

思考力・判断力・表現力を高めるための図形指導

安 野 洋

はじめに

平成20年3月告知の新学習指導要領において、中学校数学科の教科目標は次のように改訂された。

数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。

特に、数学的活動については誰もが注目し、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感させるための手立てを考え、実践している。知識・理解や表現・処理面だけでなく、どのように数学を活用していく力をつけていくかが課題の一つとしてとらえられている。

本学校園算数・数学科では平成18年度より幼小中一貫教育を進める中で、11年間の子どもたちの学びを考えたときに、

学び合う関係の中で、友達の様々な考えを受け止め、

より理解を深め発展させていこうとする姿（を土台として）

「豊かに考え」……これまでに習得した知識や技能、また類推、帰納、演繹などの数学的な考え方を活用しながら、自分（たち）の力で問題解決を進めていこうとする姿

「表現する」……言葉や数、指揮、図など数学的な表現を用いて、自分の考えをわかりやすく説明しようとする姿

を豊かな学びの姿としてとらえ、「豊かに考え、表現する算数・数学学習」を追及していくことが、子どもたちにとって本当に算数数学が「わかる」ことにつながると考えている。そして、そのためには「数学的な見方や考え方の一層の伸長をめざし、問題解決における多面的な思考力・判断力・表現力の向上を図ること」が重要であるとと考えている。

算数・数学科では、育てていきたい「思考力」「判断力」「表現力」を次のようにとらえている。

- 思考力…これまでに習得した数量や図形に関する知識や技能、また、類推、帰納、演繹、図形化、発展的な考え方などの数学的な考え方を活用しながら問題解決をめざす力。
- 判断力…問題解決に向けて、見通しや筋道を立てたり、様々な解決方法を比較してよりよいものを選択したり、数学的な根拠をもとに正しいものを見つけ出そうとする力。
- 表現力…言葉や数、式、図など数学的な表現を用いて、自分の考えをまとめて整理し、他者にわかりやすく説明しようとする力。

そしてこれらは一連のものであり、相互に補完し合うことでそれぞれの力を伸ばしていくことができると考えている。

昨年度、本校の研究において四角形の導入時に4枚の合同な直角三角形を組み合わせて四角形をつくり、それぞれの形を説明する活動を行なった。自分で操作する活動であるから形が見えやすくなり、イメージができ、自分の考えをもちやすくなる。それが豊かに考え、表現する力の育成のきっかけとなった。このような数学的活動を取り入れ、更に豊かに考え、表現する力の育成を目指して

①別の場面で同じ教材の活用はできないか

②思考力・判断力・表現力を伸ばすために、より論理的な場面での利用はできないか
ということを考え、上記の直角三角形の別の活用を研究することにした。

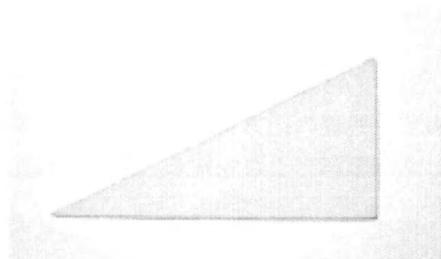
1. 研究のねらい

4枚の合同な直角三角形を組み合わせて平行四辺形をつくり、それが本当に平行四辺形か証明し、伝え合うようなかわり合いをもたせたことは、思考力・判断力・表現力を高め合うことに有効であったか考察する。

2. 研究の実際

(1) 教材について

平成20年度、本校の研究では四角形の導入において、5cm、10cm、 $5\sqrt{5}$ cmの4枚の合同な直角三角形を隙間なく組み合わせて四角形をつくり、それぞれの形を説明していく活動を行った。操作活動を通して三角形から四角形へと図形の見方や考え方を広げていくために適した教材であり、「長方形やひし形、正方形は平行四辺形と言ってよいのか」と新たな疑問をもたせ、平行四辺形の性質へとつなげた教材である。



今年度はより論理的な場面での利用を考え、平行四辺形になる条件の学習を行った後に、同じ教材を使っていろいろな平行四辺形をつくる活動をしようと考えた。合同な直角三角形を組み合わせて平行四辺形をつくるので、1つの平行四辺形においても多様な証明方法がある。自分が考えた証明とは違う他の生徒が考えた証明を知ること、その図形を新たな方向から見直して多様な考え方が身につくと考えられる。また、平行四辺形をつくる中で特別な平行四辺形である長方形やひし形、正方形が出てくる。そこで「長方形やひし形、正方形は平行四辺形だろうか」という新たな疑問が湧き、それを確かめるために証明をする必然性が出てくる。そしてそれらを証明していく中で、平行四辺形の包摂関係を生徒自らの力で見つけられるのではないかと考えた。

