

## 空間的な広がりイメージして、問題を解決する力を育むための授業の実践 ～1年「空間図形」の単元をとおして～

安 野 洋

### はじめに

現行の学習指導要領において、図形領域「空間図形」の目標は「空間図形についての観察、操作、実験などの活動を通して、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、論理的に考察する能力を培う」とある。図形に関する観察、操作や実験などの活動に基づく直観的な取扱いを中心に、空間における図形の基本的な性質や構成について理解を深める。さらに、それらを通して第2学年以降における論理的な考察と論証及びそれを表現することへの関心を高めるようにする。空間図形の展開などの幾何学的な操作を通して、図形の性質の根底にある本質的なものを見抜く直観力を養い、その性質を論理的に考察し表現する能力を培うことを目標としている。立体の表面積や体積を求める図形の計量も、図形を理解する一つの側面として位置付けることも述べられている。

また、生徒の実態を把握するために、アンケート調査を行った。アンケートは、空間図形の単元を始める前に行い、記述式で「立体を学習したときにどんなことが難しかったか」という内容で行った。その結果が図1である。

かき方 14%	面積 15%	体積 22%	容積 4%	展開図 13%	見取図 8%	立体の 組み立て 10%	その他 14%
------------	-----------	-----------	----------	------------	-----------	--------------------	------------

図1 立体を学習したときにどんなことが難しかったか

体積に関わるものが多く、容積と合わせると26%となる。体積に関しては、小学校では習わない錐体についてのことが知りたいという意見が多かった。

また、図のかき方や展開図、見取図など、図に関わるものが、合わせて35%と一番多い。頭の中でイメージしたことや見ている図をどう表したらよいか分からないという意見が多かった。このことから、体積などの求め方について、また、展開図や見取図など図のかき方について重点的に学習を進めていこうと考えた。

学習指導要領の目標及び、アンケートの結果を踏まえ、空間図形では、主に観察、操作、実験などの活動を通して、直観的に図形を捉える力、捉えたことを論理的に表現する力を付けたいと考えた。また、数学的活動の「ア 数や図形の性質などを見いだす活動」と「ウ 数学的に説明し伝え合う活動」を取り入れ、空間的に図形を捉えること、つまり、空間図形をしっかりとイメージして、協働的な学習や活動を通して、問題を解決する力を育んでいきたい。

### 1 研究のねらい

空間図形の内容に関して、生徒のもった問いをきっかけに授業を展開していき、協働的に課題を解決していく中で、空間的な広がりイメージしながら、問題を解決する力を育むための学習指導の在り方について検討し、実践する。

### 2 研究の構想

#### (1) 思考力・判断力・表現力について

本校数学科において、先行研究から思考力・判断力・表現力を「数学的な思考力・判断力・表現力」として、次のようにとらえている。

【数学的な思考力】

これまでに習得した数量や図形に関する知識や技能，また類推，帰納，演繹，統合的，発展的な考え方などの数学的な見方や考え方を活用しながら問題解決をめざす力

【数学的な判断力】

問題解決に向けての見通しや筋道を立てたり，数学的な根拠をもとに正しいものを見つけ出そうとしたり，様々な解決方法を比較し，よりよいものを選択しようとする力

【数学的な表現力】

言葉や数，式，図，表，グラフ，記号あるいは数学用語や数学特有の言い方など，多様な表現方法を適切に用いて，（自分の考えを）表現する力

子どもたちは数学の学習において，思考，判断したことを，自分の言葉や数，式，記号などを用いて表現していく。また線分図や表，グラフなど数学的な表現を用いることによって思考が深まり，さらに他者によって表現されたことがらを読みとることから判断したことをふりかえって確かめることも可能になる。よって数学的な思考力・判断力・表現力は，互恵的な関係であり，相互作用し合うことでそれぞれの力を伸ばしていくことができると考えている。

今回，実践を行う単元「空間図形」において，生徒が問題を捉えようとしたときに，その問題の状況を捉えることが難しい場合がある。それは，その問題の状況を，空間的な広がりの中でイメージすることが出来ていないからである。空間的な広がりイメージすることは，数学において「図形をどう捉えるか」という数学的な思考力に繋がっている。つまり，空間的な広がりイメージすることは数学的な思考力の育成にも関わっていると考える。

(2) 数学的な思考と関わる問いについて

数学において，問いはいろいろな場面で生まれる。例えば，計算で答えを求めるときや図形の角度を求めるときに問いが生まれる。また，自分の認識や経験，考え方との違いや予想とのずれ，直感などから生まれる問いもある。本校数学科では，それらの中でも，数学的な思考と関わる問いを大切にしていきたいと考えている。そして，一人一人が問いをもち追求する姿は，具体的に次のような姿が挙げられる。

- 既習事項を用いて解決しようと考えている姿
- 数学の問題を，試行錯誤して解決しようとする姿
- 自分の考えを整理しながら，他者に分かりやすく説明しようとする姿
- 数学の良さに気付き，いかしていこう，更に発展させていこうとする姿
- 生活の中で見つけた問題を，数学（数学的な見方や考え方）を用いて解決している姿

このような姿を引き出すために，授業のねらいに迫っていくような数学的な思考と関わる問いを大切にしていく。

数学のおもしろさは規則などの一般性の発見や論理展開すること，数学の問題を解決することなどたくさんある。それらに触れて，追求することのおもしろさを感じて欲しい。そして，日常生活において，解決したいと思うような問題や事象に出会ったとき，たくさんの情報を手に入れてそれを処理しようとするときに，学んだ数学的な見方や考え方で問題や事象，情報をとらえ，身に付けた数学的な知識・技能を用いて

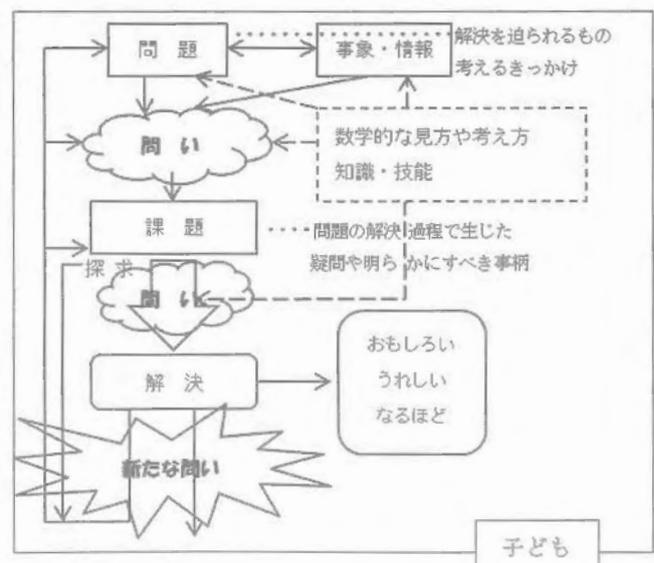


図 2

解決しようとして欲しい。

数学の授業において、図2のように、子どもたちは、教師から出された問題や、ある事象や情報に出会ったときに生まれた問題を「なぜだろう」など、問いとしてとらえる。その問いから、問題を解決するために必要な課題が生じる。その課題の解決方法を探る中で、試行錯誤しながら、数学的な見方や考え方をういて思考し、知識や技能を使い表現する。また、新たな見方や考え方、知識や技能を獲得する。問題から自分の問いを見付け解決することを繰り返すことで、様々な事象に対して自ら問いをもち、その解決方法を探るようになると考える。そして、解決したことにより、おもしろいと感じたり、うれしかったり、なるほどと思ったりした気持ちを大切にしながら、それだけに満足せず、解決したことが「本当に正しいだろうか」と問題に立ち返ったり、「条件を変えてみるとどうなるだろうか」と他の問題にいかせないか考えたりするなど、新たな問いをもつようになって欲しい。

「空間図形」においては、上述したようにイメージしにくい内容であるので生徒のもった「問い」を大切に授業を展開していく。そして「問い」だけでなく「分からない」という気持ちも大切にしていく。

### (3) 具体的な手立て

本研究を実施するにあたり、具体的には次のような手立てを行う。

#### ① 教師のはたらきかけ

教師のはたらきかけとして、授業のねらいに迫っていくような数学的な思考に関わる「問いかけ」を大切にする。例えば、「なぜそうなるのか」と根拠を聞いたり、「いつでもできるのか」と一般性を聞いたりする問いかけである。こうした問いかけを教師が繰り返して行うことで、やがて子ども自身の問いへと変容することを目指す。教師から出される問いかけは子どもに身に付けて欲しい思考の方向性を与えるものである。そして、図2に示したとおり、問題などから課題をつくるときの問いを大切に授業を行う。そうすることで、問題を解決した後に、新たな問いをもつようになると考える。状況や発達段階に応じて、大切にしたい問いを決めて単元を構想する。実際の授業の中での数学的な思考に関わる問いについて考えると、次のような具体例が考えられる。

<input type="checkbox"/> なぜそうなるのか	<input type="checkbox"/> 似ているところはあるか
<input type="checkbox"/> 違うところはあるか	<input type="checkbox"/> 他の場合も同じように考えられるのか
<input type="checkbox"/> いつでもできるのか	<input type="checkbox"/> もっと簡単にできないのか
<input type="checkbox"/> 例えば？	<input type="checkbox"/> 他の考え方はないのか
<input type="checkbox"/> もっとわかりやすく説明できないか	<input type="checkbox"/> わかりやすい表し方はないか
<input type="checkbox"/> 以前に学習したことは使えないか	<input type="checkbox"/> もっとよい解決方法はないのか
<input type="checkbox"/> この考え方のよい点はどんなところだろうか	

