

豊かに考え、表現する算数・数学学習

— 学び合いの中で、数学的な思考力・判断力・表現力を育む授業づくり —

1 算数・数学科で願う豊かな学びの姿

本校校園算数・数学科では、平成18年度より幼小中一貫教育を進める中で、11年間の子どもの学びを考えたときに、「算数・数学の学習を通して、一貫教育の中で発達段階に応じてどのような力を付けていくことが大切であるのか」、また「算数・数学の授業の中における子どもたちの豊かな学びの姿とは一体どのような姿なのか」等を中心的な課題として、授業実践を通して研究を重ねてきている。

「数学的な説明が(カ)ンタンにでき、納得のいく説明ができる!」
 これを使って、ウラフサができる(?)
 連続する10個の整数の和が5の倍数になることを説明しなさい。
 文字式を使わないと...
 1~10までを足すと55、11~20までを足すと155...のようになるから。
 ナイナイ子納得できない
 文字式を使うと...
 一番小さい数をnとすると連続する10個の整数は $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9$ と表される。このとき10個の整数の和は
 $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7)+(n+8)+(n+9)$
 $=n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5+n+6+n+7+n+8+n+9$
 $=10n+45$
 $=5(2n+9)$
 $2n+9$ は整数なので $5(2n+9)$ は $5 \times (\text{整数})$ となり、5の倍数である。
 よって連続する10個の整数の和は5の倍数である。
 納得のいく説明
 また、*の $10n+45$ を使えば、連続する10個の整数は $10 \times (\text{一番小さい数}) + 45$ で求めることができる。ということが出来る。
 ウラフサ(?)

実際の授業を行う中で、見ることでできた子どもの姿から、これからめざす姿について考えてみたい。上記は、中学校第2学年「文字式の利用」の学習のまとめとして、生徒が「文字式のよさ」をテーマに取り組んだレポートの一部である。新学習指導要領では小学校第6学年から「文字式」の学習をすることになり、文字式を用いることのよさや必要性については、さらに時間をかけ徐々に理解を深めていくことが大切であるといえる。また中学校以降の数学学習において、文字式を積極的に活用しながら表現していくことは非常に重要になっていく。実際の授業では、「連続する3つの整数の和は、○○○になる」「連続する3つの偶数の和は、○○○になる」という課題から、成り立ちそうなことを帰納的あるいは類推的な見方や考え方によって発見的にとらえ、予想した命題が成り立つかどうかを説明するための手段として文字式を活用し、演繹的な考え方をを用いて根拠を明らかにしながらその命題の結論を説明する学習に取り組んだ。さらに学習を進める中でこの生徒は、「連続する10個の整数の和は?」というように問題の条件を変えて発展的に考え、その新たに見つけ出した事柄(5の倍数になること)が成り立つかどうかを説明しようとしている。このように1つの学習課題から、視点を広げ問題の条件を変えて考えるという気づきが、上記のようなレポートにつながっていった。またこの生徒は、文字式を使うことのよさについて「納得のいく説明ができる」という表現でまとめ、さらに $10n+45$ という式から、連続する10個の数の和をより簡単に求める方法にも気づくことができた。このように、豊かに考え、表現することによって、文字式を用いて一般的に説明することの必要性やその意味についての理解を一層深め、文字式のよさを実感することができたといえる。

算数・数学科では、11年間の学びを通して、学び合う関係の中で、友だちの様々な考えを受け止め、算数・数学のよさを理解し、活用して、さらに発展させていこうとすることを土台として、
 ○これまでに習得した知識や技能、また類推、帰納、演繹などの数学的な考え方を活用しながら、自分(たち)の力で問題解決を進めていこうとする姿
 ○言葉や数、式、図、表、グラフ、記号、用語などの数学的な表現を用いて、自分の考えを整理しながら、他者にわかりやすく説明しようとする姿
 を豊かな学びの姿ととらえている。そして研究テーマである「豊かに考え、表現する算数・数学学習」

を追究していくことが、単に「計算ができる」「図形の証明問題ができる」というレベルで満足するのではなく、子どもたちにとって本当に算数・数学がわかることにつながると考えている。

2 昨年度までの研究の経緯

(1) 子どもをとらえるという視点での取り組みからわかったこと

幼小中一貫教育を追究していく中で、算数・数学科では20年度より研究テーマを「豊かに考え、表現する算数・数学学習」と設定している。上述した豊かな学びの姿を算数・数学科の授業において実現するためには、子どもたちが数学的な考え方を駆使して問題解決の過程をつくりあげる構えと、その授業が一体となるように構成していくことが大切であると考えた。そこで、この問題解決における探求の過程において、主体的に、これまでに習得した知識や技能、数学的な考え方を活用し、自分の考えを表現することが、学級集団全体の理解を深めることにつながるととらえ、先の研究テーマを掲げた。

このとき、「豊かに考え、表現する子どもの姿」を、発達段階を考慮して次のように具体化した。

	追求して学ぶ姿(算数・数学学習における「豊かに考え、表現する子どもの姿」)
初等部 前期	言葉や数、式、図、表、グラフを用いて考え、説明したり、他者の説明を聞いて自分の考えと比べたりすることで、筋道を立てた考え方のよさを理解することができる。
初等部 後期	言葉や数、式、図、表、グラフを用いて考えたり、自分の考えを表現し伝え合ったりすることで、互いの考えをわかり合い、探求の内容について理解を広げることができる。
中等部	言葉や数、式、図、表、グラフなどを関連させながら、それらを適切に用いて問題を解決したり、相手にわかりやすく自分の考えを表現し伝え合ったりすることで、多様な考え方を見出し、探求の過程について理解を深めることができる。

