星形ｎ角形の角の和を追求し，図形の見方を豊かにする子ども

― 中学２年「図形の調べ方（課題学習）」の実践から ―

１　単元のねらい

観察，操作や作図などの活動を通して，基本的な平面図形の性質を見いだし，平行線の性質や三角形の角についての性質を基にしてそれらを確かめることができる。さらに，証明の必要性と意味及びその方法について理解できる。

２　授業の構想

(1) 子どものとらえについて

生徒は，２年生になり最初の学習単元として「式の計算」の学習を行った。その中の「文字式の利用」では，これまでに説明した「整数の性質」から，条件を変えて新たな命題をつくり，文字を用いた式を使って説明する学習に取り組んだ。ここでは，例えば「連続する３つの整数の和は，３の倍数になる。」という命題を説明することで，与えられた命題には含まれない「真ん中の整数の３倍になる。」という新たな関係の気付きが生じた。そして，さらに仮定や結論部分を変えることで自ら命題を考え，その説明を追求する学習に取り組んだ。「連続する５つの整数の和は，・・・」「連続する７つの整数の和は，・・・」のように仮定を変えていく生徒や，「連続する３つの偶数の和は，偶数になる。」という命題から，「真ん中の偶数の３倍になる。」あるいは「６の倍数になる。」のように式の意味を読み取ることができた生徒もいた。さらに「連続する10個の整数（自然数）の和は，・・・・」を追求し，式の意味を読み取ることができた生徒は，素早く計算する方法にも気付くことができた。生徒は，自らが予想した１つの命題を説明することで学習を終えるのではなく，その命題から予想していなかった新たな数量関係を，発見的にとらえ直す機会を得ることができたといえる。この姿こそ，本学校園算数・数学科が目指している数学的な思考と関わる問いをもち追求する姿である。

しかし，このような数（整数）の性質を見いだす活動において，果たしてどれだけの生徒が実質的（主体的）にその活動に取り組めているのか。主体的な学びができているのは，実は数学が得意な一部の生徒だけであるのではないか。これまでの授業を振り返ってみると，一部の生徒が発した問いをきっかけに，授業を次のステップへと進めている現状もあった。全ての生徒に自分自身の問いをもたせることが，一人一人の思考のスイッチを入れることにつながる。このような姿をより多くの生徒から引き出すためにも，繰り返しこうした学習の機会を作っていく必要がある。図形領域である本単元でも，問題から問いをもち課題を追求していく力，さらに問題を振り返り発展的に考え，図形をいろいろな視点からみる力を，一人一人が伸ばすことができるような学習を目指して構想していくこととした。

(2) 本単元の内容と算数・数学科で考える問いをもち追求する姿との関わりについて

「図形」とは，身の回りにある様々なものを「形」「大きさ」「位置関係」という観点からとらえたものである。この図形領域の学習では，第１学年において，平面図形や空間図形について，観察，操作や実験などの活動を通して，小学校算数科において養ってきた直観的な見方や考え方を深めることを中心としながら，論理的に考察し表現する能力を培ってきた。それを受けて，第２学年では，平行線や角の性質，三角形の合同条件などを学習し，これらを基にして，いわゆる論証によって三角形や平行四辺形の基本的な性質を確かめられるようにしていくことになる。これまで直感的にとらえてきた図形の性質を，論理的に筋道を立てて推論していくという，まさに数学的な推論（特に演繹的な推論）ができるようになることを目指していくことになる。