#### ② 授業のふりかえり

授業のふりかえりを、「自分もった問いに対して」や「新たに疑問に思ったこと」、「次に向けて」など焦点化して行うようにする。そうすることで、子どもがもった問いや解決したことに対する子どもの考えの背景を探り、次の授業や単元につなげる。このような視点を意識したふりかえりを繰り返し行うことで、子どもが問題を解決した後に「問い」を意識するようになることを目指していきたい。

#### ③ ICTの活用・ワークシートの工夫

ICTを活用したり、ワークシートを工夫したりして、具体物を提示するのと同様に、考えるための手立てとする。また、発表時や具体物を示して指導するとき、拡大して提示し、見やすくするための手立てにもする。

### 3 研究の実際

#### (1) 単元計画

単元を次のように展開していく。

表1 単元計画

次	時	学 習 内 容			
1	1	いろいろな立体	○小学校の復習 ○空間図形のイメージ調査	習得	
		2	正多面体を作ろう	○5つの正多面体を作る。	探求
		3	いろいろな立体の見取図や展開図をかこう	○立体の見取図をかく。 ○立体の展開図をかく。	習得
		4・5	空間内の平面と直線	○空間内の平面と直線 ○空間内の平面と直線② ○2平面の位置関係	習得
				6	動かしてできる立体
		7	投影図	○投影図 ○立面図, 平面図 ○投影図から見取図をかく。	習得
		2	8	立体の表面積①(柱体の表面積)	○柱体の表面積の求め方を考える。
9	立体の表面積②(錐体の表面積)			○錐体の表面積の求め方を学ぶ。	習得
10	立体の体積①(柱体の体積)			○柱体の体積の求め方を復習し, 練習する。	習得
11	立体の体積②(錐体の体積)			○錐体の体積の求め方を学ぶ。	習得
12	立体の体積③ (なぜ錐体の体積は柱体の体積の1/3か)			○錐体の体積がなぜ1/3になるか, 実際に作って考える。	探求
13・14	球の表面積・体積			○球の表面積・体積の求め方を学ぶ。	習得
3	15	立体の展開図の対応する点を調べよう	○立方体の見取図と展開図についてどのように対応しているか調べる。	探求	
		16	立体の断面図について考えよう	○立方体の切断面について調べる。	探求
4	17	練習問題	単元テスト	復習	
5	18・19	レポートを作ろう	○単元を通して疑問に思ったことなどを各自で調べる。	探求	
		20	調べたことを発表しよう	○調べたことを発表し, お互いに評価する。	探求

#### (2) 授業の実際と検証

##### 第1次 ～立体と空間図形～

空間図形の基礎・基本となる内容について学習する。

##### 第1時 「いろいろな立体」

本単元の導入として, 小学校のときの立体の学習を振り返った。図3の立体を提示し, ア～カそれぞれの立体の名前を確認した。

そして, 自分が着眼した点について, 仲間分けを行った。着眼点としては「横から見たときどう見えるか」(三角形:イとオ, 四角形:アとウとエ, 円:カ,)「底面の形」(三角形:ア, 四角形イとエ, 円:ウとオ, ? :カ)などが挙げられた。そして, これらの特徴から, 立体の名前が決められていることに気付いた。

その後, 新たに多面体について学習した。

次にあげた表は, 第1時が終わったときの「学習のふりかえり」に書かれた生徒の「問い」の一覧(表2)とワークシートである(図4)。

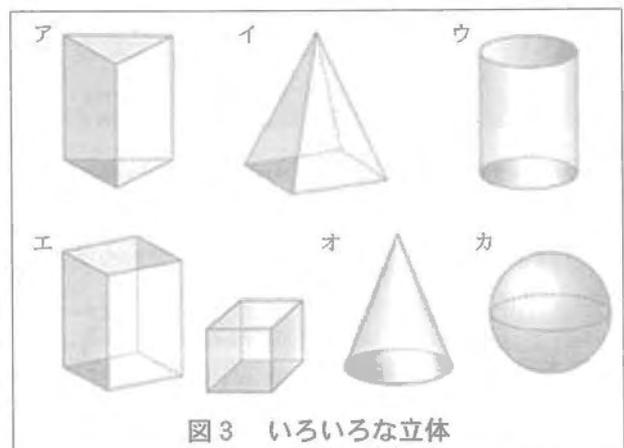


図3 いろいろな立体



このブロックを何個かずつグループに配布し、正多面体を作る活動を行った(図6)。生徒たちは楽しみながら正多面体を作っていた。そして、この活動を通して生徒たちは「なぜ、正多面体は5種類しかないのだろうか」という新たな「問い」をもった。全ての面が同じ多角形になる正多面体は、第1時に出てきた5種類しかできない。その「問い」を解決するために、グループで学び合いを行った。しかし、なかなか解決できる様子が伺えなかったため、「頂点に着目してみたら」と生徒にはたらきかけた。

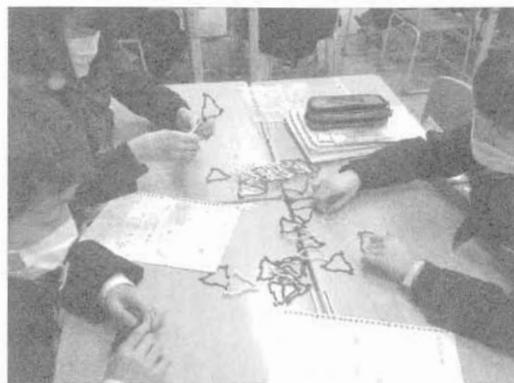


図6 活動の様子

以下はそのときの授業記録である。

- T : なかなか思い浮かばないようだね。面に注目してしまいがちだけど、頂点に着目してみたら？  
 S1 : 頂点には3つの面が集まっています。  
 T : そうだね。3つの面がくっつくことは、どういうことだと思う？  
 S2 : あっ、1つの頂点に3つの面がくっつくのは角度が関係するのかも。  
 S3 : 角度が関係するってどういうこと？  
 S2 : 角度が足りないから、でっばるといっつか頂点ができるんだよ。  
 S4 : 角度が足りないってどういうこと？  
 S2 : 面が集まって $360^\circ$ を越えてしまうと、平らになってしまっって頂点が出来ないんじゃないかな。

ある生徒が教師のアドバイスをもとに、1つの頂点に集まる多角形の角度の和に着目し、それを糸口として、正多面体が5種類しかないことの原因を学級全体で考え、確認していった(図7)。

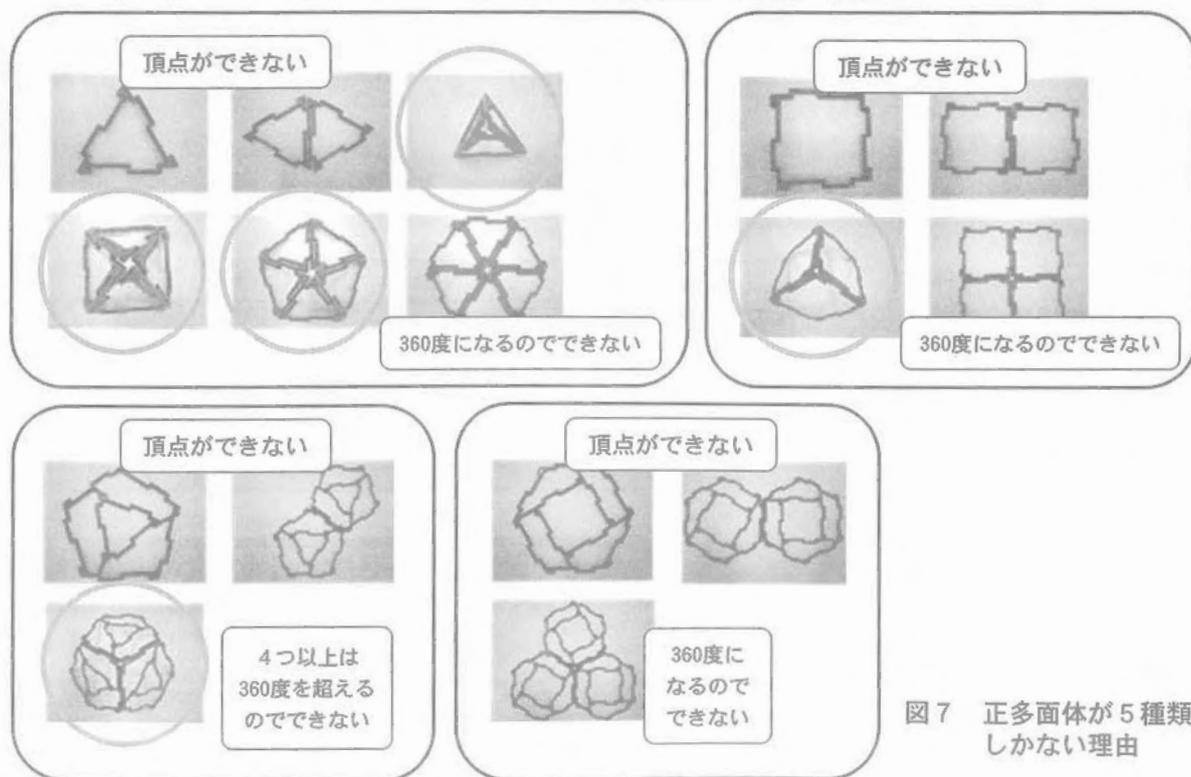


図7 正多面体が5種類しかない理由

次に示すのは、授業後の生徒のふりかえりである。

- 頂点を開いたとき $360^\circ$ を越えないようにということを知ったとき、なるほど！と思いました。(生徒A)  
 ○今日はたくさんの新しい発見があった。1つの頂点の角に目をつける考えはなかったから、とても驚いた。このような発見の授業はとても楽しい。(生徒B)