(2) 図形領域について

小学校における図形の学習は、操作的な活動や直観的な取り扱いが中心である。身の回りにある様々なものを「形」「大きさ」「位置関係」という観点からとらえ、具体物を操作して考えてきている。中学校第1学年では、図形についての作図などを直観的な見方や考え方を深めることを中心としながら、論理的に考察し表現する能力を培っていく。第2学年では論証によって図形の性質を調べ、演繹的に考え、新たな性質を見いだす。そして第3学年でも数学的な推論に関する能力を伸ばしていく。このように小中学校の図形領域においては、段階を追って、より論理的に考え、表現する力の育成をめざしている。

図形の証明は演繹的な推論のよさを感じ、わかりやすく表現する能力を養うことをねらいとしている。図形の証明に取り組む中で、小学校から学んできたことをもう一度振り返ったり、新たに学んだことを活用したりして、そのことを根拠にして、筋道をたてて証明することが、表現する力を育てることにつながる。また、日常生活においても自分の考えを他の人にわかりやすく説明できるということになると考える。

(3) 学習の流れ

本単元では、すでに学習した平行線の性質、三角形の合同条件などを基にして、演繹的に考えることによって平行四辺形の性質や条件を考察し、図形についての理解を深めるとともに、論理的に考察し表現する能力を養うことが大切なねらいである。

三角形の合同条件を利用して平行四辺形の定義から、平行四辺形の性質を導き出す。平行四辺形の対角線を結び、2つの三角形に分けて証明することや、証明した性質を次の性質の証明に利用することは生徒が学んだことを振り返る中で気づいていけるのではないかと考えた。

平行四辺形になる条件については、性質と混同しないように気をつけ、まず、条件のうち「対

角線がそれぞれの中点で交わる時」について、その四角形が平行四辺形といえるかどうかを問う。それを手がかりとして、平行四辺形の性質の逆について考えていく。

本時では、まず、4枚の合同な直角三角形を組み合わせて平行四辺形をつくる活動を行う。各自で直角三角形を操作するが、グループで相談しながら考えることで、見つけにくい生徒もよりたくさんの平行四辺形に触れることができる。このとき、なるべく他のグループが思いつかないような平行四辺形をつくることを伝えて、長方形やひし形、正方形を平行四辺形としてとらえ、つくる生徒が出てくるようにしたい。生徒たちはこのように操作活動・グループでの相談をしながら、平行四辺形かどうか思考・判断していく。そしてグループでつくった平行四辺形をクラスで発表し、どのような平行四辺形をつくったか共有する。

グループの話し合いでひし形を平行四辺形ととらえていない生徒もいるであろう。その生徒にとっては驚きの場面となる。そこでひし形を取り上げて、「ひし形は平行四辺形とってよいか」と問うことで、本当に平行四辺形なのか、それともひし形なのか証明したくなるのではないかと考える。そして証明し、議論していくうちにひし形と平行四辺形の両方であることに気づく生徒が現れ、生徒自身が包摂関係を説明することで、四角形について探って伝え合う活動になると考えられる。また、平行四辺形だと証明する時、図形の着目するところが違えば平行四辺形になる条件も変わるので、多様な証明が出てくると考えられる。それらの考え方を紹介することも面白い。生徒自身が考えつかなかった証明方法を他の生徒から学ぶこととなる。このとき気をつけることは、「直角三角形を組み合わせたとき直線になっているか」など、本来証明しなくてはならないことをどこまで証明するかである。そのことをきちんと証明したいと考える生徒も出てくる。その生徒にはその証明を考えてもよいことを伝えるが、本来証明して欲しいことは「平行四辺形とってよいか」なので、まずはそのことについて目を向けることが大切である。

