

式を読む活動を通して、価値づけしていく学び合いの中で、豊かに考え、表現する数学学習の展開

— 中学1年「きれいに並べた碁石の数の求め方を探ろう～文字の式～」の実践から —

1 授業の構想

(1) 子どものとらえについて

生徒たちは、正の数・負の数の四則計算を学習した後に、『3×3 魔方陣』を教材として学習をした。

① 見つけた規則

4	9	2
3	5	7
8	1	6

◎縦、横、斜めのどことも3つの数の和は15になる。
◎真ん中の数5から 9→+4 1→-4
7→+2 3→-2 8→+3 2→-3
6→+1 4→-1
◎4つ角の数がすべて偶数。奇数は中の列で、十字の形に並んでいる。

※ それぞれ別の生徒が、つけ加えをしながらの発言

② 3つの魔方陣を比較して、気づいたこと

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

◎すべて、縦、横、斜めの3つの数の和は、15になる。
◎真ん中の数は、必ず5になる。1から9までの数を数直線のように並べると真ん中が5だから、魔方陣の真ん中も5になる。
◎数の場所が入れ替わっただけ。裏返したり、向きを変えたりすると数が重なる。
数の並び方は、5を中心に回転しているだけ。
◎3つの数の和を出して、3で割ると真ん中の数の5になる。1から9までの和が45になって、3で割ったら、3つの数の合計の15になる。平均になっている。

③ -5から3までの連続した整数を使って、魔方陣を完成させよう。

◎上の魔方陣と同じで、数を並べると-1が真ん中になることが決まる。
◎上の魔方陣と同じように、数を並べて、小さい数から同じ場所に当てはめていく。
例：-5は上の図の1の場所

-2	3	-4
-3	-1	1
2	-5	0

◎平均を出して、-3を見つけた。
◎それぞれの班で、数の入っている場所は違うけど、やっぱり向きが変わったり、回転しているだけになっている。

※ それぞれの班での話し合い活動 見つけ方の工夫や手順を話し合った

どんなことを話し合ったか？
どんな意見を出したか？
魔方陣について言えそうなことは？

はじめに3つの3方陣を比べて考え、気づいたことを上記のように発表した。数の並び方に注目したり、図形的にとらえたりしながら、きまりや作り方を見つけた。互いの発表につけ加えをしながら、別の言い方をする生徒の姿もあった。そして、負の数に数を拡張し、3方陣を完成させるという課題を班で考えることにした。生徒一人ひとりにワークシートを配布し、話し合う内容を明確にしておいてから活動に入った。また、班に一つずつホワイトボードを用意し、個々の考えを書き入れ、そして共通する考えを残していったり、別の考えと結びつけたりしながら、魔方陣を完成させることができた。こうして、魔方陣を完成することから特徴の説明まで、多様な考えをもとに一般化していくことができた。

学習のふりかえりでは、「友だちのいろいろな考え方がおもしろかった」「○○くんの考えがなるほどと思った」「いろいろあるけど、最終的には必然になるのではないかなあ」「4×4の魔方陣などもやってみよう」など、学び合いの有効性が感じられた。

このような授業を通して、生徒がかかわり合って学ぶ姿は、学習活動に興味をもち意欲的に参加することから始まり、生徒同士がお互いにどのように考えたらよいかなどの思考しながら行動することにある。そして、思考したものを判断していき、新しい意味づけがなされ表現していくことであると考えられる。

学習を通して学び合いを考えていく中で、ペア学習や班活動などに焦点を置くことは大切である。しかし、一見うまく協力しながら活動しているように見えるが、単なる役割分担で終わったり、学習の習熟によってかかわりに差が生じたりすることもある。また、班で話し合った後、全体に返しての練り上げの際、各班で話し合ったことの発表会で終わることもある。そこで、教師が意識的に、投げかける問いを通して生徒の考えをつないでいくことの大切さを感じ、本単元の授業構想をすることにした。

(2) 本単元の目標や内容と算数・数学科で考える思考力・判断力・表現力との関わりについて

今回の学習指導要領の改訂で、小学6年において、数量を表す言葉や□、△などの代わりに、aやxなどの文字を用いて式に表したり、文字に数をあてはめて調べたりすることを学習している。よって、小学校ですでに文字を用いた式で関係を表す学習をしていることを前提に、中学1年では文字の式を学習することになる。したがって、より一層の小学校算数科との接続も踏まえ、学び直しの機会から