このふりかえりから、生徒が自分の「問い」を解決した喜びや、自分をもっていなかった考え方を知ったときのうれしさが伺える。このような学びが主体的に追求する姿に繋がると考える。

次にあげるのは第2時が終わったときの「学習のふりかえり」に書かれた生徒の「問い」の一覧(表3)である。

表3 第2時の学習を終えて、もった「問い」

問い (第2時)	人数	問い (第2時)	人数
・なぜ、同じ多角形じゃないとできないか	4	・球に近い立体について	1
・五角形と四角形ではできないか。	1	・球について	1
・規則性があるのか	1	・錐体について	1
・頂点と面の規則について知りたい	2	・角度以外に関係するもの	1
・正多面体と面の関係	1		
・正多面体の特徴	1		
・多面体の体積はどうやって求めるか。	3		
・多面体の展開図が知りたい。	2		
・多面体の表面積が知りたい。	2		

表3からは、第2時の授業を終えて、正多面体に関わる「問い」がたくさんできてきたことが分かる。オイラーの多面体定理にかかわるような、頂点と面の規則について知りたいと考えている生徒もいた。

### 第3時 「いろいろな立体の見取図や展開図をかこう」

第2時を終えて出た「問い」の中で、第2時に関わる正多面体の体積や表面積、展開図のことなどについて、簡単に触れた。体積については、学年が上がったり高校に行ったりすると求められるようになること、面積は1つの面の面積を求める方法が分かれば求めることなどである。また、展開図を示して前回生じた「問い」を解決していった。

そして、第3時は最初のアンケートで多かった「問い」の1つである「見取図・展開図とのかき方」を取り上げることにした。それは、この後の内容には、自分で見取図や展開図をかき場面が多くあるため、早い段階でそのかき方を知っておく必要があるからである。見取図や展開図をかきことは、立体を捉え直すことに繋がるので大切にしたい。取り上げたのは次の立体である。

#### 【見取図】

- 直方体      ○円柱  
○正四角錐    ○円錐

#### 【展開図】

- 立方体      ○円柱  
○正四角錐    ○円錐

第3時が終わった後は、次のような「問い」が見られた(表4)。

表4 第3時の学習を終えて、もった「問い」

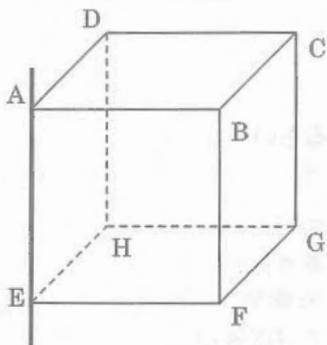
問い (第3時)	人数	問い (第3時)	人数
・球の展開図について知りたい	4	・複雑な図形の見取図	1
・多面体の見取図	2	・展開図の破線は何か	1
・他の立体の展開図	2	・五角錐の展開図	1
・立方体の展開図のコツ	2	・きれいにかく方法	1
・多面体の展開図	1	・コンパスを使ってかくのか	1
・多面体の表面積	1	・重心について知りたい	1

第3時を終えて出た「問い」は、取り上げていない図形の見取図や展開図に関わる「問い」やかくためのコツに関わる「問い」であった。これらは、全てを取り上げることは難しいので、今後、生徒自身が問題などを解く中でかいたり、コツをつかんだりして欲しい。

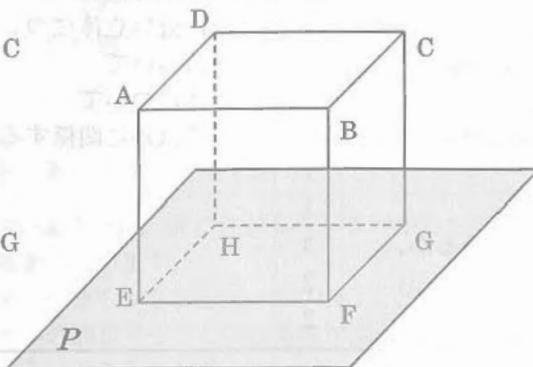
第4・5時 「空間内の平面と直線」

次は、空間内で、平面と直線を捉え直すことにした。その際、立方体を取り上げ、生徒たちが位置関係について、立方体の辺や面を利用して考えられるように工夫した(図8)。例えば、2直線の位置関係についての学習の際には、辺AEと①平行、②交わる、③ねじれの位置といった具合に考えていった。

【2直線の位置関係】



【直線と平面の位置関係】



【2平面の位置関係】

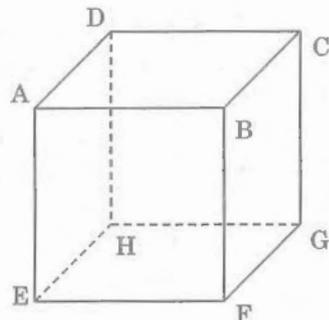


図8 空間内の平面と直線の位置関係

第4時、第5時が終わった後は、次のような「問い」が見られた(表5)。

表5 第4時、第5時の学習を終えて、もった「問い」

問い(第4時)	人数	問い(第4時)	人数
・本当に3点で支えるのが一番安定するのか	2	・平面にPがくっついていれば平面上にあるのか	1
・平面のねじれがあるのか	1	・どこが垂線かわからない(高さ)	5
・3点を含むと平面ができることがよくわからない	1	・角柱の高さをかけないか	1
・ねじれ	6	・五角錐の高さのかき方	1
・球の展開図が知りたい	1	・正十二面体でのねじれ	1
・ねじれは立体でもあるか	1	・ねじれた図形の高さ	1
・平面や直線について	1	・平面と直線の関係	2
・曲面も限りなく続くか	1	・ねじれ以外のものもあるか	1
・空間においてねじれの内図形について	1		
・多面体について	1		
・2直線間がせまくても平行か	1		

第4時・第5時を終えて出た「問い」は、中学校で初めて出てきた「ねじれ」に関わるものが多かった。また、平面のとらえや高さに関する「問い」も多かった。後に行った問題演習では、この内容に関わる質問がとても多く出た。詳しくは成果と課題のところ述べる。

第6時 「動かしてできる立体」

第6時は動かしてできる立体について学習した。第4時・5時・7時もそうであるが、これらの指導内容は、生徒の「問い」から、繋げにくい内容であるので、前半の習得の段階で実施した。実際に最初の「問い」には全く出てこない。

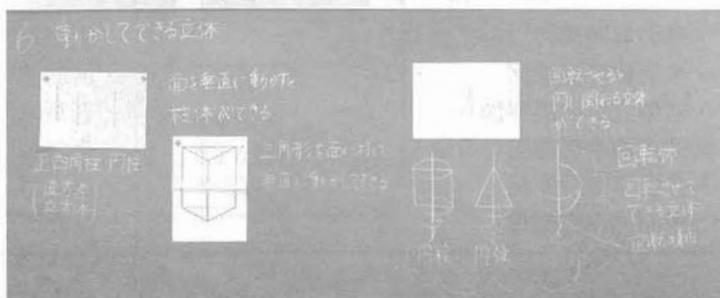


図9 「動かしてできる立体」の板書

そして、面を垂直に動かしてできる立体は体積の考えに繋がる。

また、回転させてできる立体についてはイメージしやすくするために、実際に回転させてみた(図10)。生徒たちは本当に立体に見えるのか興味津々で、立体を見た。回転させると本当に立体に見えて、驚いた生徒もいた。

次にあげるのは、第2時が終わったときの「学習のふりかえり」に書かれた生徒の「問い」の一覧である(表6)。

図10 回転体説明機(右)

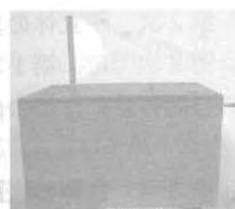


表6 第6時の学習を終えて、もった「問い」

問い(第6時)	人数	問い(第6時)	人数
・回転体が生活にどうかされているか	1	・動かして角柱・角錐はできないか	1
・他にどんな動かしてできる立体があるか	6	・軸から離れたものの回転体がどうなるか	1
・回転体は必ず円になるのか	1	・本当に円が関わるか	1
・回転体は線対称になっているのか	1	・五角柱もできるか	1

第6時を終えて出た「問い」は、回転体に関わる「問い」が多かった。回転体器の印象が深かったためだと考えられる。

### 第7時 「投影図」

第7時は投影図の学習に取り組んだ。投影図は、初めて中学校で学習する内容である。

「立面図」や「平面図」などの新しい言葉や、実線と破線を区別して使わないといけないうことなどを学習した。その後、正四角錐の角(かど)を真正面に向けた投影図がどうなるのかを話し合った。立面図に関して2つの意見が出てきた。

一つは「立面図の下側が平らになる」という意見でもう一つは「尖るのではないか」という意見である。お互いに意見を言う中で、平らだという意見の生徒が、「見た感じが尖ってみるのは斜め上から見ているからだ」と発言した。また、別の生徒が、「置けるってことは、下が平らだから置ける」と発言をした(図11)。この意見で、尖っていると考えていた生徒も平らになっていることに納得した。