そして長方形や正方形についても同様に、平行四辺形でもあることを確認して、四角形について探って伝え合う活動になる。

(4) 活動展開計画 (全7時間 本時6/7)

| 次 | 主な学習内容 | 時 | 具体的な学習内容 |
|---|----------------|--------|----------------------------------------------|
| 1 | 平行四辺形はどんな形だろう？ | 1 2 | ・平行四辺形の性質を導き出し、証明する。 |
| 2 | 平行四辺形といえるには？ | 3 4 5 | ・平行四辺形になる条件①～⑤を辺や角に注目して証明し、導き出す。 |
| 3 | いろいろな四角形 | ⑥ 7 | ・いろいろな四角形が平行四辺形といえるか確かめる。 ・四角形の包摂関係をまとめる。 |

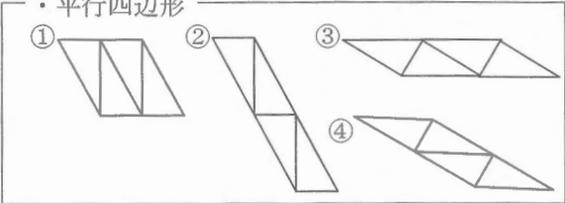
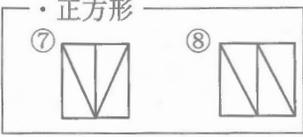
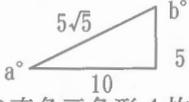
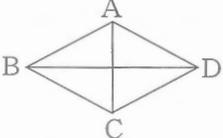
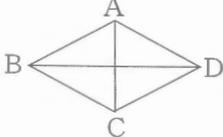
(5) 評価規準

| 次 | 時 | 数学への関心・意欲・態度 | 数学的な見方や考え方 | 数学的な表現・処理 | 数量・図形などについての知識・理解 | 数学科における思考力・判断力・表現力 |
|---|-------------|-------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1 | 1 2 | 平行四辺形の性質を調べ、演繹的に証明しようとしている。 | 平行四辺形の性質を演繹的に証明している。 | 平行四辺形の性質をもとにして辺の長さや角度を求めている。 | 平行四辺形の性質を理解している。 | 平行四辺形の性質を根拠を明らかにして筋道を立てて証明し、表現している。 |
| 2 | 3 4 5 | 平行四辺形になるための条件を調べようとしている。 | 平行四辺形になるための条件を論証しながらとらえている。 | 辺や角が与えられた四角形が平行四辺形であるか判断している。 | 平行四辺形になるための条件を理解している。 | 平行四辺形になるための条件を、根拠を明らかにして筋道を立てて証明し、表現している。また、条件より、平行四辺形かどうか判断している。 |
| 3 | ⑥ 7 | 四角形の性質に興味をもち、四角形の包摂関係を明らかにしようとしている。 | いろいろな四角形の性質やなるための条件を、四角形の包摂関係をとらえてまとめている。 | 長方形、ひし形、正方形の性質を証明し、ある四角形が、長方形、ひし形、正方形のいずれであるか判断している。 | いろいろな四角形の性質やなるための条件を把握し、包摂関係を理解している。 | いろいろな四角形が平行四辺形かどうか根拠を明らかにして筋道を立てて証明し、表現している。 |

(6) 本時の学習

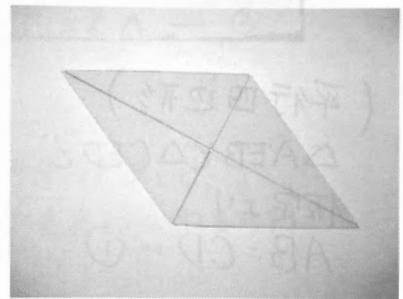
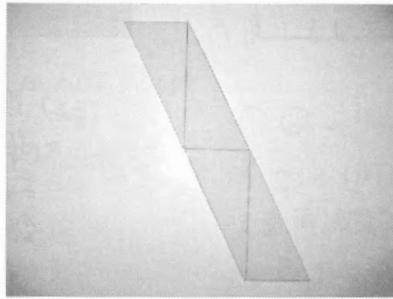
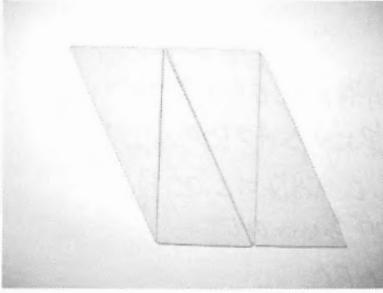
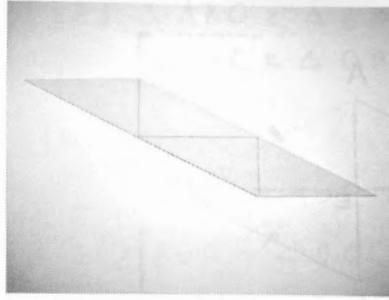
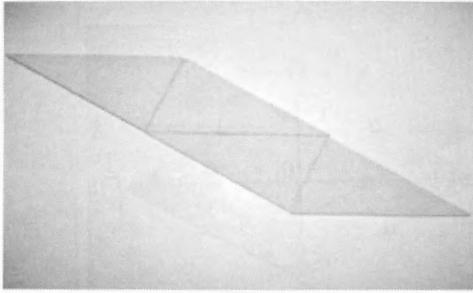
①ねらい 4枚の合同な直角三角形を使って平行四辺形をつくる活動を通して、ひし形は平行四辺形だということに気づき、それを筋道を立てて明らかにすることができる。