も重要な単元であるといえる。また、文字を用いた式は、今後の数学を学習する上での基盤となる内容である。さらに、問題解決の際に、数量関係を類推や帰納によって発見的にとらえ、その思考の過程を文字を用いた式で説明することの必要性和意味を理解できることも重要である。

本単元の導入においては、「マッチ棒で正方形の一边を共有するように横につくっていくとき、必要なマッチ棒の本数を求める式を考える」という学習課題に取り組んだ。言葉や図、式などの多様な表現を用いて、その関係が式に表されることを説明できる場を設定し、文字を用いることのよさを感じさせたいと考えた。そして、単元の終末に学習する碁石の総数の求め方を探る課題は、小学校5年生「式と計算（啓林館）」で、正方形の一边に並べる●の数を決めて、●の総数を求める式を考えることを学習していることを踏まえ、中学校でも同じ教材を用いることで、生徒の関心を高めたいと考えた。碁石を正三角形、正方形に並べ、碁石の総数を求める式のきまりを見つけ、文字を使って表していくという課題を設定した。正○角形と形が変わっても同じような式が成り立つことに気づき、一边に並べる碁石の数をn個にしたとき、文字や文字の式を活用することのよさを実感できると考えた。また、求め方の見方を変えると、式が一通りではなく、多様な考えを引き出すことができると考えた。その個々の考えから友だちとの共通点や相違点を見出していくことで、それらを関連づけることもできる。そして、碁石を家の形に並べることで、発展的に考え、一般化が可能であることもこの教材のよさである。

(3) 11年間で育てる思考力・判断力・表現力の育成に関する学び合う場面の構想について

数学での学び合いは、生徒一人ひとりが自分の考えをもち、それを友だちに伝え、自分の考えと友だちの考えを比較検討し、違いが分かり、価値づけをすることである。そして、さらに自分の考えにつけ加えていき、互いに考えを深め、全体で考えを共有する場であると考えた。そういう場を設定することで、多様な考えをもとに、豊かに考え学び合う中で思考力・表現力・判断力の育成につながると考えた。

単元の導入では、マッチ棒を正方形に並べていき、正方形を1個、2個、・・・10個としたときのマッチ棒の総数の求め方を、数えることから式で考えられるようにしていく。そして、正方形がn個になったときの総数を求める式を文字を使って表すことができるようにしていく。

第2次から第4次では、文字式の表し方や計算を通して、文字式についてより深めていく。

第5次では、きれいに並べた碁石の総数を求めるために、図と式を関連させながら、文字を使って一般化し、その文字式が表しているものを読むということをねらいとしている。

まず、正三角形の一边に○個の碁石を並べたときの総数の求め方を、言葉や図、式を関連させながら表現して考えていくことから、n個並べたときの総数を文字を使って表していけるようにする。そして、そのことを踏まえながら、正方形の場合も考えていく。そのときに、一边の碁石の数をn個にしても、正○角形と形が変わっても同じ考え方ができるという、文字を使うことのよさへとつなげていく。

第10時では、一边にn個の碁石を並べて、『家の形に並べた碁石の総数の求め方を考えよう』という形の条件をかえた課題を提示することで、前時の学習を生かしながら考えていけるようにした。図と式を関連させながら考えていくことを大切に、考える過程で、一つの求め方にとらわれず、他の求め方はないかと促していくことで、意欲的に多様な考えを引き出したいと考えた。そして、考えた式を発表し、自分の考えと同じ式に名前札を貼る。そのとき、学級全体ではどの式のところに多く貼られるだろうと予想することで、友だちの考えと比較できるようにする。それぞれの式には意味があり、考えやすさなどからいろいろな式が出てくると思われるので、どの式が一番考えやすいのか、なぜ多くの人がこの式を考えたのかなどを問うことで、価値づけをしていく。そして、碁石の囲み方や式の説明を別の生徒に問うことで、学級全体において、友だちの考えた式と式の意味するものを共有していく。