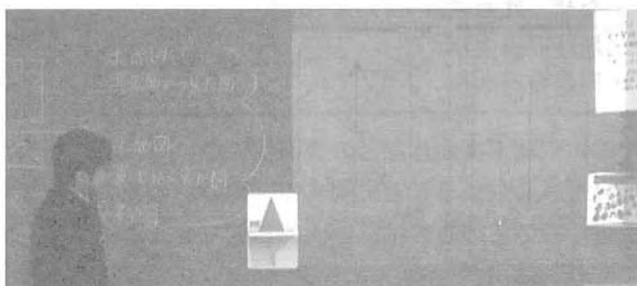


図11 正四角錐の立面図の下側が平らになることを説明

また、立面図と平面図が同じに見える立体について考えた。例えば、どちらも長方形に見えるとき、それは円柱か、正四角柱かわからない。そういう状況の時、どうすればよいか投げかけたところ、「真横から見た図をかけばよい」という意見がでた。そこで側面図を紹介し、生徒たちは3方向から立体をとらえると、イメージできることを学んだ。

表7 第7時の学習を終えて、もった「問い」

問い(第7時)	人数	問い(第7時)	人数
・イメージが難しい	3	・立面図の下側がとんがることあるのか	1
・実線と破線の区別のつけ方	13	・投影図の正確なかき方が知りたい	1
・正八面体の投影図はどうなるのか	1	・正多面体の投影図	2
・球の投影図	4	・他の投影図	1
・投影図はどんなところで使えるか	1	・よく分からない	1
・見取図のかき方	1	・高さが低いものについてどうするのか	1

第7時を終えて出た「問い」は、実線と破線の区別がつきにくいということと、球や正多面体など、扱われなかった立体の投影図が知りたいということが多かった。見取図を作図したときに、見えていない線を実線で、見えていない線を破線でかいていたので、同じことだと考えていたが、生徒たちは、難しいと感じたようだった。このことに関しても成果と課題で述べる。

第2次 ～立体の表面積と体積～

第2次では、第1次で学んだことをいかして、図形の計量に関わる内容の学習に取り組んだ。最初の「問い」にはこの内容に関わるが多かったため、それらの解決に向けた学習を行った。

第8時 立体の表面積① (柱体の表面積)

第8時は柱体の表面積について学習した。小学校のときに学習したことへの復習も含まれる。円柱の側面積を求めることと $\pi$ を使うことが新たな学習内容である。どのように考えて解いていったかを、プロジェクターで映し、学習を進めていった(図12)。

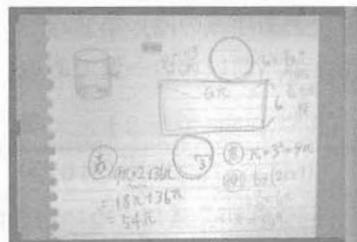


図12 円柱の側面積を求める

第8時が終わった後の「問い」は次のとおりである。

表8 第8時の学習を終えて、もった「問い」

問い (第8時)	人数	問い (第8時)	人数
・球体の表面積	3	・錐体の表面積	2
・なぜ、底面積は1つ分の面積か。	3	・五角柱の表面積	2
・地球の表面積	1	・表面積が簡単に出す方法がないのか。	1
・円錐の表面積	1	・底面の反対側も底面か	1

錐体や球、多面体などの表面積についての「問い」が多かった。また、底面積を求めるときに、1つ分だけを求めることに関する「問い」も見られた。錐体に関するものは次時へと繋げる。また、底面積についてのものは、個人的に知らせた。

第9時 立体の表面積② (錐体の表面積)

第9時は錐体の表面積について学習した。特に円錐の側面積は中心角との関係があるので、なかなか理解することが難しい内容である。基本的には底円の円周と、側面のおうぎ形の弧の長さが等しくなることから方程式をつくり、解いていく。中には比例式を立てて解く生徒もおり、その式を紹介した。また、自主学習で進んでいる生徒は、母線と半径に注目し、母線と半径と円周率をかけたら側面積が求まることを知っており、そうやって求めていたが、なぜそうなるのかを知らなかったため、理由を説明した。図13はそのときの板書である。

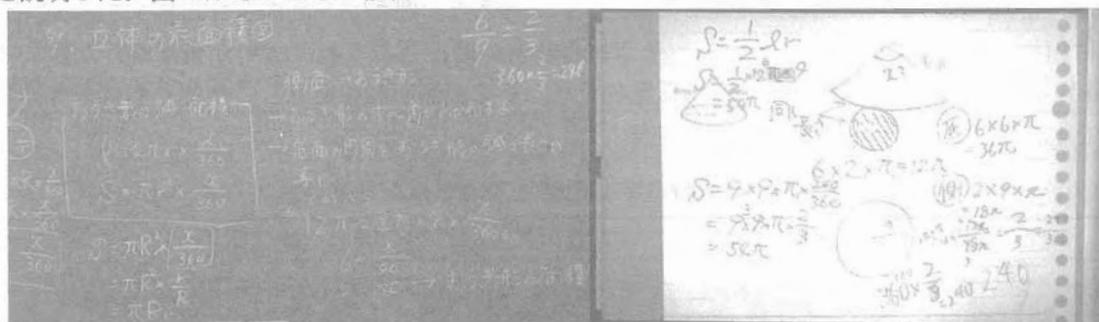
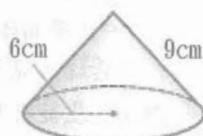


図13 円錐の表面積を求める学習のときの板書

問題の円錐



○公式を使って考える

$$2\pi \times 6 = 2\pi \times 9 \times \frac{x}{360}$$

$$6 = 9 \times \frac{x}{360}$$

$$x = 240$$

○比で考える

$$2\pi \times 6 : 2\pi \times 9 = x : 360$$

$$2 : 3 = x : 360$$

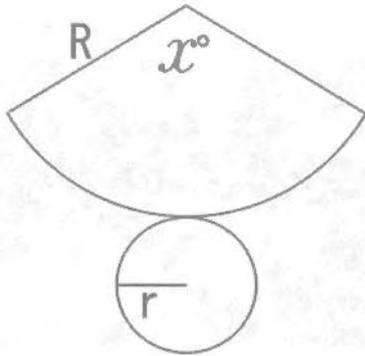
$$x = 240$$

ここからは同じ

$$\text{側面積} = \pi \times 9 \times 9 \times \frac{240}{360} \rightarrow \text{側面積} = 54\pi$$

○母線×半径×円周率で求める。

$$9 \times 6 \times \pi = 54\pi$$



なぜ、母線×半径×円周率で求まるか。

底円の半径を  $r$ 、母線を  $R$ 、側面のおうぎ形の中心角を  $x^\circ$  とする。底円の円周と側面のおうぎ形の弧の長さが等しいので

$$2\pi \times r = 2\pi \times R \times \frac{x}{360} \text{ という式が成り立つ。これを解くと}$$

$$r = R \times \frac{x}{360}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{360} \dots \text{①}$$

$$\text{側面積} = \pi \times r^2 \times \frac{x}{360} \dots \text{②} \quad \text{②に①を代入して}$$

$$= \pi \times r^2 \times \frac{R}{r}$$

$$= \pi r R$$

第9時が終わった後の「問い」は次のとおりである。

表9 第9時の学習を終えて、もった「問い」

問い (第10時)	人数
・円錐の側面積	16
・ $r$ と $R$ の違い	2
・球体でもできるか	1
・ $2\pi r : 2\pi R = x : 360$ の意味がわからない	1
・三角柱の底面積 $1/2 \times 2$ は省略してよいか	1

仕組みを説明するための式変形が難しかったと感じる生徒が多かった。簡単な求め方を知ったとしても、きちんと意味を理解した上で使うことが大切だと考える。また、公式を使うよりも、比例式を使う方が式を立てやすいと感じた。

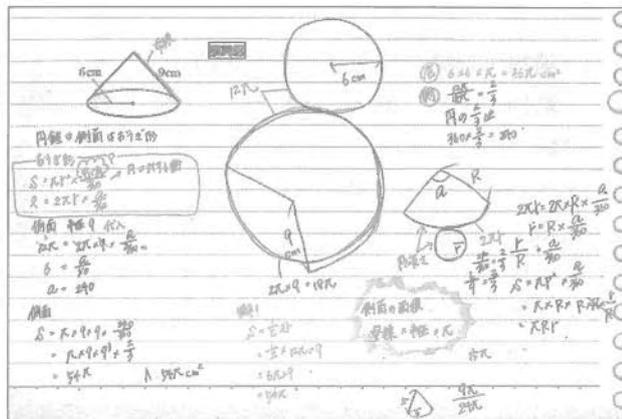


図14 生徒のノート (円錐の側面積)

第10・11時 立体の体積 (①柱体の体積, ②錐体の体積)

第10時は柱体の体積を、第11時は錐体の体積を求める学習を行った。アンケートでは苦手な内容であったが、小学校でも習っていたので柱体の体積を求める学習はスムーズに流れた。第11時は同じ底面積と高さの柱体と錐体の容器模型を用いて、水を入れて錐体の体積が柱体の体積の  $1/3$  になることを実感する活動を行った。しかし、何となく  $1/3$  になることは分かるが、本当にそう言えるのかという「問い」が出てきて、次の時間にそのことについて考えていくことにした。

表10 第10・11時の学習を終えて、もった「問い」

問い (第10時)	人数	問い (第11時)	人数
・球の体積の求め方	3	・ $1/3$ になる理由を理論的に知りたい。	1
・図形的にみるとどうなるか	1		

一番、知りたいと思うであろう  $1/3$  のことについて、次の時間に考えることを伝えたところ、ふりかえりに「問い」に関わることはほとんど見られなかった。

第12時 立体の体積③ (なぜ錐体の体積は柱体の体積の  $1/3$  か。)