②展開

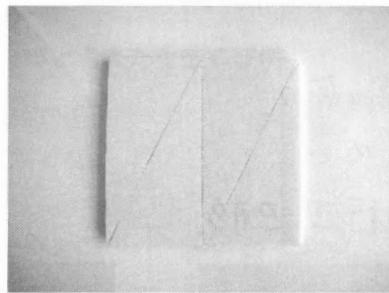
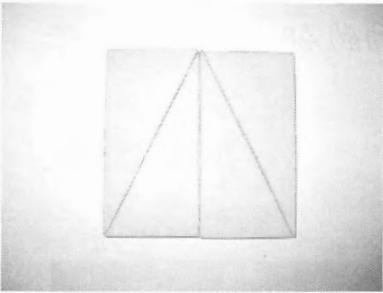
| 学習場面と子どもの取り組み | 教師の支援と願い・評価 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1 操作に用いる直角三角形について確認する。</p> <p>2 4枚の直角三角形を隙間なく組み合わせて、平行四辺形をつくり発表する。</p> <p>・平行四辺形</p>  <p>・長方形</p>  <p>・正方形</p>  <p>・ひし形</p>  <p>・⑨はひし形だ。 ・自分たちがつくっていない形だ。</p> <p>3 つくった四角形が平行四辺形かどうか考える。</p> | <p>・直角三角形の実物を見せて、直角をはさむ2辺の長さを伝える。</p>  <p>・5 cm, 10 cm, $5\sqrt{5}$ cmの直角三角形4枚とワークシートを配布する。</p> <p>・グループになり、直角三角形をいろいろ操作してたくさんの平行四辺形をつくるように伝える。</p> <p>・つくった図形をワークシートに記入するように指示する。</p> <p>・各グループでつくった平行四辺形を発表させて、どんな平行四辺形を考えたか紹介する。</p> <p>・⑨は見方によって、平行四辺形に一番見えやすいので、⑨を取りあげる。</p> <p>・⑨の図形が平行四辺形だと気づいていない生徒の疑問を取りあげ、平行四辺形とってよいか投げかける。</p> |
| <p>⑨の図形は、平行四辺形とってよいか証明しよう。</p> | |
| <p>・ひし形だと考えた生徒</p>  <p>4つの合同な直角三角形なので、4つの辺の長さがそれぞれ等しいからひし形だ。</p> <p>・平行四辺形だと考えた生徒</p>  <p>例 4つの合同な直角三角形なので $AD = BC \dots ①$ $AB = DC \dots ②$ ①, ②より 2組の向かい合う辺がそれぞれ等しいので平行四辺形といえる。</p> <p>・ひし形と平行四辺形の両方だと考えた生徒 ひし形だけど平行四辺形になる条件にもあてはまるからどちらともいえる。</p> <p>4 ふりかえりノートを書く。</p> | <p>・誰もがわかるように伝えるためには、どうすればよいか問うことで、証明の意義を感じさせるようにする。</p> <p>・グループでどちらだと思うか相談して証明するように、自分の言葉で表現するように伝える。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>—評価の観点(思考力・判断力・表現力)—</p> <p>つくった平行四辺形で、ひし形は平行四辺形かどうか根拠を明らかにして筋道を立てて証明し、表現している。 【評価方法 発表・ワークシート】</p> </div> <p>・平行四辺形とひし形が結びついていることを生徒の言葉でまとめる。</p> <p>・時間があれば、⑤や⑦の形などにも触れる。</p> |

