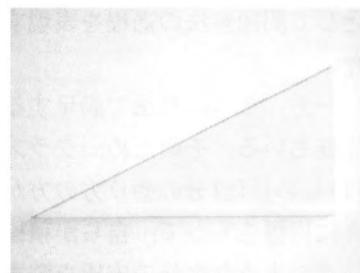
本研究では、第2学年の図形領域において、数学的活動を取り入れることで、イメージしやすく考えが深まっていき、豊かに考え、表現する力を養うことができると考える。

4. 研究の内容

（1）教材について

① 4枚の直角三角形からの四角形づくり

本単元では、5cm、10cm、 $5\sqrt{5}$ cmの4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせることで四角形をつくる活動をする。直角三角形の性質や錯角や平行線に着目して、小学校で学習している長方形、正方形、平行四辺形、ひし形の定義に立ち返って、それぞれの形を説明していくという課題を設定した。この4枚の直角三角形を用いると、一般的な平行四辺形だけでなく、直角があることで組み合わせ方によって長方形や正方形やひし形をつくることことができる。



② 教材開発のねらい

生徒は、前単元で直角三角形を学習しているので、三角形から四角形へと図形の見方や考え

方の世界を広げていくのに適している。また、できた形が長方形、正方形、ひし形するとき、小学校では四角形の包摂関係を学習していないので、それを平行四辺形と捉える生徒とそうでない生徒がいると予想され、「長方形や正方形、ひし形は平行四辺形と言ってよいのか」が単元全体を通しての新たな課題として生まれてくる。それを解決していく過程において、既習の直角三角形の性質、2直線と角、いろいろな平行四辺形の性質や特徴を関連させながら、適切な言葉や記号を用いて、相手に分かりやすく説明したり、考えを表現したりすることをねらいとした。そして、長方形や正方形、ひし形も平行四辺形であると理解していくことで、豊かな見方、考え方が育まれる教材と考えた。

③ 図形領域における視点

小中学校の図形領域は、小学校1年生で身近な立体の観察を通して特徴を理解し、次第に形の分類を始め、図形の内容をつかんでいく。そして、中学校3年生の「三平方の定理」で学習が終わる。

小学校低学年における学習では、具体物を使って、実際に図形を触ったり、つくったり、敷き詰めたりするなど、「直観」を大切にしたい外的な活動が多い。この具体的な活動を通して獲得した様々な経験が、小学校中学年から高学年の学習において、帰納的に図形の内容を形成していく。そして中学校の学習では、具体をより抽象化した図形の世界における「演繹的な思考」を中心とする内的な活動が主流となる。これら生徒たちの経験を小中で見直し、生かした授業づくりをするとき、「直観」と「演繹的な思考」を取り入れた学習は、各期や各学年に応じて適切な方法で取り組んでいくことが必要であると考えた。そこで、中学校でも引き続き具体物を使い、自分の手で操作する活動を取り入れることで、形が見えやすくなり、イメージができ、自分の考えをもちやすくなる。それが豊かに考え、表現する力の育成に効果的であると考えた。こうして、算数・数学を楽しく感じ、自ら意欲的、主体的に追求して多様な観点から図形を観る力、さらには、その過程を表現する力を伸ばしていく姿を実現していけるであろうと考えた。

(2) 学習の流れ

本単元での表現する力とは、図形を使って説明する力として捉えた。一人ずつ操作できる図形を用意し、図形をもとに説明するとき、辺に注目した説明であったり、角に注目した説明であったりすることが予想される。生徒それぞれの視点を大切に、必要な用語等を明確にしなが、言葉で順に説明したり、記号を使うと簡潔に表示しやすいことなどを意識し、より数学的な表現に近づけるようにしていきたいと考えた。そして、他人を納得させることができるように根拠となる事柄を、自らの活動を通して見いだした既習内容から明確にしていき、筋道を立てて説明することの大切さを実感できるようにしていきたいと考えた。一方、「自分の考えを伝えたい」という気持ちがあっても、うまく表現できない生徒もいる。初めから整った表現を求めるのではなく、自分なりの表現ができることを大切にしたいと考えた。

課題を『つくった四角形がどんな四角形か説明しよう』を課題として、まず直観でどんな形ができそうか予想する。予想することで、自分の考えをもち、確かめようとする活動の必要感が生まれる。また、友だちのつくった四角形が自分の思っていた形と違う場合、比較したいという気持ちをもつことができると考えた。さらに、多様な考え方ができるように、1つの形ができた人は、他の形もつくるように促したり、隣の人とはあえて違う形をつくるように言うことで、意欲を喚起していきたいと考えた。