第12時は錐体の体積が柱体の体積の  $1/3$  になることを確認するため、実際に画用紙を折って組み立てる活動を行った。図15のような正四角錐の展開図を画用紙に印刷して各班に配布し、協力して組み立てた (図16)。

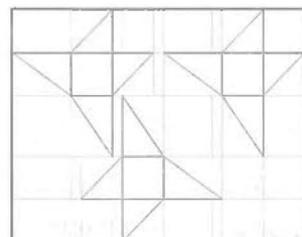


図15 正四角錐の展開図

組み立てた生徒たちは、 $1/3$ になることを実感した。「学習のふりかえり」には、次のようなふりかえりが見られた。

○錐体の体積が $1/3$ の理由がよく分かりました。計算を解くときもイメージしながらやれたらいいです。(生徒C)  
○まだ、きちんとはわからなかったけれど、実際に作ったらとてもわかりやすく理解できました。(生徒D)

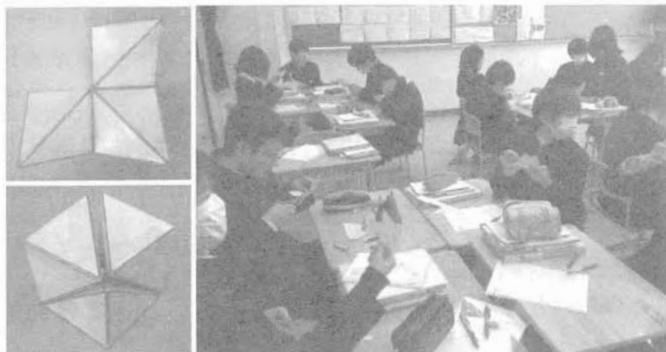


図16 3つの正四角錐と立方体(左) 図17 作成の様子(右)

なぜ、 $1/3$ をかければ求まるかの、本当の理由は、高等学校の学習内容を学ばないと分からないが、ふりかえりからは、自分たちで立方体を作成したことにより、 $1/3$ をかけることの理由を理解したことが伺える。

### 第13・14時 球の表面積・体積

第13・14時は、なかなか理解しづらい球の表面積と体積についての学習を行った。まずは、球の表面積について、同じ半径の円と半球に図18のようにひもを巻き付けた。そして、面積を長さに変えていることを伝え、その長さを比較した。その長さはもちろん正確ではないが、おおよそ円：半球＝1：2となった。つまり、半球の面積は、円の面積の2倍ということが言える。このことをきっかけとして、半径 $r$ の円の面積を利用して半球の、そして球の表面積を求めていった。下の図19がそのときの板書である。

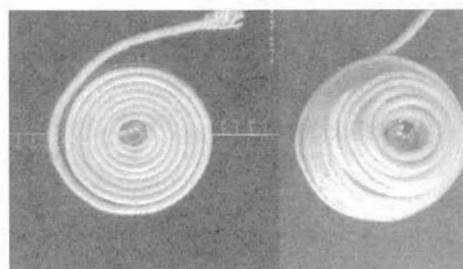


図18 同じ半径の円と半球の表面積を求める

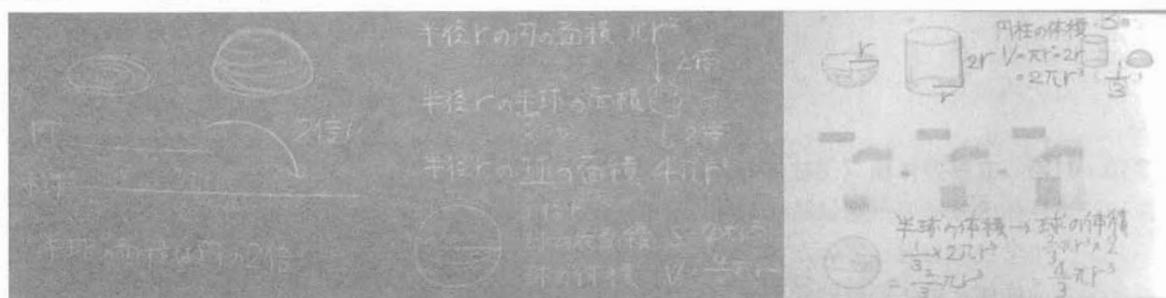


図19 円の面積から、球の面積を導き出したときの板書

そして球の体積については、同じ半径の半球と円柱の関係を示した図を利用して、その関係を導いていった(図20)。円柱の高さが半球の2倍、つまり、半径を $r$ とすると円柱の高さは $2r$ となる。その半球に水を入れて円柱に入れると、円柱は、半球3杯でいっぱいになる。

このことから、半球の体積：円柱の体積＝1：3 ということがわかる。

よって、球の体積：円柱の体積＝2：3…①となる。

そして、底円の半径 $r$ 、高さ $2r$ の円柱の体積は

$$\text{円柱の体積} = \pi \times r \times r \times 2r = 2\pi r^3 \quad \dots \text{②となる。}$$

①、②より、球の体積： $2\pi r^3 = 2 : 3$

よって、球の体積  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  が導き出される。

第13・14時の授業では、公式として知っていた球の表面積と体積について、どうしてそのような公式になるのか、具体物を利用して、中学一年生なりに理解することができた。

第13時のふりかえりからは、円の面積の2倍が半球の面積になることについての「問い」が多く見られた(表11)。また、第14時のふりかえりには、「問い」がなく、「式の変形が難しかった。」や「公式は知っていたが、どうしてそうなるかがわかった。」など感想がほとんどであった。

表11 第13時の学習を終えて、もった「問い」

問い(第13時)	人数
・なぜ円の面積の2倍が半球の面積か。	4
・なぜ半球と比較するのか	1
・球の体積が知りたい。	1
・ひもの長さに置き換えてどうして面積がでるのか	1

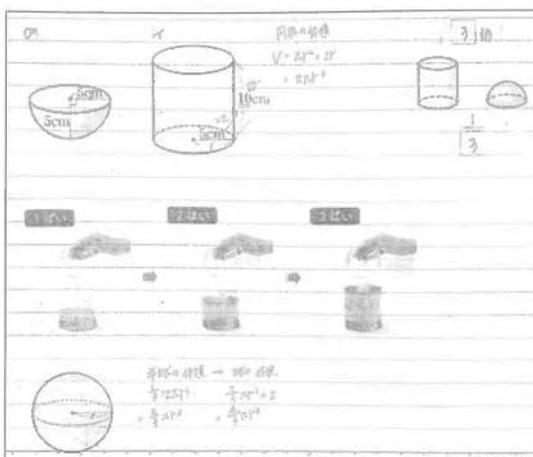


図20 球の体積を求めたときの生徒のノート

### 第15時 立体の展開図の対応する点を調べよう。

第15時は、アンケートで苦手な人が多かった展開図について学習を行った。小学校のときに取り組んだ問題の中に、立方体の面にかかれた図柄が、展開図ではどの面に、どのような向きでかかれるかが、全くイメージがわからないということだったので、まずは、立方体の展開図が何種類あるか、探す活動を行った。そのときに、次のようなワークシートと、補助資料を準備した(図21)。

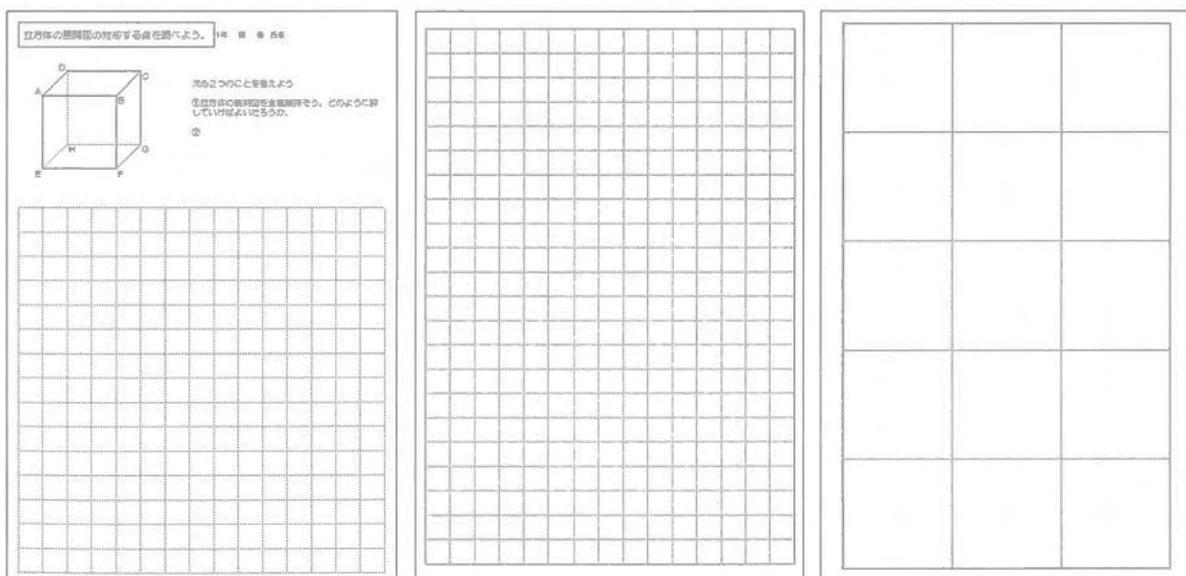


図21 立方体の展開図のワークシート(左)と、補助資料①(中)、②(右)