(7) 予想される平行四辺形

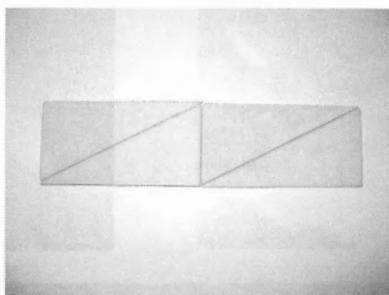
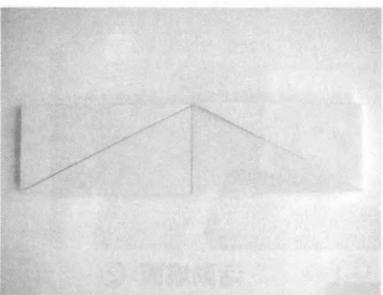
○平行四辺形



○正方形

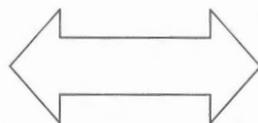
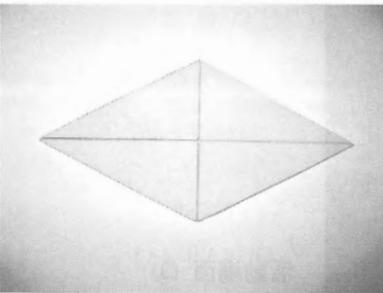


○長方形

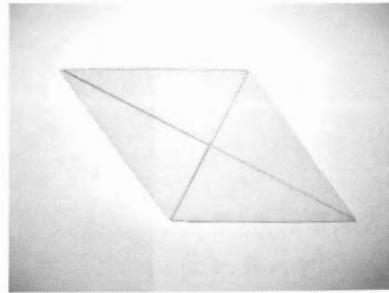


ひし形は平行四辺形に
一番見えやすい。

○ひし形

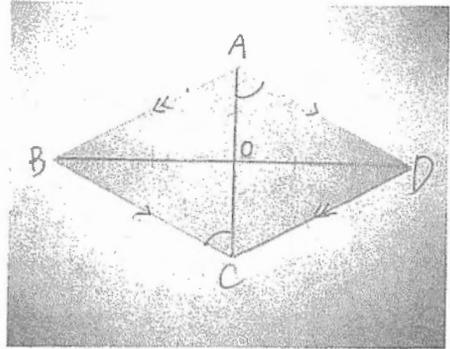
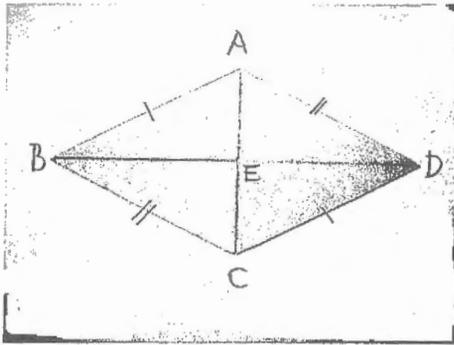


ひし形か
平行四辺形か



4. 実際の生徒の証明

平行四辺形ととらえて考えた生徒の証明



(平行四辺形)
 $\triangle AEB$ と $\triangle CED$ と
 仮定より
 $AB=CD$... ①
 $\triangle AED$ と $\triangle CEB$ と
 仮定より
 $AD=BC$... ②
 ①、②より、2組の向かい合う
 辺がそれぞれ等しいので、
 四角形 $ABCD$ は平行四辺形。

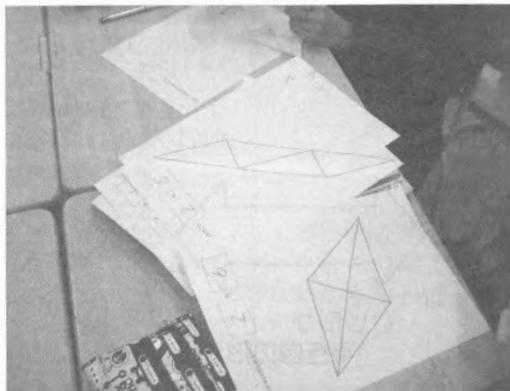
(証明) 四角形 $ABCD$ において
 仮定より $\triangle AOD \cong \triangle COB$
 よって $\angle OAD = \angle OCB$
 錯角が等しいので
 $AD \parallel BC$
 同様に、 $AB \parallel DC$
 向かい合う2組がそれぞれ平行なので
 四角形 $ABCD$ は平行四辺形



