

「数学的な思考力・判断力・表現力」を高める学習指導の一考察 ～数学と日常生活との関連に気づき、追求する活用型学習の授業をめざして～

後 藤 幸 広

はじめに

平成20年（2008）3月に告示された学習指導要領が移行期間を経て、平成24年度（2012）より全面実施されている。中学校数学科においては、21年度より先行実施されており、既に全学年において本格的に取り組まれている。この学習指導要領の中の「第1章総則 第1教育課程編成の一般方針」では、次のように述べられている。

「学校の教育活動を進めるに当たっては、各学校において、児童（生徒）に生きる力をはぐくむことを目指し、創意工夫を生かした特色ある教育活動を展開する中で、基礎的・基本的な知識及び技能を確実に習得させ、これらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力その他の能力をはぐくむとともに、主体的に学習に取り組む態度を養い、個性を生かす教育の充実に努めなければならない。」（※下線は、筆者による。）

また、「第4指導計画の作成等に当たって配慮すべき事項」では、

「（1）各教科等の指導に当たっては、児童（生徒）の思考力、判断力、表現力等をはぐくむ観点から、基礎的・基本的な知識及び技能の活用を図る学習活動を重視する（以下略）」

「（2）各教科等の指導に当たっては、体験的な学習や基礎的・基本的な知識及び技能を活用した問題解決的な学習を重視するとともに、児童（生徒）の興味・関心を生かし、自主的、自発的な学習が促されるよう工夫すること。」（※下線は、筆者による。）

とされている。

上述のように今回の学習指導要領では、子どもたちの思考力・判断力・表現力等を確実にはぐくむために、まずは各教科において、基礎的・基本的な知識・技能を習得させるとともに、それぞれの教科の知識・技能を活用する学習活動を充実させることを目指しているといえる。

また、学習指導要領の中で用いられている「習得」「活用」という用語に関して、安彦（2008）は「習得型学習、活用型学習は、主として各教科で行われるものであり、探究型学習は、主として総合的な学習で行われるものである。」とし、その上で特に「活用型」学習の意義と役割について、次の（1）～（3）のように述べている。

（1）「探究型」学習へ「習得型」学習の成果をつなぐ「媒介的役割」をもつ。

（2）（探究型では、子どもが何を活用するのか、また活用すべきなのかもわからない状況でスタートするが、）活用型では、活用すべきものはその教科の基礎的・基本的な知識・技能として、子どもにも明示されているものである。

（例）折れ線グラフにおいて、縦軸と横軸の目盛りを変えると同じグラフでもどうなるのかを考えさせるなど「発展的な学習の場面」

（3）知識・技能を活用する体験を通して、「探究型」学習への「馴らし運転」的な経験を積むということ。事前のシュミレーション的経験、あるいは容易的なレベルの基礎経験として取りまわせるものである。よって、教師によって工夫・考案され、教師によって与えられるものであり、（本来、子どもの方から提案されるものではない。）

そこで、数学学習において数学的な思考力・判断力・表現力を高める具体的な方策の1つとして、

授業の中に活用型学習を取り入れることの有用性について、第3学年「数と式」領域における取組をもとに実践的な研究に取り組むこととした。

1 研究のねらい

本研究では、まず先行研究をもとに、数学的な思考力・判断力・表現力に関する考察や、学んだことをいかす活用型学習と活用型学習に関する生徒の実態について考察していく。そして、「数と式」領域における学習場面（主として数学的活動）において、学んだことをいかす活用型学習を取り入れることにより、数学的な思考力・判断力・表現力を高める学習指導の在り方の具現化をめざしていく。

2 研究の構想

(1) 数学的な思考力・判断力・表現力とは

まず、学力の三要素の1つである思考力・判断力・表現力についてふれ、その中で特に算数・数学教育において育成することが求められている数学的な思考力・判断力・表現力に関して、先行研究等をもとに明らかにする。

① 学校教育法等における思考力・判断力・表現力

現行の学校教育法では、生涯にわたって学習する基盤が培われるよう、第30条第2項において「学力の三要素」として、「基礎的な知識及び技能」「思考力・判断力・表現力その他の能力」「主体的に学習に取り組む態度」が規定されている。

そして中教審最終答申（2008）では、これらを「基礎的・基本的な知識・技能」「知識・技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等」「学習意欲」と表記している。特に思考力・判断力・表現力に関する記述では、「その他の能力」や「等」となっており、これらは「課題発見能力」や「問題解決能力」を意味している。また答申の中では、思考力と判断力と表現力は一体的なものとしてとらえられている。これらを受けて、学習指導要領において子どもたちの思考力等をはぐくむことが強調されている。さらに「児童生徒の学習評価の在り方について（報告）」（2010）では、学習指導と学習評価の一体化をさらに進めていくため、学力の3要素をふまえて評価の観点を次のように整理された。