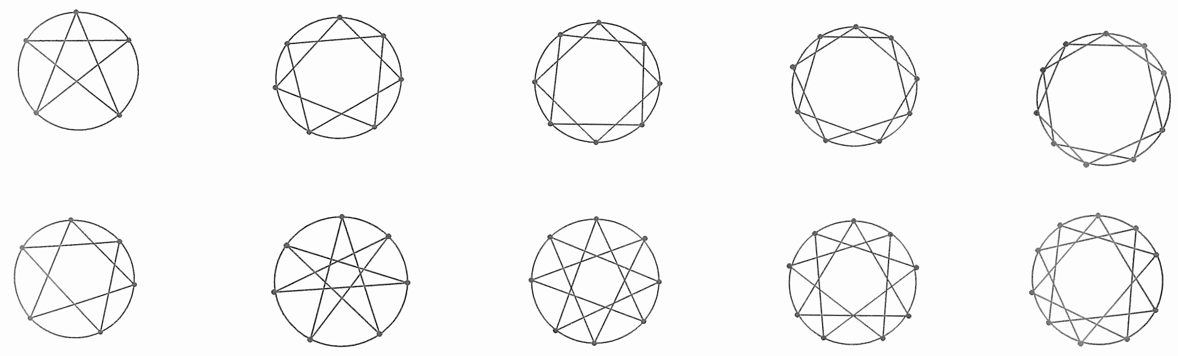
このように根拠をもって簡潔，明瞭に筋道立った説明ができるようにすることは，図形指導におけるねらいの１つである。そして，学習を通して図形の見方を豊かにしていくことは，このねらいに迫る上で極めて重要である。また，図形の見方が豊かになることで，生徒の数学に対する興味や関心を高めることができる。さらには，日常生活において，身の回りにある様々な図形をとらえる視点をより豊かにすることにもつながると考える。

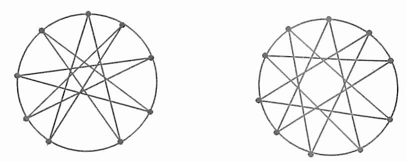
学習を進めるに当たっては，例えば「２つの角は等しくなりそうだ。」という予想を基に，「なぜそうなるのだろうか。」，「いつでも成り立つのだろうか。」といった問題から生じた問いに対して，論理的な説明ができるようにしていく。さらに「条件を変えてみるとどうなるだろうか。」といった新たな問いを，一人でも多くの生徒が自分自身の問いとしてもつことできるようにしていきたい。そしてこうした姿が現れるためには，本時のねらいにせまる問題になっているか，さらに全ての生徒が考えられる，また考えたくなるような問題になっているか，というような視点をもって教材を与えていく必要があると考える。

(3) 本単元の内容における問いをもち追求する姿を育成するための具体的な手立て等について

上記(2)のように図形領域のねらい等を踏まえた上で，今回は，２年図形領域前半（「図形の調べ方」）を終えた後の課題学習として「星形ｎ角形の角の和」の問題に取り組んでいく。この教材（特に，「星形五角形の角の和」の問題）は，出版されている７社全ての教科書で扱われているもので，多様な視点から図形を見ることができるというよさがある。また，平行線と角から頂点を動かすという問題に変えて星形五角形に変形して考えたり，星形六角形，星形七角形，… のように頂点の数を増やし，また結び方を変えてみるという発展的な教材としての扱いも可能である。今回は特に，星形多角形や，その星形多角形の角の和のもつ規則性を，学び合いやふりかえりを通して生徒が主体的に追求していけるような展開を工夫した授業づくりに取り組みたいと考えた。

（参考：星形多角形）





具体的に第１次では，星形五角形について知り，星形五角形の５つの角の和が180°になることの説明をいろいろな方法で考えていく。第２次では，「星形六角形や星形七角形はあるのか。」という問いをもとに，星形多角形あるいは星形正多角形について定義していく。ここから特に星形七角形について取り上げ，点の結び方を変えると７つの角の和はどうなるのか。また７つの点を２番目ごとに結んだ星形七角形の７つの角の和が540°になること，７つの点を３番目ごとに結んだ７つの角の和が180°になることの説明をいろいろな方法で考えいく。そして第３次にあたる本時では，これまで追求してきたことを基に星形多角形や，その

星形多角形の角の和について何か規則性がないか予想をたてる。その上で，さらに星形八角形，星形九角形，星形十角形，… について追求し，その結果を基に星形多角形や，星形多角形の角の和のもつ多くの規則性を，１つでも多く生徒自身が見いだせるような授業展開を目指していきたいと考えた。