実際に操作していく過程で、一般的な平行四辺形や長方形、正方形、ひし形ができていく。できた形から黒板にバラバラに掲示し、正方形、長方形、平行四辺形、ひし形の順に名前と理由を確認し、後に四角形の名前ごとに分類しながら掲示し直していく場を設定する。その際、生徒が自分の考えをもち、自分の言葉で表現できるように、ワークシートにできた形と理由を書く時間

を確保する。そして、全体で伝え合う。そこで、小学校で学習している定義を確認したり、どこに注目したのかを示したりしながら発表できるようにしたいと考えた。掲示された図形を見比べていくと、ひし形は向きによっては一般的な平行四辺形と同様に見える。平行四辺形である理由を確かめていく過程において、「ひし形も平行四辺形と言えるのか」ということを新たな課題にしていく。また、長方形や正方形も同じことが言えるかどうか、平行四辺形の定義に立ち返って検討し、その包摂関係を説明できるようにしたいと考えた。同様に、長方形と正方形の包摂関係にもふれていく。

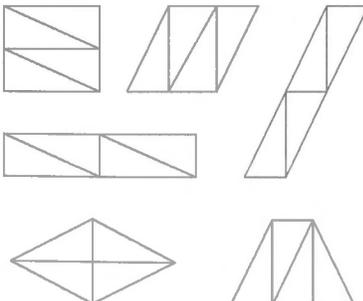
終末には、生徒が活動を通して、既習事項を使って説明することができたかどうかふりかえり、新たに生まれた問いを捉えて、次時の課題へとつなげていきたいと考えた。

(3) 活動展開計画 (全9時間 本時1/9)

次	主な学習活動	時	具体的な学習活動
1	直角三角形を組み合わせてできる四角形について説明しよう	1	・4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせて、いろいろな四角形をつくり、どんな形か説明する。
2	平行四辺形ってどんな形かな?	2 3 4	・平行四辺形の性質を導き出し、証明して確かめる。
3	平行四辺形って言えるかな?	5 6 7	・辺や角に注目して、何が言えれば平行四辺形になるのか考え、平行四辺形になる条件を証明して導き出す。
		8 9	・四角形の包摂関係について考える。

(4) 本時の学習

- ① ねらい 4枚の直角三角形を組み合わせて四角形をつくる活動を通して、平行線や角の性質などを用いながら、平行四辺形、長方形、正方形、ひし形などを説明することができる。
- ② 展 開

学習場面と子どもの取り組み	教師のはたらきかけと願い
1. 直角三角形の性質をふりかえる。 ・斜辺がある。 ・1つの角が直角(90°) 2. 4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせて、四角形をつくる。	・直角三角形の実物を提示しながら、直角三角形の性質を確認する。 ・5cm, 10cm, $5\sqrt{5}$ cmの4枚の直角三角形を配布する。
4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせて、四角形をつくろう	
<ul style="list-style-type: none"> ・平行四辺形 ・長方形 ・正方形 ・ひし形 ・たこ形 ・等脚台形 ・くさび形 など  <p style="text-align: center;">【別紙】</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・頭の中でイメージできるように、どんな四角形ができそうか予想する時間をとる。 ・具体物の操作によって、頭の中で予想していた形と違う形になることもあるので、偶然できた形だけでなく予想していた形もつくるように伝える。(その逆もあり) ・多様な考え方が出るように、隣の人とは違う四角形をつくってみるように促す。 ・1つできた生徒は、ワークシートに記録しておき、別の形もつくるように伝える。

つくった四角形がどんな四角形か説明しよう

3. つくった四角形がどんな名前なのか定義に立ち返って発表する。
- $5\text{ cm} + 5\text{ cm} = 10\text{ cm}$ になって、4辺が等しい。直角三角形できているので、4つの角がすべて 90° になる。(正方形)…①
 - 直角三角形できているので、4つの角がすべて 90° になる。(長方形)…②
 - 錯角が等しいので、2辺が平行になる。上の辺と真ん中の辺が平行。真ん中の辺と下の辺が平行。だから、上と下の辺が平行。右と左の辺も同じ。(平行四辺形)…③
 - 合同な直角三角形なので、辺の長さが等しい。(ひし形)…④ など
4. ひし形は平行四辺形かどうか考える。同様に長方形・正方形も考える。
- 錯角が等しいので2組の辺が平行になっているので、ひし形は平行四辺形と言える。
5. ふりかえりノートを書く。
- 理由を説明するとき、直角三角形の性質や錯角を使えば説明できることが分かった。
 - ひし形、長方形、正方形も平行四辺形であると分かった。
 - 正方形は長方形と言えるのか?