立方体の展開図のワークシートは、生徒たちが展開図を探しやすいように、マス目を載せた。補助資料①は、考えた展開図が本当にできるか分からなかったときに、実際に切って組み立ててみるために準備した。そして、補助資料②はグループで話し合った展開図を、学級全体で共有するために準備した。これらを利用して、立方体の展開図を探す活動を行った。まずは個人で考え、その考えを元にしてグループでお互いの展開図を確認し合った(図22)。そして、グループで一度、本当に展開図ができるのか確認してから、学級全体で共有した(図23)。そして、立方体の展開図が全部で11種類あることを確認した。



図22 グループで話し合う様子

次に示すのはそのときの授業記録である（下の図24に対応）。

T : (11種類あると確認した生徒に対して)どのように考えて11種類見付けたの?  
 S 5 : まずは、横に4つ並んだものを基本として、その上下に1つずつ付けたもの、つまり(上から)1-4-1のマスを1つずつ動かして6種類見付けました。①  
 T : なるほど。それで?  
 S 5 : 次に、真ん中を3マスとして、上から1-3-2のマスを1つずつ動かして3種類見付けました。②  
 T : それが、この3種類ね。  
 S 5 : はい。それで、残りは2-2-2と3-3のマスの並びを1つずつ見付けました。合計で11種類です。③  
 T : なるほどね。そういう風に規則的に見て探したんだね。

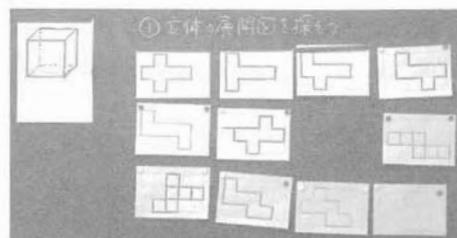


図23 立方体の展開図

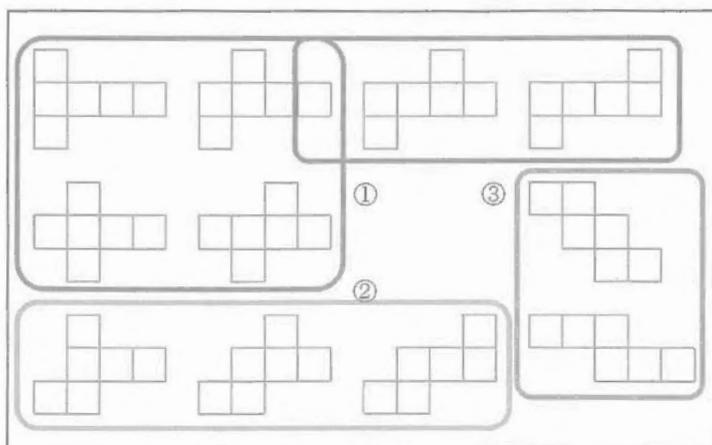


図24 立方体の展開図 (11種類)

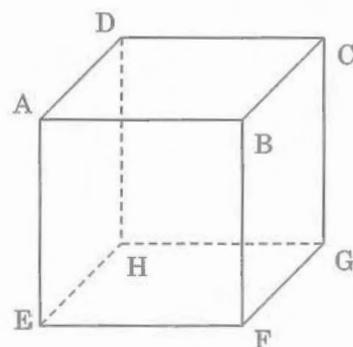


図25 立方体の見取図

立方体の展開図が11種類あることを確認した後、見取図の面が展開図のどの面と対応しているか、どんな規則があるか探す活動を行った。その際、図25のように、各頂点にA~Hの記号をふり、それが展開図のどこにふられるかグループで協力しながら考えた。なかなかイメージがわからないグループには、展開図を切って組み立ててみて記号をふることをアドバイスした。

各頂点に記号をふった展開図を元にして、規則を探していった。そして、規則を見付けたグループがあり、その意見を取りあげた。

規 則

- ① 1つ飛びの角 (かど) は同じ記号になる。
- ② 例えば、展開図で点Aの対角にある点Gは、見取図では2マスの対角にある。

その後、本当に規則があてはまるか、各自で記号を展開図にあてはめていった (図26)。

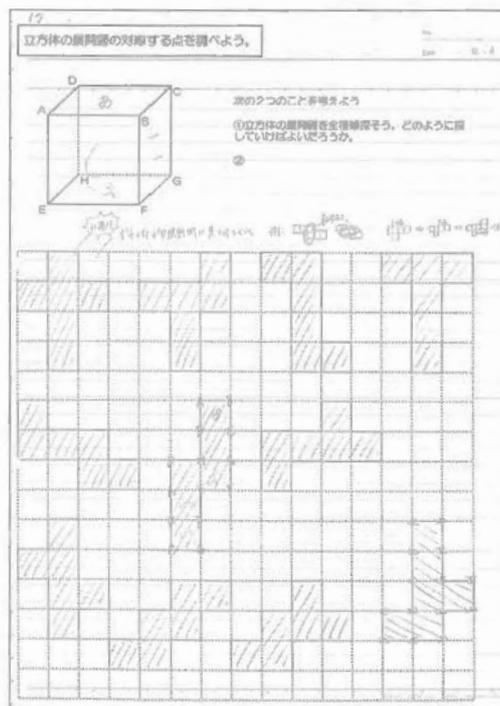
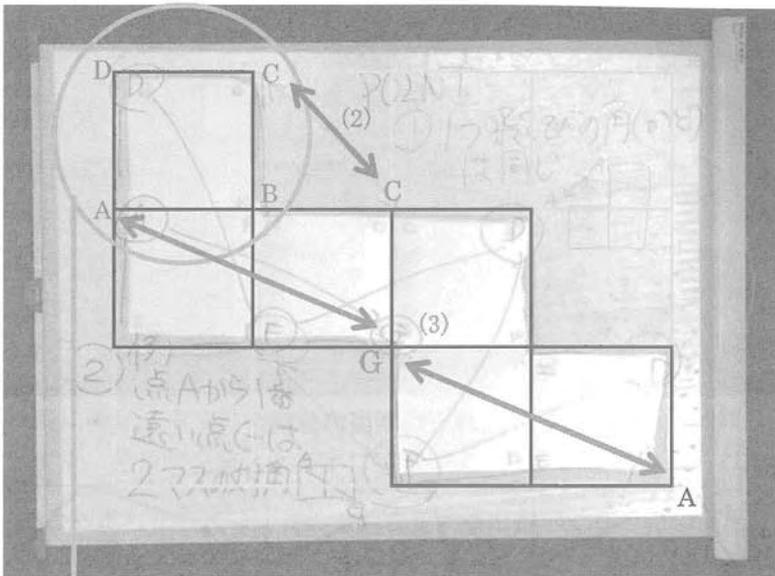


図26 生徒のワークシート



まず、見取図と対応している面を1つ決めてA～Dの記号をふる(図27)。

(1) ポイントとして、見取図の向きと同じようにふる。

(2) 規則①からCがふられる。

(3) 規則②からGがふられる。

同様にして再びAがふられる。

他の頂点も同じように考えていく。例えば規則②に関して、B-H, C-Eというふうに見付けていく。

このように、記号を付けていくと対応する面が分かるだけでなく、記号の状況から、面の向きを知ることができる。

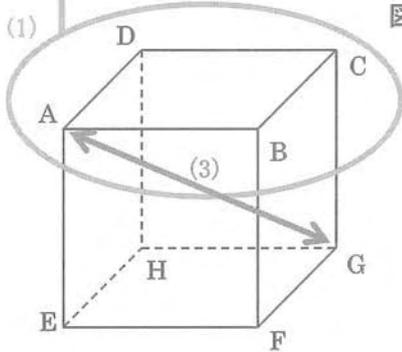


図27 見取図と展開図の対応する点の規則について

学習のふりかえりには「どの面とどの面が対応しているか規則からよくわかりました」「展開図の頂点の規則性が分かり、前よりとても分かりやすくなりました」など、頭の中でイメージして解決することに難しさを感じていた問題を、数学的に捉え直すことで、理解しやすいものになったことが分かった。今回も、納得のいった生徒が多かったようで、ふりかえりには、「問い」に関わるが見られなかった。

### 第16・17時 立体の切断面を探ろう。

第16時は、立体の切断面について考える学習を行った。立方体を取りあげ、立方体の頂点及び、各辺の中点をとる平面で切ったときの切断面がどうなるかを探る活動を行った。注意点として、「一刀で切れること」とただ点を結べばよいわけではなく、「表面に切り口が出てくること」を押さえた(図28)。まずはまずは、切断面について個人で考えた。その後、お互いに考えた切断面について本当にできるのか、重なっているものなどはないのかなど、グループで確認する時間を設けた。図29は、そのときの活動の様子である。確認した後、グループで考えた切断面を学級全体で共有し(図30)、同じものやできないものはないか確認していった。