３　展開計画（全４時間）

次	主な学習	時	具体的な学習・内容
1	○星形五角形の角の和	1	・５つの点を一筆で結んで，いろいろな図形を作る。 ・５つの角の和が180°になることを，いろいろな方法で説明する。
2	○星形多角形とは ○星形六角形，星形七角形の角の和	2 3	・星形五角形を例に，星形多角形，さらに星形正多角形について知る。 ・星形六角形，星形七角形を，点の結び方に注目してかいてみる。 ・７つの点を２番目ごとに結んだ星形七角形の７つの角の和が540°になることを，いろいろな方法で説明する。 ・７つの点を３番目ごとに結んだ星形七角形の７つの角の和が180°になることを，いろいろな方法で説明する。
3	○星形ｎ角形の角の和 ○星形ｎ角形の角の和についてのまとめ	4 課外	・星形八角形，星形九角形，星形十角形…の角の和を求める。 ・星形多角形や，その星形多角形の角の和について気付いたことをまとめる。（レポート作成）

４　授業の実際

(1) 星形五角形の角の和（第１次第１時）

本学習の導入では，円周上に５つの点をとり結ぶことから学習をスタートし，５つの点を１つおきに結ぶと星形の図形（星形五角形）ができることに気付いた。そして，星形五角形の先端の角の和が180°になることを，これまでに学習した図形の性質を根拠に，いろいろな求め方で追求していった。

図１は，生徒の追求の一部であり，１つの三角形に５つの角を集めた考え方，ブーメラン形を使った考え方，ちょうちょ形を使った考え方，内部の小さな五角形の内角の和を利用する考え方，平行線を引いて１点に角を集める考え方などを表したものである。

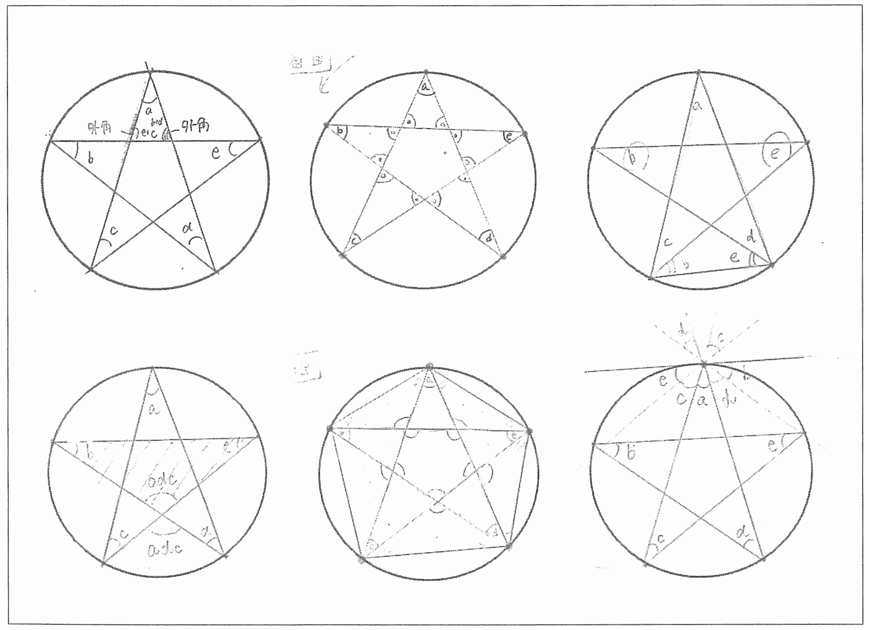
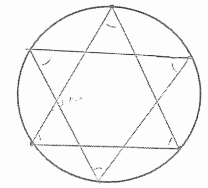


図１

次時の学習につながるよう「さらに追求してみたいこと」を視点にふりかえりを行ったところ，次のようなことが挙げられた。

・（５つの点から）さらに点をふやしてみるとどうなるか。
・（５つのとんがりから）６つのとんがりをつくってみるとどうなるか。
・別の形の星形でやってみるとどうなるか。