一人の考え方の一部だけを提示することにとどめ、それから発生する生徒全体の気づきや疑問点を自由に発表できるようにし、また、他の生徒の考えと関連づけたり、言い換えたりしている発表なども大切にしながら進めていきたい。そこで、説明を聞いて、自分の考えた式よりも、友だちが考えた式の方がよかったと思う場合は、理由を聞いて名前札を移動できるようにしていく。

終末には、式の意味を説明することで友だちがどのように考えたかが分かることや計算してまとめた式は、総数の求め方と同時に計算結果の両方の意味があることなどをふりかえることとする。

2 展開計画

次	主な学習	時	具体的な学習・内容 (◇印は、学級全体の学び合いの場面)
1	数量を文字で表すこと 「マッチ棒は何本必要な？」	1 2	◇マッチ棒で一辺を共有するように正方形を横につくっていくとき、必要なマッチ棒の本数を求める式を考え説明する。 ・本数や個数、代金などの数量を文字を使って表す。
2	文字式の表し方	3 4	・文字式を書くときの約束を理解し、数量を文字を使って表す。 ・文字式がどのような数量を表しているかを考える。
3	式の値	5	・文字式の文字に数を代入して、式の値を求める。
4	文字式の計算 文字式の加法・減法 文字式と数の乗法・除法	6 7 8	・一次式の加法や減法の意味を理解し、計算をする。 ・一次式と数の乗法、除法の意味を理解し、乗法・除法の計算やかつこのついた式の計算をする。
5	きれいに並べた 基石の数の求め方を探ろう	9 10	◇正多角形に並べた基石の総数を求める式から、家の形に並べたときの総数を文字を使って表す。 ◇文字を使って表した式の意味を説明する。

3 授業の実際

自分たちの考えたことや判断したことを伝え合い、互いに広め、深めていけるような学級全体での「学び合い」の場を設定したいと考え授業を行った。ここでは、第5次の第9、10時を中心とした実践を載せる。


(1) 正三角形、正方形の一辺に、基石を n 個並べたときの総数を求める式を考えよう。(第9時)

①具体的な数、一辺に並べる基石の数を10個として考える。

生徒は数えるのではなく簡単に求めることができないかを考え、式を作って考える姿があった。

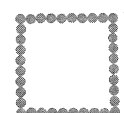
各自で、図の基石を囲みながら、いろいろな考え方で式をつくり、基石の総数を求めた。10個という具体的な数で考えることで、帰納的な考え方につながっていくことができた。

正三角形の場合【生徒の考えた式】



$(10-1) \times 3 = 27$ $10 \times 3 - 3 = 27$
 $(10-2) \times 3 + 3 = 27$ $10 + 9 + 8 = 27$
 など 基石の総数 27個

正方形の場合【生徒の考えた式】



$(10-1) \times 4 = 36$ $10 \times 4 - 4 = 36$
 $(10-2) \times 4 + 4 = 36$ $10 + 9 + 9 + 8 = 36$
 など 基石の総数36個

②一辺に並べる基石の数を100個としたら、1000個としたら・・・と考える。

一辺に10個並べたときの考え方を活用して、同様な考え方でできるという反応であった。類推的な考えを用いることにつながっていった。

③一辺に並べる基石の数を n 個として考える。

具体的な数を用いて考えたことから、同様な考え方で、一辺が n 個のときも式を考えることができ、一般化の考え方につながっていった。

すでに文字の式について、表し方や四則計算を学習しているので、考えたすべての式をそれぞれまとめると、正三角形が $3n-3$ 、正方形が $4n-4$ となることが確認できた。

これらのことを考察すると、一辺に並べる基石を具体的な数から考えることで、生徒から「共通性」「整合性」「一般性」「根拠」などの数学的な思考に関わる「問い」が生まれた。数学的な考え方においては、きまりを見つけるといった帰納的な考え方から、他の数のときも同じように考えられるのではないかという類推の考え方につながっていき、つながり、「いつでも言える」という文字式のよさを感じ取ることができた。