- 理由をワークシートに書くように伝える。
 - 黒板掲示用の直角三角形で、できた形から黒板にバラバラに掲示していき、どんな名前か①～④の順に説明した後で、四角形を分類しながら掲示し直す。
 - どの部分(辺・角)に注目をしたのか、黒板掲示で、確認しながら説明できるようにする。
 - 説明しにくいときは、言葉だけでなく、記号や印を使うと説明しやすいことなどを伝える。
-
- 向きをかえて置いたひし形が、平行四辺形に見えることから、ひし形は平行四辺形なのか、平行四辺形の定義に立ち返って説明する。
-
- 活動を通して、既習事項を使って、平行四辺形や特別な平行四辺形の定義に立ち返って説明することができたことを認める。
 - 新たな課題を、次時から証明を通して明らかにしていくことを伝える。

(5) 板書

つくった四角形がどんな四角形か説明しよう

4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせて四角形をつくろう

図形をバラバラに置いていく

正方形



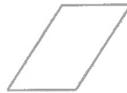
理由説明

長方形



理由説明

平行四辺形



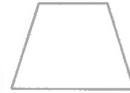
理由説明

ひし形



理由説明

台形



理由説明

その他

たこ形 など

理由説明

(6) 実際の学習場面

- ① 直角三角形を1枚見せながら【教材の提示】

【発問】 この三角形は何という三角形だったでしょう？

【反応】 直角三角形

【発問】 直角三角形ってどんな三角形だったでしょう？

【反応】 直角がある三角形

【課題の説明】 辺の長さが5cmと10cmの直角三角形を用意しました。



- ② 直角三角形を2枚見せながら

【発問】 この2枚の直角三角形を組み合わせたら、どんな形ができるでしょう？

【反応】 実際に生徒が手元でつくってみる。長方形、二等辺三角形、平行四辺形、正三角形？



- ③ 直角三角形を4枚見せながら【課題の提示】

【発問】 4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせたら、どんな四角形ができるかな？

※ 生徒一人ひとりがイメージする時間を確保する → 発表

【発問】 今日は、4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせて、四角形をつくってほしいと思います。

- ④ 4枚の直角三角形、ワークシートを配布し、個人学習の時間

4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせて四角形をつくろう

【補助発問】 できた四角形は、形やどのように組み合わせたかが分かるように、ワークシートに直角三角形ごとに縁取りしよう。縁取りが終わったら、次々つくっていこう。



※ 机間支援をしながら

【補助発問】 隣りの人とは違う四角形をつくってみよう。



- ⑤ できた四角形をバラバラに黒板に掲示 ※ 自由に掲示させる。



- ⑥ 【補助発問】 自分がつくった四角形がどんな四角形なのか名前を書こう。
それから、なぜ、その名前といえるのか、定義を思い出しながら、理由を書こう。

つくった四角形がどんな四角形か説明しよう

【机間支援】 なぜ〇〇が等しくなるかを書いていこう。定義は何だったかな？



- ⑦ 図形を分類していく → 発表
名前 → 分類 → 定義 → 理由

- ⑧ これは何という名前ですか？ 正方形ってどんな形？ なぜ〇〇が等しくなるの？

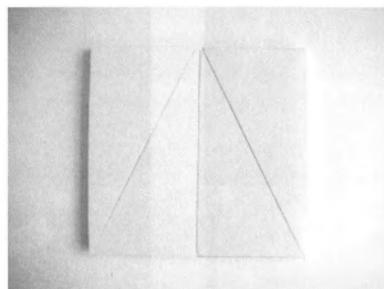
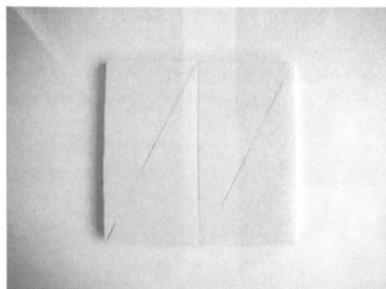