(2) 星形六角形，星形七角形の角の和（第２次第２・３時）

第２次では，図２のように円周上の点を６つ，７つとして１つおきに結んだ星形多角形（星形六角形，星形七角形）をかき，その先端の角の和を求める学習を行った。

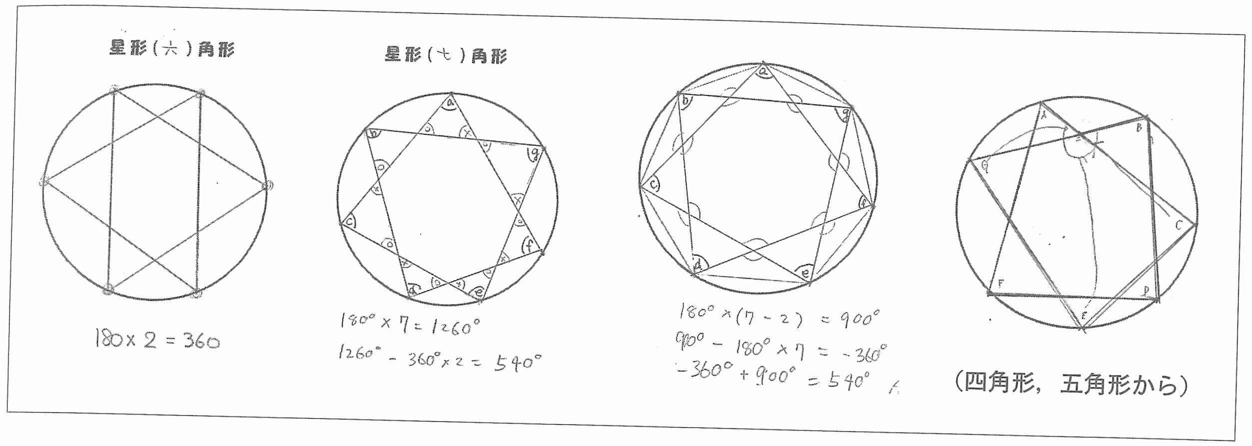


図２

追求の過程の中で，結び方に着目できるようにしたことによって，星形七角形はもう１つあることに気付き，その角の和は何度になるかという追求につながった。

図３は，ブーメラン形を見つけて考えていったもの，あるいは三角形と五角形から角の和が180°になることを求めていったものである。

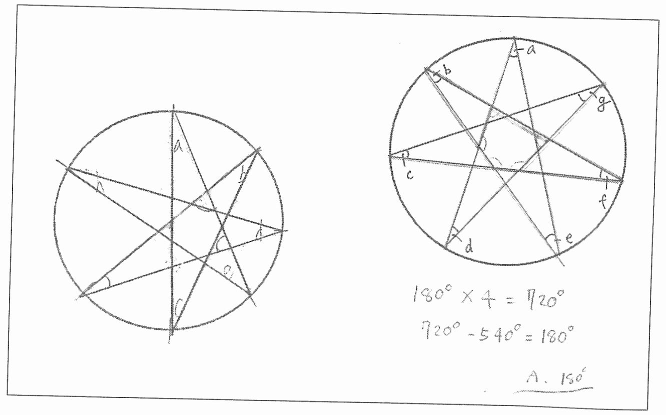


図３

これまでの学習をふりかえって，「星形多角形の角の和について分かったこと，いえそうなことをまとめよう。また疑問に思ったこと，さらに追求してみたいことをあげてみよう。」というワークシートに，生徒Ａは図４のような記述をした。

わかったこと，いえそうなこと	疑問に思ったこと，さらに追求してみたいこと
星形五角形…180° 星形六角形…360° 星形七角形…なぜか540°と720° 分かったこと ・星形多角形の角の和の求め方は色々ある。 ・星形五角形と星形六角形は180°差がある。 ・星形七角形は２つの角度 いえそうなこと ・星形八角形…星形七角形のように２つの角度が出てくる ・星形百角形くらいになると五種類くらいの角が出てくるかもしれない ・それぞれの角の和を求める公式があるかもしれない？	・なぜ星形七角形は２つの角が出てくるのか？ ・角の大きさは比例してくるのか？ ・簡単な式を出すことができるのか？

図４

この他にも，疑問に思ったこと，さらに追求してみたいこととして，次のような記述があった。

生徒Ｂ「星形七角形までは順調だったのに，もう１つの星形七角形は法則が当てはまらなくなった。」
生徒Ｃ「なんで星形七角形の和が180°になるやつがあるのか。私は，まだあまり角度を求めるやり方が理解できていないので，もっと簡単な求め方があればよいのに・・・。」
生徒Ｄ「２つとばしの星形多角形の求め方が分からず，解けませんでした。だから，２つとばしの星形多角形の公式みたいなものを知りたいです。」