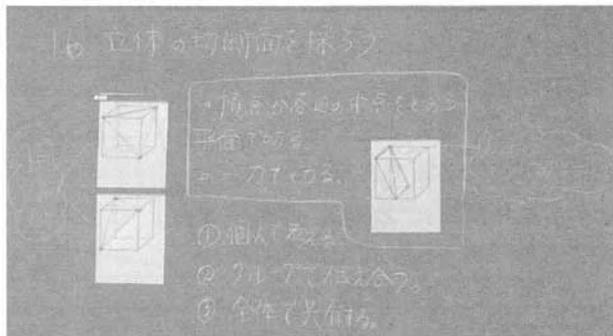


図28 切断するときの注意点



図29 切断面についてグループで確認している様子

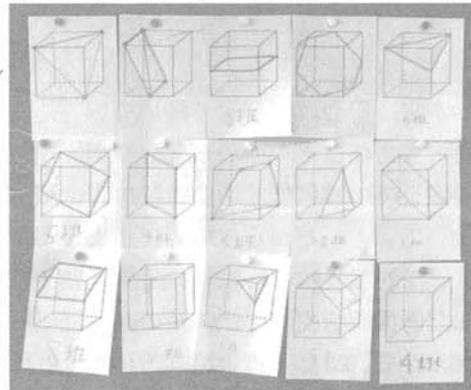


図30 発表された切断面

「どのように確認していけばよいと思う」と投げかけたところ、生徒から「出来る切断面の形で分ければいいのではないか」という意見が出た。その意見にしたがって分けて1つずつ確認していった(図31 切断面の分類)。三角形はイメージがしやすかったようで、どの切断面についても特にわからないという意見は出なかった。四角形については、切断している場所が違うだけで同じものが4種類あった。それが同じものであることを1つずつ確認した。

その後で、三角形と同様に本当にできるのかを確認した。すると、切断面が長方形になるものに関してはイメージできるが、図32の四角形と六角形に関しては、イメージがわからないという意見がでた。イメージがわいている生徒が説明を行ったが、なかなか伝わらなかった。ここで時間がきてしまい、最終的な確認は次の時間に行くことになった。

第17時は、引き続き、立方体の切断面についての学習を行った。前時に本当に切断できるかわからなかった切断面について、掃除用具である「メラミンスポンジ(サイコロタイプ)」(図33)を切断して具体物として提示した。生徒はその具体物を見て、本当に切断できることを確認した。その後、教師がそのような切断面ができる理由について説明した。

本来、平面は限りなく続いていく。立方体はその面の一部分を切り取っている状態であるので中点や頂点を結んだ線で切断したとしても、その線も途中で止まらず、続いていく。だから、中点で止まっている線分を、面を広げて伸ばしていけばよい。しかし、そのイメージを生徒はもちにくいと考えたので、図34のように、複数の立方体をくっつけて頂点や中点を結んだ断面図を提示した。この断面図の一部分(1つの立方体)がイメージしにくい切断面であることが分かる。また、複数の立方体をくっつけた切断面のうち、イメージしにくい切断面以外は、最初に確認した三角形の切断面になっていることが分かる。

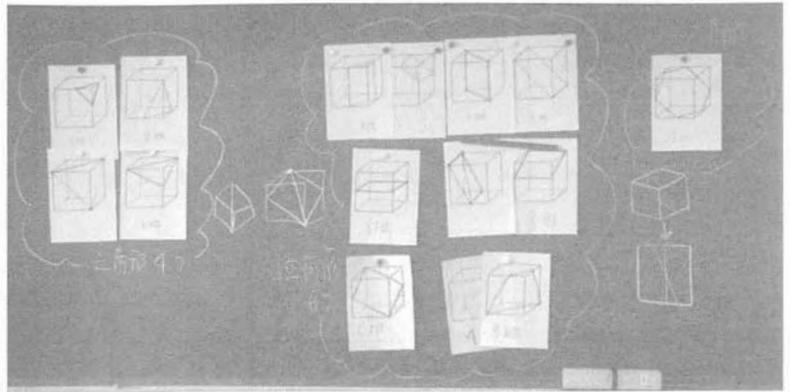


図31 切断面の分類

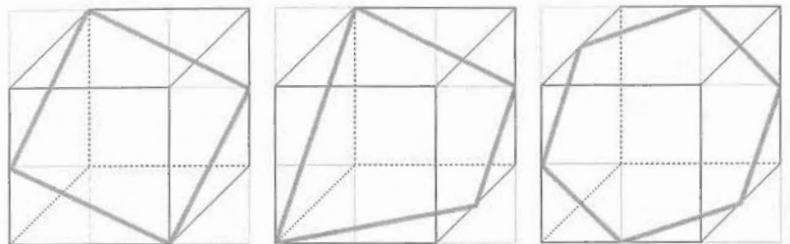


図32 本当に切断できるかわからない四角形と六角形

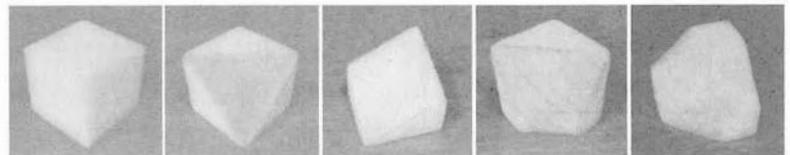


図33 メラミンスポンジで作成した具体物

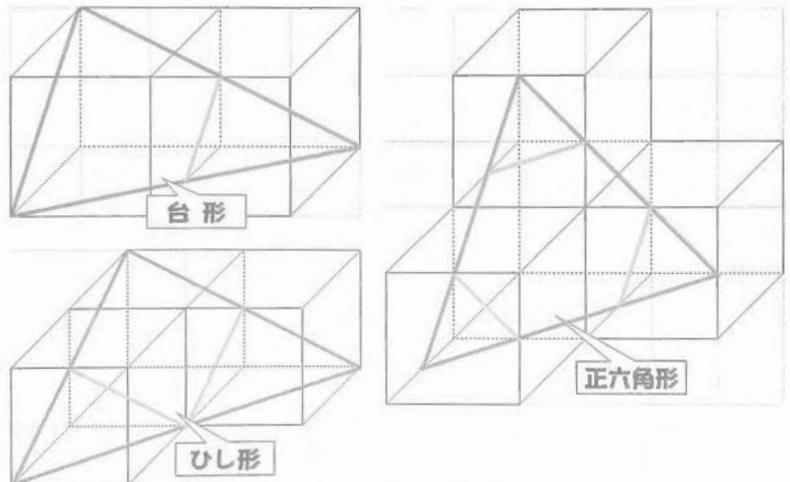


図34 立方体を重ねて切断したときの切断面

次に示すのは第16時を終えたときの「問い」である（表12）。

表12 第16時の学習を終えて、もった「問い」

問い (第16時)	人数	問い (第16時)	人数
・ どうして六角形ができるのか	5	・ 台形が出来るのか知りたい。	4
・ 平行に動かしただけではできないのはどうするか。	1	・ 五角形ができるのか	1
・ 考え方を知りたい	7	・ 平行四辺形もできるのか	1
・ どうしたらイメージしやすいか	1	・ 何種類出来るか知りたい	1
・ 条件を変えればもっとたくさん出来そうだ。	1	・ 四角形は何種類あるのか	1
・ 他の形を知りたい	2		

第16時が途中で終わったために、切断面ができる理由に関わる「問い」が多く見られた。

また、第17時を終えたあとには次のようなふりかえり見られた。

○なぞだった三角の見える方向を変えると台形になったので見方を変えるのは大切だと思いました。  
(生徒E)

○イメージしにくいときもあったけど、最後にやった中点を通る図は、途中の図という考え方がとてもよく分かりました。(生徒F)

新たな見方や考え方を知り、今後にかそうとする気持ちや、空間的に見ることで理解が深まった様子が見えてくる。

#### 4 成果と課題

##### (1) 空間をイメージする力について

単元が終了したときに、次のようなアンケート調査を行った。

○中学校での空間図形の学習について、枠内に書いてあるのは授業の内容です。以下の質問に答えなさい。

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| 1 いろいろな立体について   | 2 正多面体について      |
| 3 見取図について       | 4 展開図について       |
| 5 空間内の平面と直線について | 6 動かしてできる立体について |
| 7 投影図について       | 8 柱体の表面積について    |
| 9 錐体の表面積について    | 10 柱体の体積について    |
| 11 錐体の体積について    | 12 球の表面積・体積について |
| 13 立方体の展開図について  | 14 立体の切断面について   |

Q1 学習を通して、興味がわいたことや面白かったこと、納得したことなどについて番号で答えなさい。また、その理由を簡単にかきなさい。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
9%	4%	6%	3%	6%	9%	3%	11%	4%	11%	13%	9%	9%	3%

図35 Q1の結果（意見数531）

空間図形の単元を終えて、興味がわいたことや面白かったこと納得したことなどについて、生徒に記述してもらった（図35）。Q1の結果から、

「12球の表面積・体積について」13%，70票

「9錐体の表面積について」11%，59票

「11錐体の体積について」11%，60票

「2正多面体について」9%，46票

「7投影図について」9%，50票

「13立方体の展開図について」9%，46票

「14立体の切断面について」9%46票

と続いている。これらは全て具体物を用いた学習内容である。これ以外で具体物を用いたのは「6動かしてできる立体について」だけである（立体模型を除く）。やはり、具体物を用いてイメージをしやすい方が、意欲や関心が高まることが分かる。また、「12球の表面積・体積について」や「9錐体の表面積について」、「11錐体の体積について」の授業は、生徒が中学校に入学して初めて学習する内容であるため、知りたかったことを知ることができたということも、この結果に繋がったと考えられる。生徒から出た具体的な意見を紹介する。

- 12・球の表面積や体積の公式の意味について知ることができたから。(生徒E)
- ・4/3という中途半端な数字や、半径を3乗することに意味があったから。(生徒F)
- 9・円錐の側面積のいろいろな求め方を知ったから。(生徒G)
- 2・正多面体が5つしかないことに驚いた。その理由を知ってスッキリした。(生徒H)
- 7・見る場所が違うと、違う投影図になるということを知ると、様々な見方をすることができました。(生徒I)
- 13・立方体の展開図が、どのような規則に従って作られているのか知ることができたから。(生徒J)
- 14・線を延ばすことにより、切断できると分かることがあったから。(生徒K)