- ・「基礎的・基本的な知識・技能」 → 観点「知識・理解」及び観点「技能」
- ・「思考力・判断力・表現力等」 → 観点「思考・判断・表現」
- ・「主体的に学習に取り組む態度」 → 観点「関心・意欲・態度」

これらをふまえ、現在、各教科における学習指導やそれに基づく評価が行われており、思考力・判断力・表現力についても確かな学力の育成を支える柱として位置付けられている。

② 数学的な思考力等と先行研究における数学的な見方や考え方との関連

算数・数学科における思考力・判断力・表現力等は、いわゆる「数学的な思考力・表現力」のことである。現行の学習指導要領（2008）では、「数学的な思考力・表現力」という言葉が強調されているが、これは前回、平成10年（1999）改訂学習指導要領の中学校数学科の目標の中にある「数学的な見方や考え方」の育成とめざす方向性は同じものであると考えられる。

では、この「数学的な見方や考え方」とは何か、どのようにとらえればよいのかを考えるとき、既に多くの先行研究が行われている。中でも片桐（1988）は、数学的な考え方の具体的なか身を、算数・数学でよく用いられる方法と内容に着目することによって、次のように適切にまとめている。

I 数学の方法に関係した数学的な考え方

- 1 帰納的な考え方
- 2 類推的な考え方
- 3 演繹的な考え方
- 4 統合的な考え方
- 5 発展的な考え方
- 6 抽象化の考え方 ー抽象化, 具体化, 理想化, 条件の明確化の考え方ー
- 7 単純化の考え方
- 8 一般化の考え方
- 9 特殊化の考え方
- 10 記号化の考え方 ー記号化, 数量化, 図形化の考え方ー

II 数学の内容に関係した数学的な考え方

- 1 構成要素(単位)の大きさや関係に着目する(単位の考え)
- 2 表現の基本原則に基づいて考えようとする(表現の考え)
- 3 ものや操作の意味を明らかにしたり, 広げたり, それに基づいて考えようとする
(操作の考え)
- 4 操作の仕方を形式化しようとする(アルゴリズムの考え)
- 5 ものや操作の方法を大づかみにとらえたり, その結果を用いようとする
(総括的把握の考え)
- 6 基本的法則や性質に着目する(基本的性質の考え)
- 7 何を決めれば何が決まるかということに着目したり, 変数間の対応のルールを見つけたり, 用いたりしようとする(関数的な考え)
- 8 事柄や関係を式に表したり, 式をよもうとする(式についての考え)

さらに富竹(2012)は、数学的な考え方とその指導の意義について考察した上で、「数学的な考え方の一覧」として次のようにまとめている。

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| ① はかせはいつでも自分もねを目指す考え方 | ⑪ すぐに分かるの考え方
(単純化・特殊化) |
| ② 決まりがの考え方(帰納) | ⑫ 一般にの考え方(一般化) |
| ③ 同じようにの考え方(類推) | ⑬ 記号での考え方(記号化) |
| ④ 訳をの考え方(演繹) | ⑭ 数量での考え方(数量化) |
| ⑤ 同じと見る考え方(統合) | ⑮ 図での考え方(図形化) |
| ⑥ よりよいの考え方(発展) | ⑯ 集合での考え方(集合) |
| ⑦ 変えたらの考え方(発展) | ⑰ 単位にの考え方(単位) |
| ⑧ 共通の考え方(抽象化) | ⑱ およその考え方(概括的把握) |
| ⑨ 具体的にの考え方(具体化) | ⑲ 関係の考え方(依存関係) |
| ⑩ 見なす考え方(理想化) | |

これらの先行研究をもとに、数学的な見方や考え方を根底にすえた上で、数学的な思考力等をとらえていくこととする。

③ 島根大学教育学部附属学校園算数・数学科における数学的な思考力・判断力・表現力

島根大学教育学部附属学校園算数・数学科では、20年度より「豊かに考え、表現する算数・数学学習」を研究テーマとして共同研究に取り組んでいる。21年度からは各教科において思考力・判断力・表現力の育成に関する実践的な研究を行っている。その中で、算数・数学科では

算数・数学学習の中で高めていきたい思考力・判断力・表現力を「数学的な思考力・判断力・表現力」として、次のように暫定的に定義している。(2012)

- 数学的な思考力……これまでに習得した数量や図形に関する知識や技能、また類推的、帰納的、演繹的、統合的、発展的な考え方などの数学的な考え方を活用しながら考える力
- 数学的な判断力……問題解決に向けての見通しや筋道を立てたり、数学的な根拠をもとに正しいかどうかを判断したり、様々な解決方法を比較しよりよいものを選択したりする力
- 数学的な表現力……言葉や数、式、図、表、グラフ、記号あるいは数学用語や数学特有の言い方など、多様な表現方法を適切に用いて、(自分の考えを)表現する力