(7) 実際の生徒の説明例

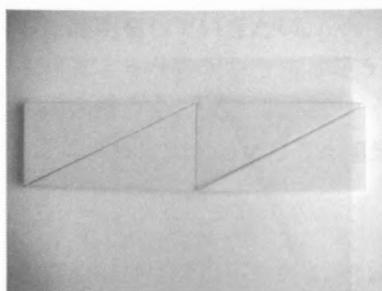
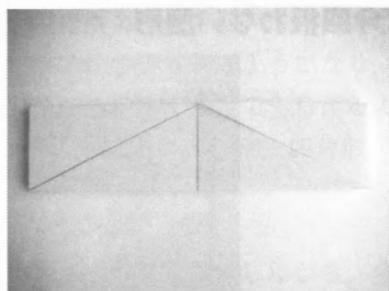
<p>正方形の説明</p> <ul style="list-style-type: none"> • 4つの辺が、5 cm + 5 cm と 10 cm で等しい。 • 4つの角が、● + × と 90° で等しい。 • 直角三角形は合同だから対応する角は等しい。残りの鋭角の和は、90°。 	<p>長方形の説明</p> <ul style="list-style-type: none"> • 直角三角形の1つの角は90°。 • 4つの角がすべて90°。● + × = 90° • 直角三角形は合同だから対応する角は等しい。残りの鋭角の和は、90°。
<p>平行四辺形の説明</p> <ul style="list-style-type: none"> • 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行である。 • 中のある直角三角形は合同 • 錯角○と○は等しい。 • 上の辺と下の辺は平行。 • 左と右の辺は平行。 • 同位角が等しいので平行。 	
<p>ひし形の説明</p> <ul style="list-style-type: none"> • すべての辺が等しい。 • 直角三角形の対応する辺(斜辺)なので等しい。 	

予想される四角形

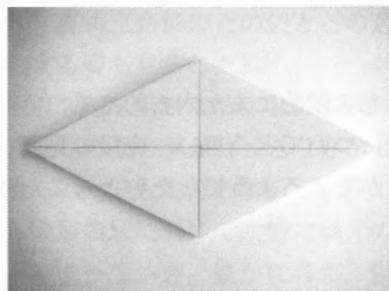
正方形



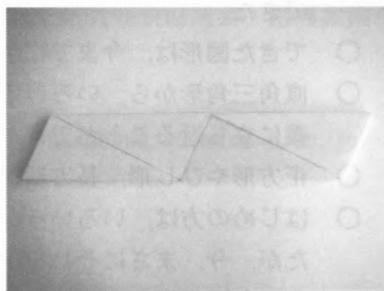
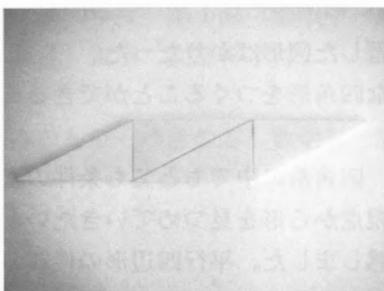
長方形



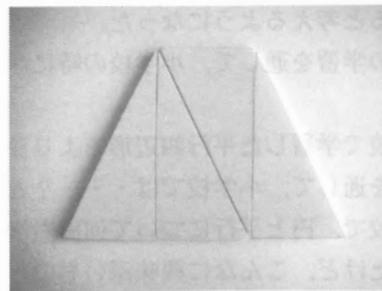
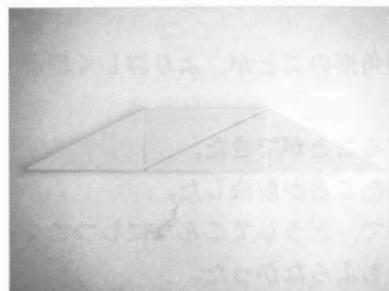
ひし形