活動場面 ①

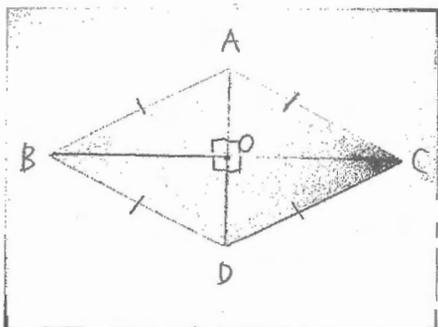


活動場面 ②



活動場面 ③

ひし形と考えた生徒の証明①



(証明) $\triangle ABO \cong \triangle BOD \cong \triangle AOC \cong \triangle ODC$ ①

仮定より

$$\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ \\ = \angle BOD = \angle DOC \quad \text{--- ①}$$

仮定

$$\triangle ABO \cong \triangle BOD \cong \triangle AOC \cong \triangle ODC$$

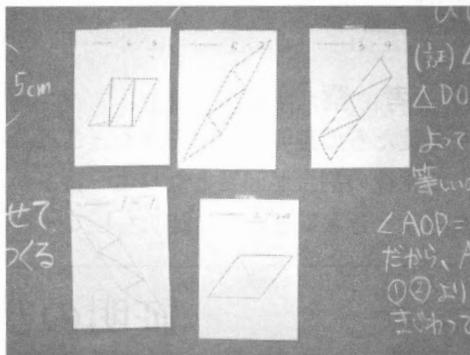
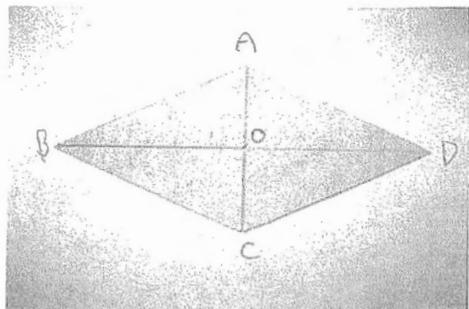
$$\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ \\ \Rightarrow \angle BOD = \angle DOC$$

$$AB = BO = OD = DC = CA \quad \text{--- ②}$$

① ② より

4つの辺が全て等しく、
対角線が垂直に交わるので
四角形 ABCD は
ひし形である。

平行四辺形とひし形、どちらでもあると考えた生徒の証明



生徒が考えた平行四辺形

(証明) 四角形 ABCD で

仮定より、全ての三角形が合同なので、
 $\triangle AOB \cong \triangle AOD \cong \triangle COB \cong \triangle COD \dots$ ①