上記の記述から，多くの生徒は具体的な星形多角形の角の和を求めることを通して，どんな星形多角形の角の和でも求めることができる公式を見つけたいという意識が強くなっていったことが分かる。

また，学習のふりかえりに生徒Ｂは次のように書いていた。

> 星形七角形のような複雑な図形でも，いろいろな図形の性質を組み合わせていけば答えを求めることができるので楽しかった。星形の図形には，どういう規則があるのか。八，九，十，…と調べて見つけてみたい。

(3) 星形ｎ角形の角の和（第３次第４時）

第３次では，前時までの学習を振り返り，「星形八，九，十・・・角形となっても180度ずつ増えていくのか。」「このきまりは，本当に成立するのか。」「また，すべての星形多角形にあてはまる公式のようなものはないか。」といった新たな問いをもって**図５**のように追求していった。生徒の中には，角の和の求め方にもパターンを見いだし，「ブーメラン形を見つけること」「まわりを補助線で囲むこと」が有効であると気付いた生徒も多くいた。

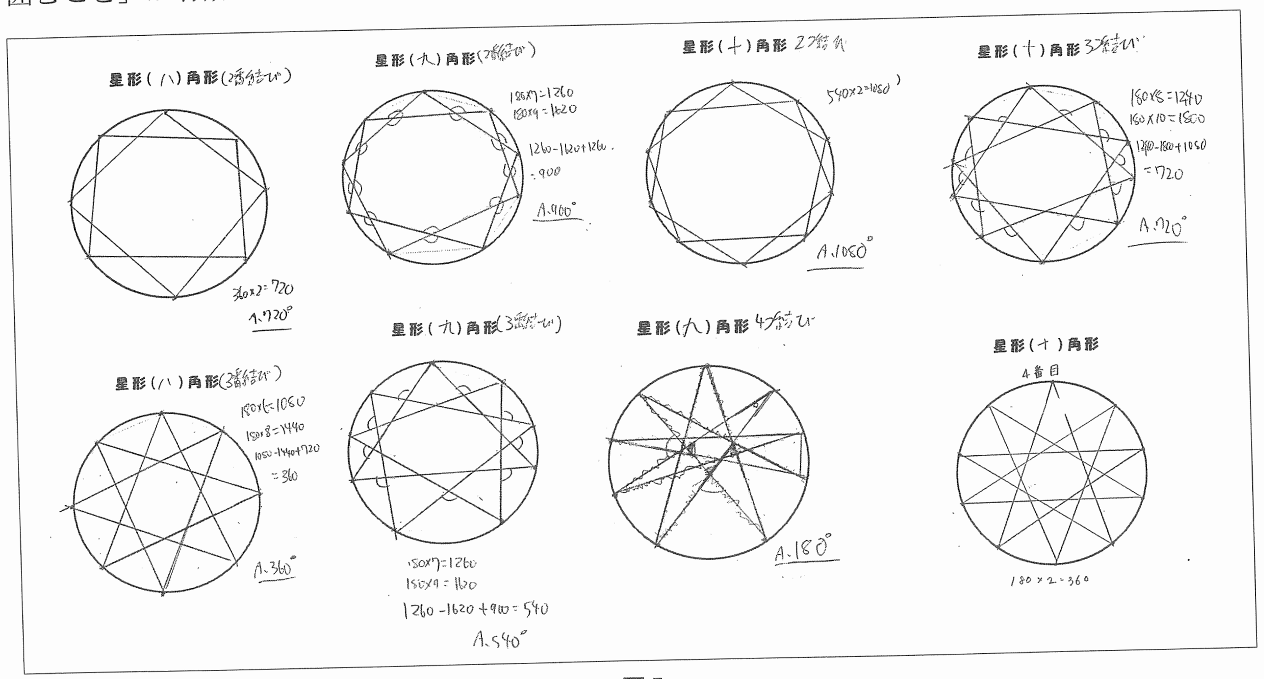


図５

表１のように星形十角形までの角の和をまとめ，星形ｎ角形の角の和についても予想できる生徒もいた。そして，これまでの１つ１つの追求を基に，さらに追求を深める学習へとつなげていった。

表１

	星形八角形	星形九角形	星形十角形	星形n角形
２番目	720°	900°	1080°	180°×(n−4)
３番目	360°	540°	720°	180°×(n−6)
４番目	×	180°	360°	180°×(n−8)