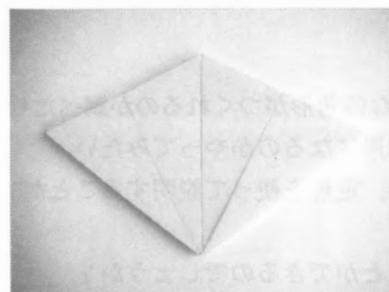
平行四辺形



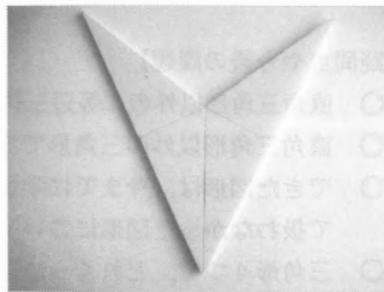
台形



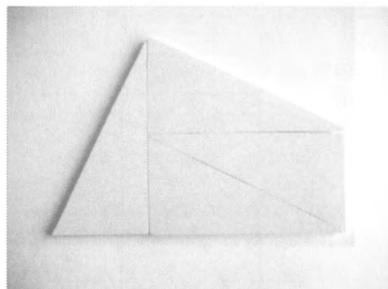
たこ形



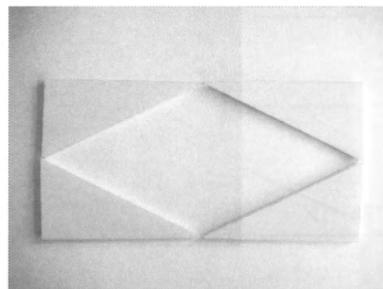
楔形



四角形



今回扱わない図形



5. 学びの捉えとふりかえり

時間ごとの「学習のふりかえり」を活用して、自らを客観的にまた内省的に見つめ直していくことを充実させていった。そして、生徒自身が自分の探究についてどう思い、今後の見通しをもっているかを捉え、自らの力で今後の追求につなげていくことができるようにしたいと考えた。

【新たに分かったり、できるようになったこと】

- ○○くんの平行四辺形の証明を聞いて、錯角をうまく利用すればいいと思った。
- 2つの直角三角形だとできる図形は限られてくるけど、4つになると四角形だけでもたくさんできた。
- できた図形は、今までに学習した図形ばかりだった。
- 直角三角形から、いろいろな四角形をつくることができることを知り、それによって図形の定義に立ち返ることができた。
- 正方形やひし形、長方形は、四角形の中でもとても条件の多い四角形だと思った。
- はじめの方は、いろいろな視点から形を見つめていきたいとか、そんな感じなことを書いていたが、今、まさにそれを実感しました。平行四辺形の性質のどこを使うかいろいろな視点で見ることは大事なんだと再確認できた。
- 小学校のときには、正方形が四角形の元だと思っていたけど、今では、平行四辺形が元になっていると考えるようになった。
- 今回の学習を通して、小学校の時に学習した四角形のことを、より詳しく理解することができた。
- 小学校で学習した平行四辺形をより深く学習することができた。
- 証明を通して、小学校では・・・？と思っていたことが解決した。
- 小学校で、円と平行について何度も学習したので、どうしてこんなにしつこくするのかと聞いていたけど、こんなに興味深いものだとは思ってもよらなかった。
- やり方を覚えるのではなく、なぜ？どこが？という気持ちでやるといい。
- 平行四辺形は、いろいろな性質をもった、不思議な図形だと思った。

【疑問点や今後の課題】

- 直角三角形以外の二等辺三角形でも、いろいろな四角形が作れるのか調べたり、証明したい。
- 直角三角形以外の三角形でつくったら、どんな形になるのかやってみよう。
- できた図形は、今までに学習したあらゆる定義、定理を使って説明することができたが、授業で扱わなかった図形についても考えたい。
- 三角形4つで、どれくらいの四角形をつくることができるのでしょうか？
- たこ形の定義が調べたい。

- 四角形の中に直角三角形が入っていることを利用した証明をしていきたい。
- 平行四辺形の性質を操れるようになり、人を納得させるような証明をできるようになること。だから、分かりやすく読んでもらえるように、数学的国語力をつけたい。
- 平行四辺形だけでなく、台形、四角形、多角形ならどのようになるのだろうか？想像してみます。

6. まとめ

生徒一人ひとりが、教具を動かしながら、今、図形のどこの部分に注目して考えているのかがはっきり見えていた。また、あらかじめ頭の中で四角形を予想した上で、作っていくことで、イメージを持ちながら進めることができた。そして、自分が作った四角形を隣の生徒に見せ合うことで、新たな発見があったり、直角三角形のどの辺とどの辺を組み合わせれば、その形になるのかなど、疑問を解決していこうとする姿も見られた。

実際の図形の辺や角を組み合わせながら四角形を作っているので、四角形の定義の説明においても、どの辺なのか、どの角なのかははっきり分かり、説明がしやすくなったと考えられる。そして、その後の図形の証明においても大切になってくる、等しい辺や角に注目していく姿が自然と見受けられた。この点からも、図形領域において、特に単元の導入から、数学的活動を取り入れることで、イメージしやすく考えが深まっていき、豊かに考え、表現する力を養うことができると考えられる。

参 考 文 献

- ・島根大学教育学部附属学校園 平成20年度 第1回 幼小中一貫教育研究発表協議会 指導案集
- ・中学校学習指導要領 平成20年3月 告示 文部科学省

(みつもり ゆきのぶ 数学科 32-sensyu@edu.shimane-u.ac.jp)