※一般的には、思考力と判断力をまとめて、数学的な思考力とする場合が多いが、本学校園算数・数学科では、思考力と判断力をそれぞれ分けて定義している。

算数・数学の学習において、子どもたちは思考・判断したことを、自分の言葉や数、式、記号などを用いて表現していく。また線分図や表、グラフなど数学的な表現を用いることによって思考が深まり、さらに他者によって表現されたことがらを読みとることから判断したことを振り返って確かめることも可能になる。よって数学的な思考力・判断力・表現力はそれぞれに独立した力ではなく、それぞれが互恵的な関係にあり、相互作用し合うことでそれぞれの力を伸ばしていくことができると考えている。

また共同研究者の御園(2011)は、「算数・数学科における『思考力』とは『数学的な考え方』を実践的に用いる能力、『判断力』とは数学的な根拠に基づいて判断を行う能力、『表現力』とはまず、数学的に思考していく際に、必要に応じて、文、式、グラフ、表、絵などの手段を用いながら『かく』能力、友だちや教師などに自分の考えを『伝える』能力、さらに高次な力として、発表やプレゼンテーションなどの際に、資料やスライド、レポートとしてまとめる能力であり、普通の授業での積み重ねでこそ力がついていくものである。」としている。

そして算数・数学科では「数学的な思考力・判断力・表現力の高まりをどのように評価するのか」という視点から、実際の授業を通して次の(ア)、(イ)のような評価活動に取り組んでいる。

- (ア) 学習後に評価問題に取り組ませることによって思考や表現の変容をみること
- (イ) 自己評価(学習のふりかえり)の際に、思考や判断、表現方法に関して、自分の考えと他者の考えを比較する視点等を取り入れて記述をさせること

これらの評価は、主として数学的な思考力等を高めるために適切であったかどうかを判断するための授業評価という視点から追究し、次の学習指導(授業)へのフィードバックを目的とするための取組として行っている。

(2) 学んだことをいかす活用型学習とは

なぜ算数や数学の学習をするのか、あるいは実際に算数や数学で学習したことをどのようにいかしていくのかという視点から考えると、大きく分けて2つの側面をあげることができる。

- (i) 算数・数学学習を進めていく上で、同じ領域において学習したことをもとに、その後の学習、あるいは他の領域の学習の中でいかす。(算数・数学内でいかす)
- (ii) 他教科の学習、あるいは日常生活や社会の中でいかす。(算数・数学外でいかす)

特に(ii)に関して、近年、日常生活や社会に算数や数学で学んだことをいかす活動が重視されてきている。このような指導を採り入れることで、数学を学習する動機づけを高めることに効果があることがTIMSSなどの国際学力調査の分析から明らかになっている(御園, 2008)。

こういった学習活動を積極的に採り入れることは、将来に渡って学び続ける児童・生徒を育成することにつながると考えられる。

そこで、実際の算数・数学の学習（授業）において、子どもたちが学んだことをいかしている具体的な姿を考えると、次のような例をあげることができる。

- * 二次方程式の解の公式について理解し、それを用いて二次方程式を解いている。（中学3年）
- * 小数の乗除計算の仕方をもとに、分数の乗除計算の仕方を考えている。（小学5年）
- * 同分母の分数の加法や減法の計算の仕方について、具体物を用いたり、テープ図等を用いて考え、説明している。（小学3年）
- * 日常生活の中にひそむ関数関係を、表やグラフ、式を用いて表すことで明らかにしようとしている。（中学2年）

算数・数学学習は系統性が重視されるという特質があり、既習の知識や技能、数学的な見方や考え方をいかしていくことで、未習の問題が解決でき、そこからさらに新たなものを発展的に見付け出していくことができる。つまり、算数・数学学習において学んだことをいかす力とは、既習の知識や技能、見方や考え方、あるいは数学的な表現等、これまでに一人一人が蓄積してきた様々な力を適切に用いることができる力であると考えられる。

そして算数・数学の学習において、学んだことをいかす学習（授業）を実現するためには、子ども一人一人の数学的な思考力等の高まりが必要であり、逆にこうした学んだことをいかすような学習機会を意図的に設定していく（学んだことをいかすための構想をたてる）ことで、さらに数学的な思考力等を高めることができると考えられる。

一方、中教審答申（2008）の中では「習得」「活用」「探究」という用語が用いられ、それを受けて学習指導要領（2008）における算数・数学科の目標の中には、それぞれ「活用」という用語が用いられている。算数・数学の学習において、学んだことをいかす学習（授業）というのは、学習指導要領に示されている活用型学習を積極的に取り入れていくことでもあると考えられる。子どもたちが学習の中で、学んだ算数・数学をどのようにいかしていくのか、その方法を身に付けていくこと、また算数・数学を活用することの必要性や有用性について理解することも求められている。さらに、子どもたちがこうした必要性や有用性を感じるためには実感を伴った理解が必要である。授業を構想する上で、情意面においても学んだことをいかしたいと感じることができるよう授業づくりが大切であるといえる。