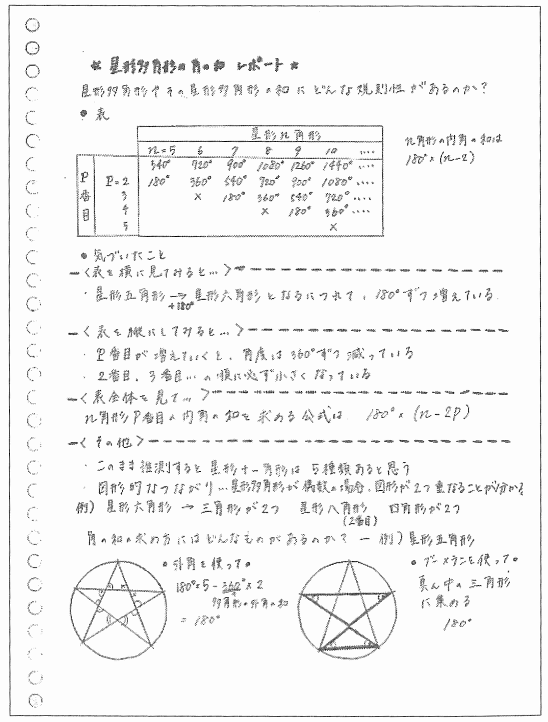
> 《課題》（円周上の）点の数を増やしたり，その点の結び方を変えたりすると，星形多角形やその星形多角形の角の和にどんな規則性があるか考えよう。

上記の課題について，個々の追求から，班や学級全体での学び合いの中で，生徒から次のような気付きを引き出すことができた。

> 【星形多角形の角の和に関して】
> ・２番目ごとに結んだ星形多角形の角の和は，180°ずつ大きくなっている。
> ・ｐ番目ごとに結んだ星形多角形の角の和は，180°×（ｎ－２ｐ）となる。
> ・２番目ごとに結んだ星形六角形は三角形が２つ，星形八角形は四角形が２つ，星形十角形は五角形が２つでできている。
> ・同じ星形多角形では，結び方を２番目，３番目，…と変えると，角の和は360°ずつ小さくなっている。
> ・２番目ごとに結んだ星形多角形では，星形五角形と同じ図形が星形六角形には２つ含まれ，角の和は180°×２＝360°となる。同様に，星形七角形には３つ含まれ，角の和は180°×３＝540°となる。
> 【星形多角形に関して】
> ・星形ｎ角形のｎが奇数（５，７，９，…）のときに，かくことができる星形多角形が１つずつ増える。
> ・星形多角形の図形をみると，その中にその多角形が含まれている。例えば，３番目ごとに結んだ星形八角形の中には，八角形や２番目ごとに結んだ星形八角形が含まれている。

５　おわりに

本学習を通して，生徒が「星形多角形の角の和」について，点の数を増やしたり，その点の結び方を変えるとどのような星形多角形ができるのか，またその星形多角形の角の和はどうなるのか，といった数学的な問いをもち追求を深めていったりしたことを，右のレポートからも読み取ることができる。そして気付きの程度の差はあるものの，全ての生徒が学習のまとめとして取り組んだレポート作成を通して，星形多角形やその星形多角形の角の和のもつ様々な規則性に気付くことができた。またレポート作成をきっかけに，新たな問いをもち更なる追求に発展させることができた生徒もいた。



今回の実践から，教材として用いた星形多角形が，生徒から多様な問いを引き出すことが可能な題材であったことは明らかである。そして，授業において生徒一人一人が問題から問いをもち追求する姿，あるいは授業のふりかえりから新たな問いをもち，次の学習につなげていく姿を引き出すためには，教師のはたらきかけが極めて重要であることも痛感した。具体的には，１つの単元，あるいは１時間ごとの授業を，導入から展開，そして最終的な目標に向かって，学び合いやふりかえりを取り入れつつ，より緻密に構造化していく必要がある。こうした実践の積み重ねを通して，本学校園算数・数学科が目指している数学的な思考と関わる問いをもち，解決しようとする力を高めるための授業づくりを今後もさらに追究していきたい。

（文責　後藤　幸広）