生徒たちは多様な考え方で、一辺に n 個並んだときの基石の総数を求めることができたが、どの考え方

も計算してまとめると答えが1つ「 $3n-3$ (正三角形)」「 $4n-4$ (正方形)」になることが確認できた。このことから、正五角形になったら、正六角形になったら、・・・、と条件を変えてきまりを見つけようとする「発展性」のある「問い」をもった生徒もいた。

(2) 家の形に並べた基石の総数の求め方を考えよう。(第10時)



前時で文字を使って基石の総数を表していることから、次に、家の形に形を変えた図形の一辺に、 n 個の基石を並べたときの総数を求める式を、図を使って説明するという授業を行った。

ここでは、基石の総数を求める式を読む活動を通して、友だちの考えた式に関心をもったり、比較して価値づけたりするという学び合いをすることで、思考力、判断力、表現力を育て高め合うことができるのではないかと考えた。

①自分の考えたことの妥当性を検討する場

多様な考えを引き出すために、十分に考える時間を確保し、一つの考え方にとらわれず、いくつか考えてみるように促すことで、違った視点から考える姿があった。

【生徒の考えた式】

$6(n-2)+5$ $5(n-5)+(n-2)$
 $4n-4+(n-1)+(n-2)$
 $3n-3+(4n-4)-n$
 $5(n-1)+(n-2)$ など
 $6(n-1)$ 【誤り】 $6n-5$ 【誤り】
 計算してまとめると $6n-7$

家の形全体に視点をおいて、辺に注目して考える生徒や頂点に注目して考える生徒、三角形と四角形に分けて、前時でまとめた式を活用する生徒などがいた。

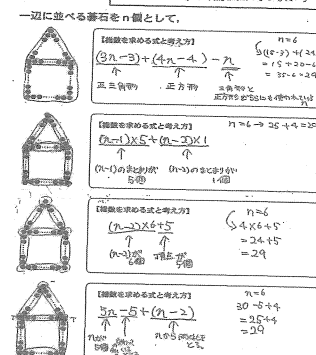
個別に考えていく中で、図から考えていくと一見式が正しそうだが、実際は基石が二重に重なっていることに気がつかないと式を誤ってしまうことが発見できた。図と式とを関連させながら考えることの必要性を感じ取れた。

また、近くの生徒と積極的にかわり合い、お互いが考えた式を比べたり、考え方のヒントをもらったりしながら、さらに考えを深めた生徒もいた。

【生徒Aのワークシート】

7/1 発展学習 家の形に並べた基石の数の求め方を考えよう

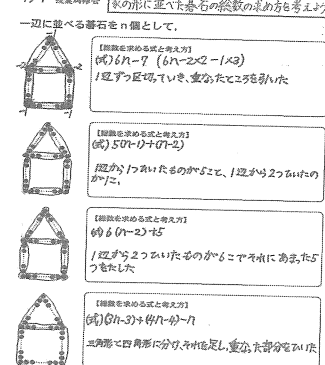
一辺に並べる基石を n 個として、



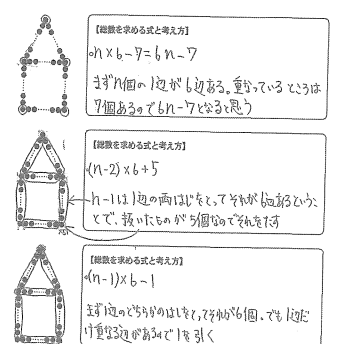
【生徒Bのワークシート】

7/1 発展学習 家の形に並べた基石の数の求め方を考えよう

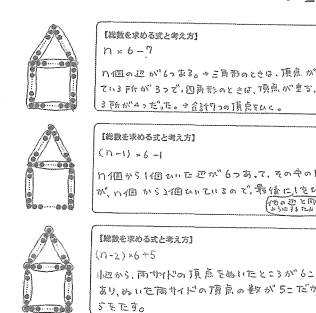
一辺に並べる基石を n 個として、



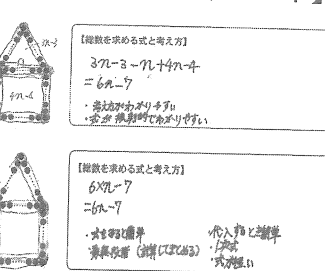
【生徒Cのワークシート】



【生徒Dのワークシート】



【生徒Eのワークシート】




次に式のみを発表していき、考え方にはふれないようにした。そして、自分の考えと同じ式の所に名前札を貼り、友だちの考えと比較できるようにした。また、名前札を貼る前に、どの式が多く名前札が貼られるだろうかと予想させることで、さらに自分の考えと比較できるようにした。