（3）活用型学習に関する生徒の実態

活用型学習に関する生徒の実態を把握するために、平成24年度（2012）全国学力・学習状況調査の質問紙を利用した選択式アンケート調査と独自に作成した記述式アンケート調査を、2012年4月下旬に中学校3年生（本校生徒）132名を対象に実施した。この2つの調査結果をもとに生徒の実態を分析することにする。

① 全国学力・学習状況調査の質問紙を利用した選択式アンケート調査より

	当てはまる	どちらかといえば、当てはまる	どちらかといえば、当てはまらない	当てはまらない
(i) 数学の勉強は好きだ	34.1%	28.8%	28.8%	8.3%
(ii) 数学の勉強は大切だ	62.9%	30.3%	4.5%	2.2%
(iii) 数学の授業の内容はよく分かる	43.9%	45.5%	7.6%	3.0%
(iv) 数学ができるようになりたい	82.6%	15.9%	0.8%	0.8%

(v) 数学の問題の解き方が分からないときは、あきらめずにいろいろな方法を考える	38.9%	38.9%	19.8%	2.3%
(vi) 数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考える	16.7%	40.9%	34.1%	8.3%
(vii) 数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つ	48.5%	38.6%	9.1%	3.8%
(viii) 数学の授業で問題を解くとき、もっと簡単に解く方法がないか考える	38.6%	42.4%	16.7%	2.3%
(ix) 数学の授業で公式やきまりを習うとき、その根拠を理解するようにしている	49.2%	41.7%	8.3%	0.8%
(x) 数学の授業で問題の解き方や考え方が分かるようにノートに書いている	53.8%	34.1%	12.1%	0%

集計結果をみると、(i)～(iv)については「当てはまる」あるいは「どちらかといえば、当てはまる」といった肯定的な答えをしている生徒が多いことがわかる。特に、(ii)(iv)については9割以上が肯定的な回答をしている点から、数学学習に対する価値を感じている生徒が大多数であるといえる。さらに、(vii)についても多くの生徒が肯定的な答えをしている。

こうした中で、(vi)については、「当てはまらない」あるいは「どちらかといえば、当てはまらない」という否定的な回答している生徒が4割を超えていることがわかる。数学学習に対する価値を漠然とは認めているものの、数学が日常生活や社会でどのように役立っているのか、また今現在学習している数学を日常生活と関連付けて考えるといった学習機会が十分ではないことがこの結果から考えられる。

② 記述式アンケート調査より

(i) 算数・数学の勉強は、 <u>自分にとってどんな点で役立っている</u> と思いますか。これまでの自分の経験の中で、そう感じたことを教えてください。		
	【回答数】 (複数回答あり)	【具体的な記述内容】
○日常生活の場面で。	106	・買い物 ・料理 ・宝くじ ・野球の打率 ・ゲーム ・車での移動時間と距離 ・バスケットのシュート率 ・空間認識 等
○次の数学の勉強で。	13	・正・負の数の計算を使って、文字式の計算もできる。 ・計算など、これまで学習したことを使える。 ・テストのとき 等
○いろいろな考え方で。	12	・頭をやわらかくする。 ・発想が豊かになる。 ・多面的に物事を考えることができる。 ・物事を解決するのに、筋道を立てて考えられる。等
○他教科の勉強で。	6	・理科の学習で、計算やグラフをかくとき。 ・社会科の学習で、統計資料をみるとき。 等

(ii) 算数・数学の勉強は、 <u>社会生活の中でどのような面で役に立っている</u> と思いますか。 何か、自分が知っていること、思いつくことを教えてください。		
○買い物の計算 (31)	○建物の設計 (27)	○予算・割合・消費税 (16)
○経済・株 (13)	○統計資料・確率 (11)	○土地の測量 (6)
○料理 (2)	○電車のダイヤ (4)	○化学 (3)
○医療 (2)	○コンピュータソフト (2)	○スポーツデータ (4)
○ゲーム (1)	○どんな仕事をするときも (7)	
○思考に関わる点 (7)	・物事をいろいろな視点からみること ・工夫して解決しようとする力 ・新たなものを生み出す創造性	・判断力 ・論理的な思考
○専門の人のみ (2)	○よい職に就くため (2)	○全く役に立っていない (2)
※ () 内は回答数。複数回答あり。		