①より、

$$OA = OC \dots ②$$

$$OB = OD \dots ③$$

②、③より

四角形 ABCD の対角線の中点でそれぞれ交わり、
四角形 ABCD は平行四辺形、といえる。

同様にして、

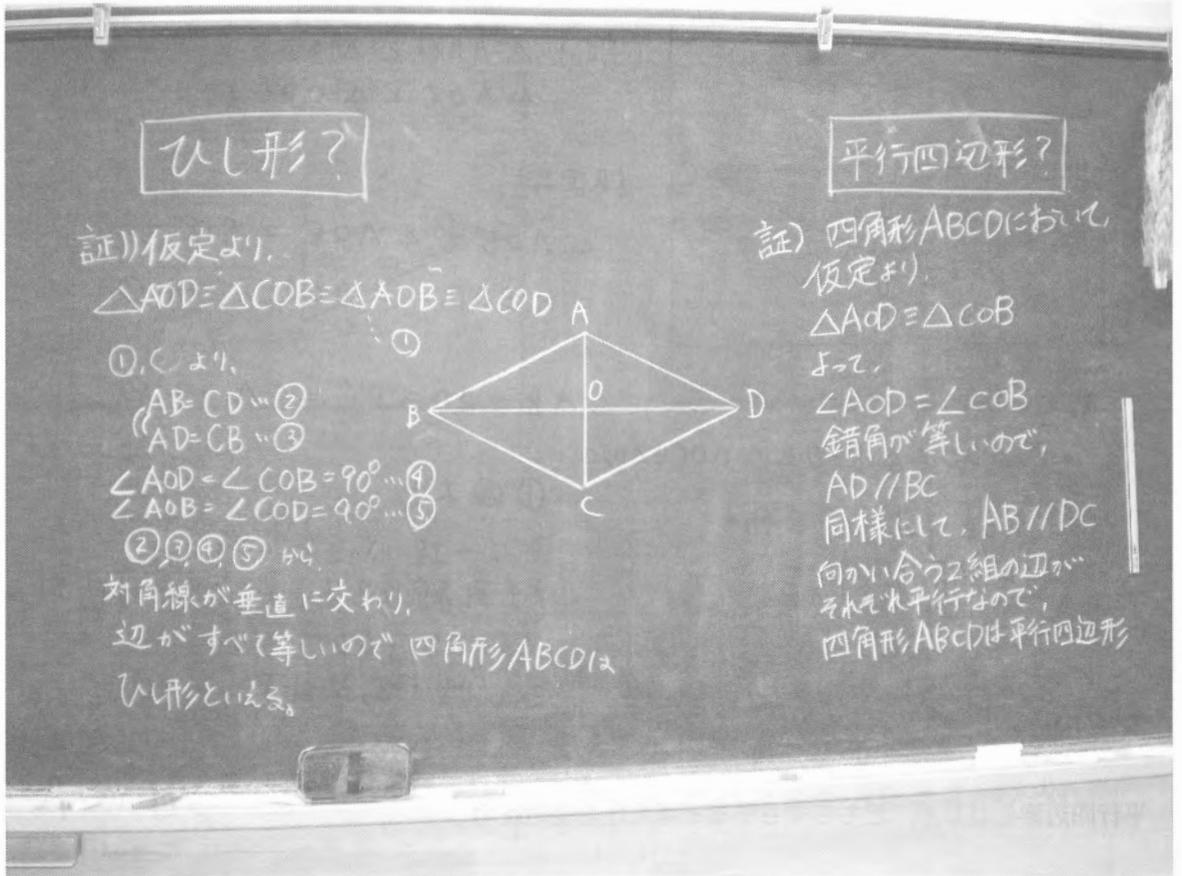
①より、

四角形 ABCD の全ての辺が等しいので、
ひし形ともいえる。

ひし形の対角線はすべて
垂直に交わるので

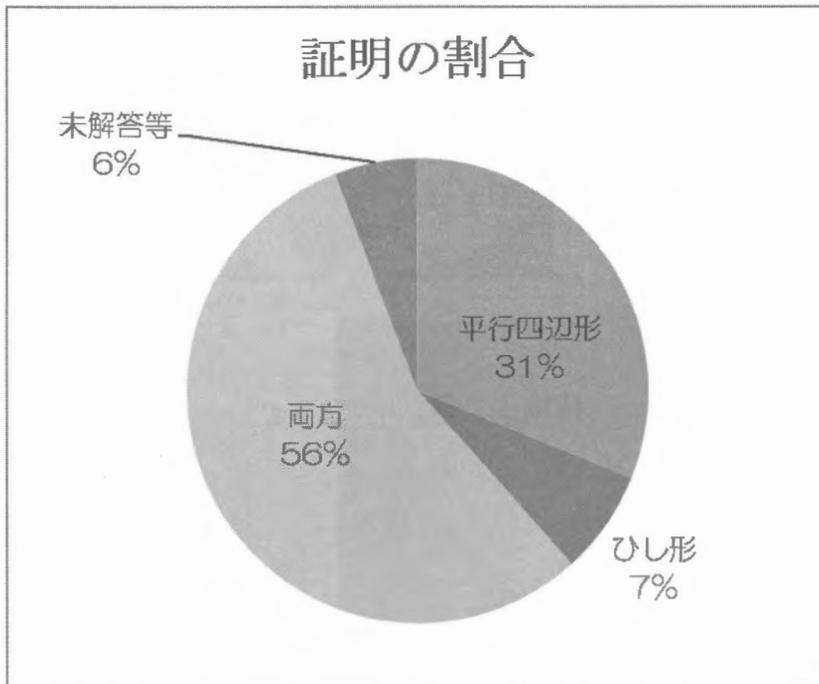
でも。

証明の板書



5. 考察

生徒たちの証明の割合をみたところ、ひし形と平行四辺形の両方であると結論づけて証明を解いている生徒の割合が56%となり、一番多かった。この活動をとおして、ひし形と平行四辺形のどちらでもあると考えてどちらの証明もしていると考えられる。また、黒板でどちらの証明も紹介したところ、