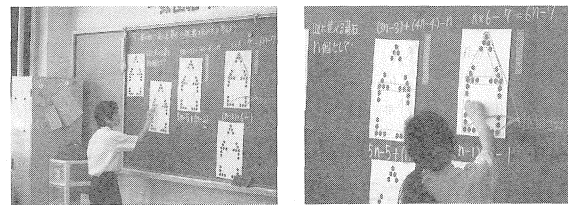
いくつかの式が発表され、名前札が貼られた式は、多数派「 $(3n-3)+(4n-4)-n$ 」(16名)、 $n \times 6 - 7 = 6n - 7$ 」(11名)と少数派「 $(n-2) \times 6 + 5$ 」(5人)、その他(1人)という結果となった。

②友だちの考えたことの意味を理解する場

発表されたそれぞれの式、つまり自分が考えていない式がどういうことを意味しているのかを各自が説明していく場を設けた。

【友だちが考えた式を図を使って説明する場】

お互いの考え方を共有していくために、式を発表した生徒と碁石を囲み式の説明をする生徒をそれぞれ分けることにした。また、式が何を表しているかを明確にしなが、式が読めるようにしていった。

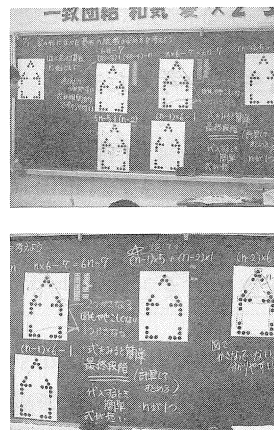


③多様な考え方を比較し価値づけする場

T: 「どの式が一番美しい?」

- 多数派の「 $(3n-3)+(4n-4)-n$ 」について
 - S1: 考え方として分かりやすい。
 - S2: 式が規則的で分かりやすい。
- 多数派の「 $6n-7$ 」について
 - S3: 図を見ると重なりがあって分かりにくいけど、式を見ると簡単。
 - S4: 最終段階
- 少数派の「 $(n-2) \times 6 + 5$ 」について
 - S5: 図が重なっていないから分かりやすい。
- 全体の式を見て
 - S6: どの式も計算してまとめると、「 $6n-7$ 」になるから、○○くんが言った、最終段階になる。

【式を価値づけした板書】



それぞれの式のよさを理由を含めて発表し合い、友だちの説明を聞いて、友だちが考えた式の方がよいと思ったら、理由を聞いて名前札を移動できるようにした。そうすると、「 $6n-7$ 」のところの名前札を移動する生徒が10名いた。その理由としては、「図は分かりにくいけど、式がまとまっていて、代入するときの計算が簡単。」「 n が一つしかない。」「式が短い。」というような価値づけがなされた。

以上の実践から、授業後の生徒のふりかえりに次のようなことが書かれていた。そこで、算数・数学科が考える思考力・判断力・表現力を育て高めていくための具体的な方策の3つの視点に絞って載せることとする。

○生徒の「問い」についてのふりかえり

- ・「 $(3n-3)+(4n-4)-n$ 」の方が、考え方的には分かりやすいけど、「 $6n-7$ 」の方が式的には簡単で不思議だなあと思いました。
- ・少数派の式を見たときに、「どうなっているの?」と思ったけど、考えてみると「なるほど」と思いました。
- ・考え方がたくさん出てきて、みんなの考え方も分かったし、自分の考え方もしっかり伝えることができてよかったです。他の形になると「どんな規則になっていたのか」と思いました。

○「表現する」活動のふりかえり

- ・どの形でも最終段階があることが分かり、式が同じでも、図での表し方が違うことが分かりました。
- ・式だけ見るとよく分からなくなるけど、図で表したら分かりやすくなります。
- ・式だけを書いてみると、碁石が2つ重なっているのに1つしか引いてなかったけど、図に描いてみると簡単にまとまって意味が分かりやすかったです。分からないときは、図を描いて考えたいです。
- ・文字式は図の式にも当てはめることができると知ってとても驚きました。文字式は何にでも使えるからとても便利だと思いました。