算数・数学と日常生活や社会とのつながりについて、「どのように役立っているのか」という視点で記述式アンケートを行った結果を大まかにまとめたものである。(i) (ii) の結果をみると、ともに買い物など生活の中で自分が関わった経験をもとに役に立っていると感じている生徒が多いことがわかる。また算数・数学は系統性の強い教科であり、既習事項をいかしながら学習を進めていくことに対して、有用性を感じていることもうかがえる。一方、(i) (ii) のともに、「考え方」、「思考」に関わる点でのよさを感じている生徒も少数ではあるがいた。ただ単に計算ができることや、問題が解けることだけではなく、こうした思考する力が高まっていくことを実感し、そのよさを感じさせていくことも必要であるといえる。

しかし、(ii) の回答の一部のように「全く役に立っていない」、「専門の人のみが役立っている」といった生徒の思いの背景には、算数・数学の学習自体が学年が上がるごとに抽象度を増し、日常生活や社会との接点が見えにくくなっているといった要因も考えられる。こうした点からも、算数・数学と日常生活や社会との関連に気付くような学習の機会を意図的に取り入れていく必要性があるといえる。

(4) 研究仮説

上記の(1)、(2)、(3)をふまえ、次のような仮説をもとに研究に取り組むこととした。

第3学年数と式領域「平方根」の学習指導の中で、

仮説① 学んだことをいかして日常生活の中に平方根がひそんでいることを、生徒の思考にそって引き出し追求できるような教材開発や指導の手立てを工夫すること

仮説② 解決した学習課題をもとに生徒自らが発展的な課題を設定し、追求したことをまとめていく機会を取り入れていくこと

によって、生徒の数学的な思考力・判断力・表現力をより高めることができるであろう。

3 研究の実際

(1) 研究の内容

平方根に関する学習を一通り終えた後に、身近な生活の中で利用されている「いろいろな規格の紙の寸法の特徴」について考えさせ、さらにB判やA判サイズの紙から「ルート長方形の特徴」について考えさせる一連の学習(数学的活動)に取り組ませる。その学習活動の中に、研究仮説

①, ②に関する具体的な方策等を取り入れた実践を行い, 学習後の生徒の自己評価やレポート等の分析をもとに検証していく。

(2) 学習の展開

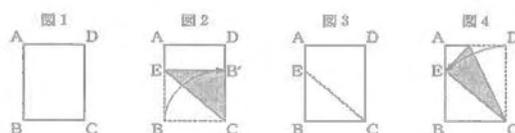
学習テーマ	時	具体的な学習内容
教科書の大きさ (B5判) からルート長方形の秘密を探ろう ~平方根の利用~	1	・いろいろな規格の紙の寸法の特徴について考え, さらにA判やB判の紙からルート長方形の特徴について考える。
	2	・紙の大きさ (A判やB判) の秘密を追求し, 数学レポートにまとめる。
	3	

(3) 学習の実際と考察

まず身近な生活の中で使用されている「いろいろな規格の紙の寸法の特徴」について考えさせた。その中から身の回りにある平方根として, B5判やA4判の紙からルート長方形の特徴について追求していった。共通な特徴を追求する中で, B5判やA4判の紙の2辺の長さの比が $1:\sqrt{2}$ になっていることが予想できる。その理由を生徒が考える際に, 折り曲げた紙から, 単元の導入で用いた面積2の正方形の考え方をいかして説明ができることにつなげていけるようなはたらきかけを工夫していった。さらに新たな問いとして, B5判とB4判の紙との関係からB4判の紙の2辺の長さも $1:\sqrt{2}$ になっていることに気付かせ, なぜこのような規格になっているかについても考えさせた。これまでの学習をいかし, 実際に生活の中に $\sqrt{2}$ が存在していることを実感するとともに, 生徒一人一人が学び合いの中でしっかり思考し表現できることをめざした学習活動を展開していった。

【学習課題】

B5判の紙の縦横比が $1:\sqrt{2}$ になっていることを, 図1~4 (右図) のような折り方で, 確かめられる理由を説明しよう。



【第1時】

(i) いろいろな規格の紙を分類してみよう。

導入では, 規格の異なる6つの紙を配り, 自由な発想で分類していくことで, 紙の寸法の特徴に目を向けさせた。

- ・ B5判サイズ
- ・ B4判サイズ
- ・ A4判サイズ
- ・ レーターサイズ
- ・ 写真四つ切サイズ
- ・ 黄金比サイズ

(ii) 折り曲げたときに, DCとECがぴったり重なった紙の寸法の共通な特徴を考えよう。

次に, 追求する課題の視点を明確化させるために, この6種類の紙をある共通点をもったものと, そうでないものとして分類することを考えさせた。ここで図1~4のような手順で, 6種類の紙を折ってみることで, 図4のように辺DCがEC

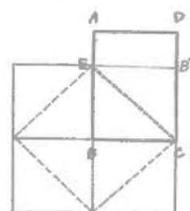
$$\begin{pmatrix} B5 - 182 : 257 = 1 : 1.41 \\ A4 - 210 : 297 = 1 : 1.43 \\ B4 - 257 : 364 = 1 : 1.42 \end{pmatrix}$$