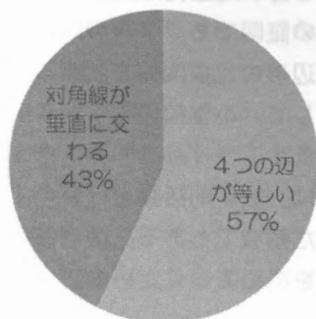
それ以外の生徒も平行四辺形とひし形、どちらについても証明ができていることから、ひし形は平行四辺形でもあることを理解し、平行四辺形とひし形の包摂関係を理解している姿が見られた。

ひし形の証明（ひし形のみ）



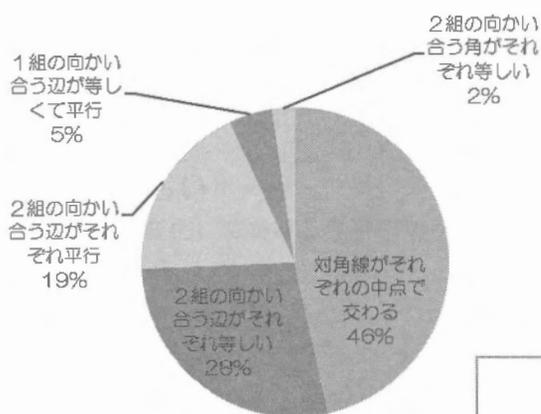
ひし形の証明については定義をきちんと押さえずに行なったので、「4つの辺が等しい」こと以外にも「対角線が垂直に交わる」ことを証明している生徒が多かった。[ひし形の証明 左図：ひし形のみ 下図：両方証明]

ひし形の証明（両方証明）



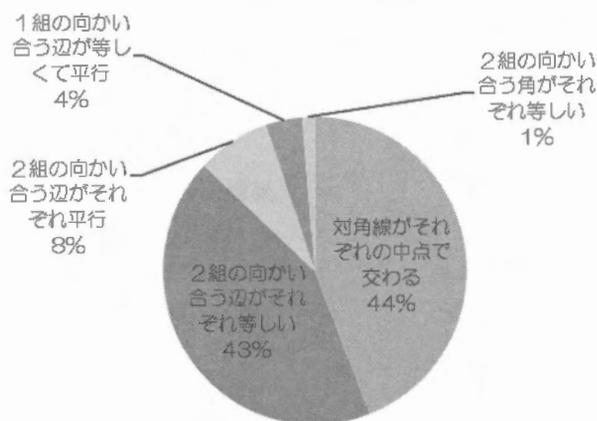
平行四辺形の証明についてはどの条件の証明も見られた。対角線について注目する生徒が多かった。両方証明した生徒においては辺が等しいことに注目した生徒が多く見られた。ひし形の「4つの辺が等しい」ことと、平行四辺形の「2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」ことを関連づけて見ていると考えられる。

平行四辺形の証明（平行四辺形のみ）



両方証明の場合、辺に着目していると考えられる。

平行四辺形の証明（両方証明）



[平行四辺形の証明 上図：平行四辺形のみ 右図：両方証明]



次の時間に長方形や正方形についても同様の問いかけをしたところ、すんなりと「どちらでもある」という答えが返ってきた。自分たちで長方形や正方形であることも平行四辺形であることも、どちらも成り立つことを証明し、四角形の包摂関係について理解することができた。

6. まとめ

教具を使いながら、楽しく学習することができた。小学校でひし形について学習するときに平行四辺形でもあることを学んだ生徒もいたが、今回改めて論理的に証明することで納得していた。また、両方の証明を書いた生徒は、ひし形の定義である「4つの辺がすべて等しい四角形」ということから、平行四辺形の証明でも「2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」ことに注目して証明している。ひし形と平行四辺形の包摂関係を認識していることの一つの証拠だと考えられる。

反省点として、小学校の時学習してはいるが、ひし形の定義をもう一度押さえてから取り組んでみてもよかった。

図形領域は、数学的活動を行いやすい領域である。また、思考力・判断力・表現力をつけるためには大変適した領域でもある。図形領域だけでなく他の領域でも、数学的活動を通して、思考力・判断力・表現力を高めていくための研究を更に続けていきたい。

参 考 文 献

- ・文部科学省「中学校学習指導要領」（平成20年度3月告示）
- ・島根大学教育学部附属学校園 第2回 幼少中一貫教育研究発表協議会 指導案集（平成21年度）

（やすの ひろし 数学科 h-yasuno@edu.shimane-u.ac.jp）