○「学び合い」のふりかえり

- ・みんなで考えると、たくさんの考え方が出てすごかったです。僕は「 $6n-7$ 」がきれいな式だと思いました。シンプルイズベストです。
- ・いろいろな式があり「こんなに?」と驚きました。同じ答えになる式でも「 $5n-5$ 」と「 $(n-1) \times 5$ 」では意味が違うことを知りました。きれいな式は美しいと思います。
- ・私は「 $(3n-3)+(4n-4)-n$ 」が一番分かりやすかったです。「 $6n-7$ 」は式が簡単でも図が難しいので大変です。私は、式より考え方重視です。
- ・私が最初に考えた式は、「 $(3n-3)+(4n-4)-n$ 」だったけど、友だちの考え方を聞いて、「 $6n-7$ 」をしてみたら、図を考えるのはややこしいけど、式がとても簡単で私がこれが一番いいと思いました。
- ・「 $n \times 6 - 7$ 」も短くて分かりやすいのですが、個人的には「 $(n-1) \times 3 + (n-1) \times 4 - n$ 」の○○さんが言った式が、学習したことを分かりやすく使っていて、この式がよいと思いました。
- ・僕は最初は、「 $(n-2) \times 6 + 5$ 」だったけれど、「 $6n-7$ 」の方が求めやすいし、代入したときの計算が簡単になるということに気づきました。

○感想

- ・人の式を読むことは大切だと思いました。なぜかという、それぞれの考え方には個性があって、人の式を考えることで、自分の考えも深まるし、内容もきちんと理解できるからです。
- ・人の考えを確かめることが、いろいろな考え方が分かることになるので大切だと思いました。
- ・自分の考えは少ししかなかったけど、みんなで意見を出し合うと、たくさんの考え方があるんだなあと思いました。視野が広くもてたのでよかったです。いろんな意見があってもおもしろかったです。
- ・私が考えた式以外にもいろいろな考え方があってびっくりしました。一人だけでなく、みんなで意見を出し合うことでいろいろな考え方が生まれるんだと思いました。話し合いは大切だと思います。
- ・自分やみんなの発表してくれた考えで、自分が1番分かりやすい!!と思う考え方を見つけました。この前の授業の三角形、四角形の考え方もそういえば同じようなやり方が1番よかったですと思います。
- ・説明してくれたらよりよく分かって、とても楽しく学習することができました。また、人に聞いて自分の式が間違えていたことに気づくことができてよかったですし、考えるのが楽しかったです。

4 成果と課題

単元を通して、式を読む活動を繰り返し行った。その学習の中で、自分の考えた式ではなく、他の生徒が考えた式を読むことで、数学的な思考と関わる「問い」が生徒から生まれ、それを教師がつけていくことで、根拠を示しながら説明しようとする学び合いのきっかけづくりができたことが、生徒のふりかえりからも伺える。また、自分の考えにはなかった式なので、興味関心をもって取り組むことができ、他の生徒の式を読むという活動が有効であったと思われる。

説明するときには、その人がどのように考えたのかという発想の説明、なぜそうなるのかという根拠の説明が必要となる。そして、全体に広げていくためには、他の人に対して正確に読みやすいように、具体化・記号化・数量化・図形化していくことが大切であり、生徒は図と式とを関連させたり、色分けしたり、言葉をつけ加えながら説明することができるようになった。

それぞれの式を価値づける手立てとして、名前札を貼るということを行ったが、自己肯定感を味わえるだけでなく、数学的感性をみがくことにつながる。また、どの式が多く貼られるかあらかじめ予想したことで、式に対する思いをより引き出すことに有効であった。最終的に、ふりかえりにもあるように、それぞれの式のよさを認め、自分の考えと比較しながら思考が深まったと思われる。

今後の学習においても自分の考えにないもののよさを認めることで、「学び合い」の場が「自分の考えを検討する場」から「発展性やよさを認める場」になり、生徒の実態に合わせて、より高い価値の学び合いの場を設定していくことをめざしたい。

(文責 光森 千修)