1.4... ということは
図で表すことが出来る。
→ $1:\sqrt{2}$ の形。

に重なるように折ると, DCとECがぴったり重なるものと, そうでないものに分類することができた。生徒にとっては「なぜそうなるのか。」という問いが原動力となり, また折り曲げるという操作の過程をふまえ, B5判, B4判, A4判の紙の寸法の共通な特徴として, 縦横比に目を向けていった。ものさしを使って実測し, 電卓を用いて縦横比を計算していく中で, 「縦は, 横の長さのおよそ1.41...倍となっている。」ことに気付き, さらにここから既習の平方根の近似値の学習につなげて, 「およそ1.41... = $\sqrt{2}$ と考えることができるから, $1:\sqrt{2}$ と予想できる。」ことを多くの生徒が班学習の中から気付いていった。

(iii) 本当に、B5判の紙の縦横比が $1:\sqrt{2}$ になっていることの説明を考えよう。

図1～4の手順で紙を折っていくことが、 $1:\sqrt{2}$ の説明につながっていることを個人や班、そして学級全体で考えていった。BCを1としたとき、ECが $\sqrt{2}$ になることを示すためには、右図のように面積2の正方形とみて考えていくことになる。これは、この単元の学習の中で用いてきた正方形の図がイメージできるかどうか重要である。「以前に学習したことは使えないか」という視点でこうした図をより多くの生徒がかいて追求できるよう、正方形EBCB'やその対角線ECに着目させるようなはたらきかけを行っていった。そして、説明の見通しが立った生徒が班の中や学級全体の場で説明することで理解を深めることができた。また中には、正方形EBCB'をひし形とみて、ひし形の面積の求め方からECが $\sqrt{2}$ になることを説明することができた生徒もいた。実際の授業の中で、個人追求から図を用いて説明を考えることができた生徒はわずか1割程度であった。しかし班や学級全体での学習後に行った評価問題をみると、A5判の紙について、縦横比が $1:\sqrt{2}$ になっていることを適切に説明できている生徒が8割を越えていた。この内容を数学レポートにまとめることによって、さらに深い理解につなげることができたといえる。この学習から正方形の1辺と対角線の比も $1:\sqrt{2}$ になることがわかり、今後の学習にいかしていくことができるようになった生徒もいると考えられる。



【第2～3時】

(iv) 3つの規格の紙（B5判，B4判，A4判）についてどんな関係があるかを考えよう。

さらに発展的な課題として、3つの規格の紙からいえそうなことを追求していった。授業やその後の数学レポートから生徒が見つけたものをまとめると次のようになる。これらの中の一つかを全体で確認して、さらに学びを深めていくことができた。

B5判 \Leftrightarrow B4判 \Leftrightarrow A4判

- ・大きさは異なるが、形はすべて同じ。
- ・拡大・縮小の関係になっている。
- ・重ねてみると、折り目（対角線）が一直線上に並ぶ。

B5判 \Leftrightarrow B4判

- ・面積が2倍になっている。
- ・B4判を半分に折ったものと同じ大きさ。
- ・B5判の縦（一辺）の長さ、B4判の横（一辺）の長さが等しい。

A4判 \Leftrightarrow B4判

- ・縦、横ともに、約1.22倍になっている。
- ・B4判の対角線の長さとA4判の1辺の長さが等しい。

B5判 \Leftrightarrow A4判

- ・縦、横ともに、約1.15倍になっている。

(4) 研究の検証

この学習活動が、「数学的な思考力・判断力・表現力」を高めるという視点から、生徒にどのような影響を及ぼしたのかについて、生徒による自己評価やレポート等の記述をもとに検証していく。

自己評価（学習のふりかえり）

B4，A5などのいろいろな大きさの紙の共通点を考えたりするのは、面白かったけど難しかったです。ここでは、比例式など、今まで学習してきたことを生かすことが多かったですが、フル活用して取り組むことができ、自分で理解を深め、自分なりに考えたりすることができたので、とてもよかったです。けど理解することはよくできたので、やっぱりそれを伝える「発表」をもっと頑張っていきたいです。

これは、第2時～第3時にかけて生徒が各自でA判、B判の紙の特徴について追求した内容を「数学レポート」としてまとめたものである。レポート①をみていくと、前半は第1時の学習内容を自分なりにまとめている。そして後半は、「なぜ（A判やB判の紙が） $1:\sqrt{2}$ の比で長さが決められているのか」という課題を設定し追求している。「紙屋さんの気持ちになってみた・・・」といったユニークな表現でA判やB判の紙の規格の利便性について述べている。感想からは、平方根と身の回りとの関連に関する興味をもったこともわかる。レポート②をみていくと、A判やB判の規格の表から縦横の長さの特徴についてまとめている。またA判、B判の紙を重ねることで、図形としての相似の関係にも気付くことができている。感想からは、追求したことをふりかえってまとめることによりA判やB判の紙のつながりに気付いたことや、学習内容の理解をさらに深めることができたこともわかる。