Q2 学習を通して、難しかったことや分からなかったことなどについて番号で答えなさい。また、その理由を簡単に書きなさい。



図36 Q2の結果（意見数228）

次に、難しかったことや分からなかったことについて質問した（図36）。結果を見ると、  
 「7 投影図について」21%、47票                      「14立体の切断面について」21%、47票  
 「5 空間内の平面と直線について」13%、29票      「12球の表面積・体積について」12%、28票  
 「9 錐体の表面積について」10%、22票  
 となっている。具体的には次の意見が見られた。

- 「7 投影図について」
  - ・実線か破線になる境目などが少しわかりにくかったから。
  - ・同じ図形でも見る角度によって形が変わる。
  - ・応用問題になるとイメージしにくかった。
- 「14立体の切断面について」
  - ・切断面のイメージがしづらかったから。
  - ・切断面の中で、どれとどれが同じものになるか。
  - ・六角形の切断面になる切り方が、よくわからなかったから。
- 「5 空間内の平面と直線について」
  - ・どういうときに平面が1つに決まるのか。
  - ・辺と面の平行の関係や、ねじれのところが難しかった。
  - ・なぜ、そうなるのかについて、自分で説明ができないから。
- 「12球の表面積・体積について」
  - ・球は曲面だから、いろいろと難しかった。
  - ・球の体積を、四角錐を利用して求めるときの式が複雑すぎて分からなかった。
- 「9 錐体の表面積について」
  - ・求めるための公式を覚えられない。
  - ・円錐の側面のおうぎ形で中心角が分からないので解く式がこんがらがってしまった。

「7 投影図について」は実線と破線の使い方が明確でなかったこと、「14 立体の切断面について」は本当にそうなるのかイメージがわきにくいこと、「5 空間内の平面と直線について」は「12球の表面積・体積について」ということが、このような結果になった原因であると考察し、改善すべきことである。

次に、単元を終えて、どんな力がついたかについての質問をした(図37)。

**Q 3 この単元の学習を終えて、どんな力がついたらと思いますか。**

- ・想像力 70票
- ・体積や表面積などの計算力 47票
- ・立体的な思考力 34票
- ・図形をかく力 20票
- ・図形の規則を見付ける力 12票
- ・興味をもったものを調べる・取り組む 6票
- ・無回答 4票
- ・公式の理由が分かった。 3票
- ・ $\pi$ について 2票
- ・説得力 2票
- ・単位 1票
- ・単純にして考える力 1票
- ・数学的な力 1票
- ・他の考えをいかす 1票
- ・話し合い 1票
- ・集中力 1票

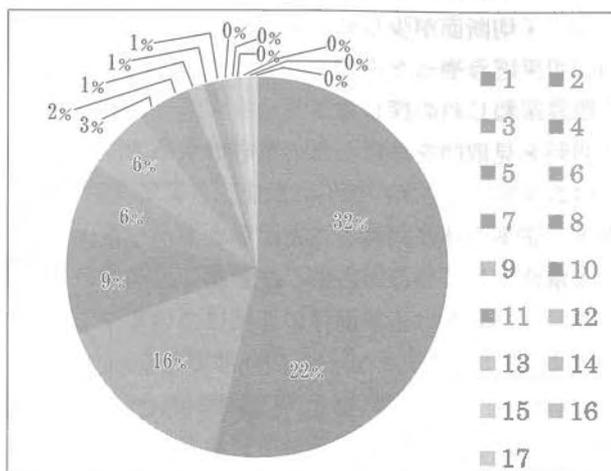


図37 Q 3の結果 (意見数218)

結果からは、想像力や立体的な思考力などの票と計算力の票が多かった。空間的なイメージしないと解決できないことが多く、生徒の実感として、これらの力がついたらと感じている生徒が多いと言える。

**Q 4 学習のふりかえりを見直して、その授業のときに感じた疑問などは解決されましたか？ そのことについて具体的に書いてください。**

Q 4では、毎時のふりかえりにおいて、あげられた「問い」が授業をとおして解決されたかどうかについて質問した。その結果が図38である。74%の生徒が解決されたと答え、26%の生徒が、解決されていない「問い」があると答えている。解決されていない「問い」は次のとおりである。

- ・球はなぜ底面積がないのか。
- ・円柱と球は他の柱体と関係があるか。
- ・球体の正確な展開図は存在するのか。
- ・すべての面がちがう多面体は何というか。
- ・ねじれは正十二面体だと何個あるのか。
- ・正多面体ができる角度がよく分からない。

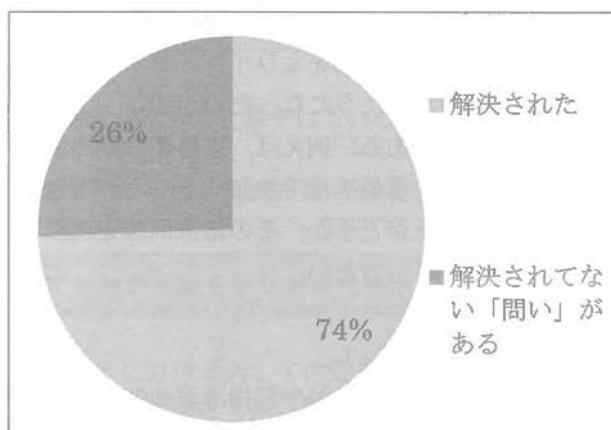


図38 Q 4の結果 (意見数117)

- ・正多面体の体積3
- ・正多面体の見取図のかき方
- ・正多面体の展開図

- ・正多面体が出来る理由で、角度以外に関係するものは何か。
- ・サッカーボールは五角形と六角形が混じっているのか。
- ・大きさの違う正多面体を繋げるとどうなるか。
- ・投影図の2つの線の使い分け3
- ・切断面が少し分からない。4
- ・どうやったらイメージしやすくなるか。
- ・ねじれの探し方
- ・見取図をかくときの重心の求め方。
- ・投影図の使い道
- ・平面の決定3
- ・1/3の理由がいまいち分からない。
- ・五角柱の高さを見取図にかくこと。
- ・曲面の概念

正多面体に関わることが多く上がった。全体では取り上げなかったことばかりなので、疑問が解決されていないと感じた生徒には、これらのことをレポートとして作成することを伝えた。

右の図39は正多面体の面積についてまとめた生徒のレポートの一部である。Q4で自分の「問い」が解決されなかったこの生徒は、正多角形を三角形に分けて面積を出している。このように、解決されなかったことをレポートで解決しようとした生徒もいれば、解決されなかったことではなく、興味がわいたことについてレポートを作成した生徒もいた。

レポート作成をとおして、生徒自身がもった問いで解決できなかったことを、自ら解決できるようにしていきたい。

## (2) 課題について

事前のアンケートだけでなく、検証問題を作成し、単元前後の変化を見ることが必要であった。生徒の認識だけでなく、本当に空間をよりイメージすることができるようになったのか知ることでも大切である。例えば、立方体の展開図や切断面に関わることは、小学校のときにも学習しているので、事前事後で検証することができる。中学校で学んだことで、この空間をイメージする力が付いたかどうか、その結果問題を解決することができたかどうかについて、取り組んでいき、検証していきたい。

## 参考文献

- ・文部科学省2008「中学校学習指導要領解説」
- ・平成26年度島根大学教育学部附属学校園指導案集

(やすの ひろし 数学科 h-yasuno@edu.shimane-u.ac.jp)

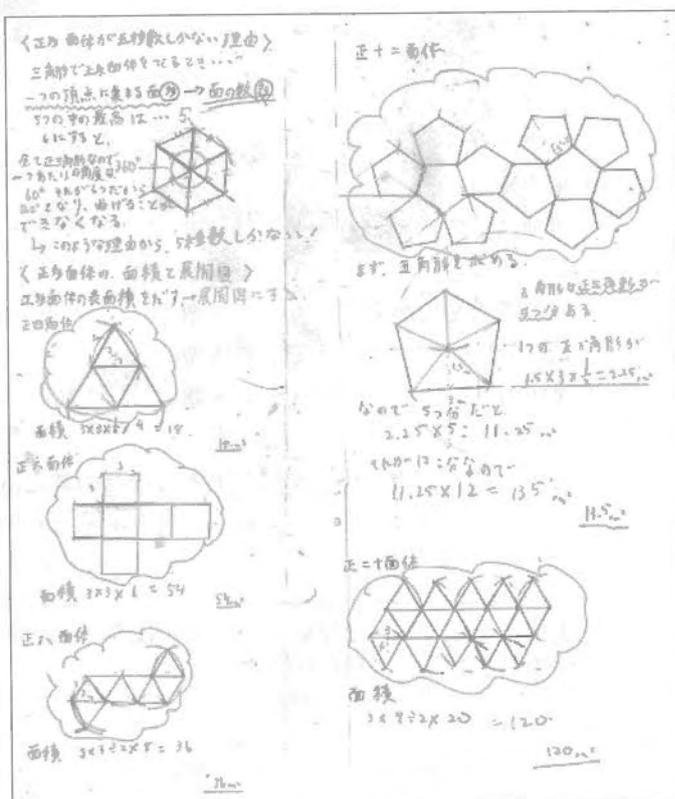


図39 正多面体の表面積について (レポート)