4 研究のまとめ（研究成果と今後の課題）

今回は「平方根」の学習指導の中で、生徒の数学的な思考力・判断力・表現力をより高めるための学習指導として、2つの仮説のもと授業実践に取り組んだ。その研究仮説をもとに成果と課題について述べることにする。

仮説① 学んだことをいかして日常生活の中に平方根がひそんでいることを、生徒の思考にそって引き出し追求できるような教材開発や指導の手立てを工夫すること

学習課題として取り組んだA判やB判の紙の規格の特徴に関する題材は、多くの教科書の中で平方根の活用として取り上げられているものである。また図形と相似の学習後に課題学習として取り組むことが可能な題材でもある。今回の授業実践では、ルート長方形の特徴について、「まずはいろいろな規格の紙を分類し、そこから共通な特徴を発見し、その特徴を説明する」という一連の学習過程で行った。この題材は、生徒にとって日常生活の中に平方根がひそんでいることを自らの力で発見し、これまでに学んだことをいかしながら、 $1:\sqrt{2}$ になることの説明を考えていける優れたものであることが生徒の自己評価等からも明らかにできた。生徒にとって普段使っている身近なものであること、また実際に紙を折り曲げることや、長さを測ってみることなどの操作的な活動を取り入れることもできる題材である。

生徒は「無理数」という新しい数に出会い、終末では数学と日常生活との関連を、これまでに学んだことをいかしながら追求していった。こうした数学と日常生活とを関連付ける学習を積み重ねることによって、学んだことをいかして追求していく活用型学習が授業の中で成立すると考えられる。ただ単に平方根という学習内容を理解しただけではなく、こうした学習過程を通してさらに数学的な思考力等を高めることができたといえる。

今回は「数と式」領域における取組であったが、「関数」等の他領域においてもこのような日常生活と関連付けた学習課題を意図的に設定し取り組ませていくことが数学的な思考力等を高めるための学習指導として有効であり、こうした教材開発が今後の課題である。また活用型学習を支えるものは、知識や技能、あるいは数学的な見方や考え方といった生徒がもっている力であり、こうした確かな力を付けていく習得型学習との取組のバランスを考えていくことも重要な課題の1つであるといえる。

仮説② 解決した学習課題をもとに発展的な課題を設定し、追求したことをまとめていく機会を取り入れていくこと

この学習では、「B5判の紙の縦横比が $1:\sqrt{2}$ になっている」という共通の課題を解決した後に、「3つの規格の紙（B5判、B4判、A4判）についてどんな関係があるのか」や「A判やB判の紙

の規格はなぜこのように決められているのか」といった発展的な課題を設定し追求することができる。生徒は、自分なりに課題を設定し、その内容を数学レポートとしてまとめていった。自分が追求したことをまとめるという作業を取り入れることで、生徒の自己評価にもあったように理解を深め、より確かなものにすることができる。そして、このような取組が数学的な表現力等を高めることにもつながると考えられる。今後も、数学的な思考力や表現力に視点をあてた数学レポートの作成を数学的活動の中に取り入れていくことで、数学科の目標でもある「数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる」（学習指導要領、2008）ための一助としていきたい。

おわりに

数学と日常生活との関連に気付き、学んだことをいかして課題解決をめざす子どもの姿を追求していくことは、まさにこれまでの学習の蓄積によって高まった数学的な思考力等を発揮しながら学習に取り組んでいる姿を求めていくことであった。そして活用型学習における学習指導（授業）の在り方を構想したことで、授業の中で高めることができる数学的な思考力等をより具現化できた。今後は、こうして高まった力を課題学習や総合的な学習の時間などの探究型学習にもつなげていきたい。

参考・引用文献

- ・文部科学省（2008）『中学校学習指導要領解説 数学編』
- ・安彦忠彦（2008）『新学習指導要領における活用型学習のねらいと意味』、新教育課程の学習プロセスNo.2『活用型』学習をどう進めるかp8-11、教育開発研究所
- ・片桐重男（2004）『数学的な考え方の具体化と指導』明治図書
- ・富竹 徹（2012）『数学的な考え方とその指導の意義』『日本数学教育学会誌』第94巻第11号p30-33
- ・御園真史（2011）『算数・平成23年度島根大学教育学部附属学校園研究紀要』p84
- ・後藤幸広（2012）『豊かに考え、表現する算数・数学学習』平成24年度島根大学教育学部附属学校園研究紀要・算数・数学科教科構想p66-69

（ごとう ゆきひろ 数学科 yukihiro-goto@edu.shimane-u.ac.jp）

※資料（学習指導案）

「教科書の大きさ（B 5判）からルート長方形の秘密を探ろう～平方根の活用～【第1時】」

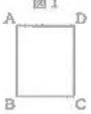
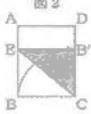
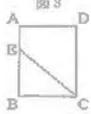
(1) ねらい

- ・いろいろな規格の紙の寸法の特徴について考え、さらにB 5判やB 4判、A 4判の紙からルート長方形の特徴について、適切な用語や図等を用いて説明できる。
- ・日常生活の中に $\sqrt{2}$ がひそんでいることに気付き、利用されていることを理解する。

(2) 思考力・判断力・表現力の評価

学習活動	学習活動における具体的な評価規準	評価資料	評価基準		
			A	B	C
いろいろな規格の紙の寸法の特徴やA 4判、B 5判の紙からルート長方形の特徴について考える。	B判やA判の紙の、それぞれとなりあう辺の長さの比が $1:\sqrt{2}$ になるという特徴について、これまでに学習したことをいかして考えている。	<ul style="list-style-type: none"> ・授業ノート ・評価問題 ・学習のふりかえり ・数学レポート 	平方根を用いて処理した結果をもとに、B判やA判の紙の特徴をわかりやすくまとめて説明している。	平方根を用いて処理した結果をもとに、B判やA判の紙の特徴を説明している。	平方根を用いて、B判やA判の紙の特徴を説明することができず、曖昧な説明をしている。

(3) 展 開

<p>学習場面と子どもの取組 (◎は、学んだことをいかしている子どもの姿)</p>	<p>教師の支援と願い・評価</p>
<p>1. いろいろな規格の紙を分類してみよう。 ○下図のように、紙を折り曲げてみる。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">     </div> <p>・DCとECがぴったり重なるものと重ならないもので分類することができる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・導入では、規格の異なる6つの紙を配り、自由な発想で分類させていくことで、紙の寸法の特徴に目を向けさせる。 ・図1～4のような手順で折ることを全体で確認し、それぞれの紙についてDCとECにあたる線分の長さの違いを意識しながら操作活動をさせていく。
<p>2. 折り曲げたときに、DCとECがぴったり重なった紙の寸法の共通な特徴を考えよう。</p> <p>◎2辺の長さの比が、$1 : \sqrt{2}$となっている。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・B5判の紙から2辺の比の値を計算すると$257 \div 182 = 1.41\dots$だから、縦横比が$\sqrt{2}$になっている。またA4判も同様に縦横比が$\sqrt{2}$になっている。 <p>◎分類する際に用いた折り方から、縦と横の長さの比が等しいことを説明する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・図2で、四角形EBCB'は正方形だから、正方形1辺の長さとお角線の長さの比より、$BC : EC = 1 : \sqrt{2}$ ・図4より、$DC = EC$なので、$BC : DC = 1 : \sqrt{2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> ・各班に定規や電卓を準備し、測定値から計算することで、2辺の縦横比を予想できるようにする。 ・なぜ図2のような折り目(EC)をつけたのか、なぜ図1～図4のような紙の折り方で説明できるのかを、自分の考えや班の友達の中で話し合ったことをもとに学級全体で共有できるようにしていく。 ・正方形のお角線の長さ(EC)の比については、面積が2になる正方形の考え方が用いられていることに気付かせたい。
<p>3. 3つの規格の紙(B5判、B4判、A4判)についてどんな関係があるかを考えよう。</p> <p>◎3つ規格の紙を重ねると、拡大・縮小の関係になっている。</p> <p>○B4判の紙を半分に折ったものと、B5判の紙の大きさは等しくなっている。</p> <p>◎B5判長方形の短い辺を1、長い辺をxとすると、B5判、B4判の紙の寸法の関係から、縦横比が$\sqrt{2}$になる。</p> <p>○A4判の紙のお角線と、B4判の紙の1辺の長さが等しくなっている。</p> <p>4. 評価問題(A判の紙の寸法の特徴に関する内容)に取り組む。</p> <p>○本時の学習内容を振り返りながら、A5判の紙(数学ストレッチノート)とA4判の紙(ルーブリーフ)の関係について考える。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・B4判とB5判の紙の規格の関係を明らかにすることで、比例式を用いてB5判の紙の縦横比、そしてB4判の紙の縦横比についても求めることができることに気付かせたい。 ・B判やA判の紙の規格が、なぜこのように$1 : \sqrt{2}$になっているのかについても考えさせたい。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>— 評価の観点〈数学的な見方や考え方〉 —</p> <p>A5判の紙の寸法の特徴やA4判の紙との関係をとらえ、説明している。</p> <p>【評価方法：評価問題・学習の振り返り】</p> <p>支援：B5判の紙について追求した学習活動の流れを確認できるような補助プリントを配布する。</p> </div>