(2) 算数・数学科における思考力・判断力・表現力

昨年度(21年度)は、一貫教育における研究テーマとの関連から、教科における思考力・判断力・表現力を明確にするとともに、これらの力をどのように伸ばしていくかについて明らかにすることをめざした。そこで学習指導要領の改訂の流れ等の背景をふまえ、算数・数学科では学習の中で身につけさせたい思考力・判断力・表現力を、「数学的な思考力・判断力・表現力」として、次のようにとらえた。

- 「数学的な思考力」… これまでに習得した数量や図形に関する知識や技能、また類推、帰納、演繹、図形化、発展的な考え方などの数学的な考え方を活用しながら問題解決をめざす力。
- 「数学的な判断力」… 問題解決に向けて、見通しや筋道を立てたり、様々な解決方法を比較しよりよいものを選択したり、数学的な根拠をもとに正しいものを見つけ出そうとする力。
- 「数学的な表現力」… 言葉や数、式、図、表、グラフ、記号あるいは数学用語や数学特有の言い方など、多様な表現方法を適切に用いて、自分の考えを表現しようとする力。

算数・数学の学習において、子どもたちは思考、判断したことを、自分の言葉や数、式、記号などを用いて表現していく。また線分図や表、グラフなどを用いることによって思考が深まり、さらに表現された事柄を読みとることから判断したことをふりかえって確かめることも可能になる。よって「数学的な思考力・判断力・表現力」は、互恵的な関係であり、相互作用し合うことでそれぞれの力を伸ばしていくことができると考えている。

(3) 思考力・判断力・表現力の育成に有効であったかかわり合い

昨年度の取り組みより、これらの力を伸ばしていくためには、教師やまわりの友だちとのかかわり合いが重要であることも見えてきた。自分の考えをわかりやすく説明しようとする中で、自らの思考を改めて整理することができ、そして他者から意見をもらうことで、その考えをさらに深め発展させることが可能になった。一方、他者の考えを聞くことで、新たな見方・考え方に気づいたり、よりよい解決方法に気づいたりすることもできた。今後の課題として、こうした隣同士や班によるかかわり合いを基盤に、学級全体への学び合いへと広げていくことが必要であると考えている。

3 本年度の研究

前述した算数・数学科における研究テーマ「豊かに考え、表現する算数・数学学習」に迫っていくために、また特に昨年度の取り組みをふまえ、今年度はそれぞれの発達段階における数学的な思考力・判断力・表現力を明らかにし、そのつながりを示すとともに、数学的な思考力・判断力・表現力を育て高めるための授業づくりについての構想を明らかにし、授業実践を通して検証していく。

(1) 思考力・判断力・表現力についての11年間のつながり

一貫教育という視点から、算数・数学科ではそれぞれの発達段階での算数・数学学習における「数学的な思考力・判断力・表現力」を次のようにとらえている。

初等部 前期	生活上における問題を、具体物を用いた活動などを通して思考し、考えたことを自分なりの言葉で表現していく過程において、半具体物、絵、図、数、式などを用いながら説明することができる。
初等部 後期	具体的な問題において、めあてをもち、きまりや関係を見つけ出すような類推的な考え方や帰納的な考え方などの思考の過程や判断の根拠を、言葉や数、式、図、表、グラフなど多様な表現方法を用いて、工夫して説明することができる。
中等部	数学的な問題において、課題を明確にし、類推的な考え方や帰納的な考え方から演繹的な考え方による論理的な思考を展開することで一般化を図るために、その思考の過程や判断の根拠を、言葉や数、式、図、表、グラフあるいは数学用語や数学特有の言い方など多様な表現方法を適切に用いて、それらに関連させながら説明することができる。

学習場面から子どもの学ぶ姿を見ていくと、初等部前期では活動を通じた思考が主で、問題の解決ができること自体に喜びを感じている。しかし初等部後期では思考の幅も広がり、例えば類推や帰納的な思考によってきまりや関係を見つけ出すことに面白さを感じるようになっていく。さらに中等部になると具体的な場面から離れ数学的な問題に対し、類推的、帰納的に物事を考え、演繹的な考え方をを用いて説明しようとするといった思考活動が中心となっていく。またその際に、自分の思考し判断したことを表現する手段として、初等部前期では絵やテープ図が中心であったものが、発達段階に応じて、徐々に表やグラフ、記号や用語等の多様な表現方法を適切に用いていけるようになっていく。このように初等部前期から中等部までの発達段階における思考の質の違いや、思考、判断したことを表現する際の表現方法の違いをふまえ、これらの違いやつながりを意識すると共に、そして一貫教育における積み上げを大切に学習活動を展開していくことが重要である。

(2) 思考力・判断力・表現力を育て高めるための授業づくり

今年度は、数学的な思考力・判断力・表現力を育て高めるための具体的な方策として、学級全体での学び合いを活性化させるために、授業を通して次に述べる①～③について重点的に取り組んでいく。

①学習の中から生まれた数学的な思考と関わる「問い」を大切につないでいく。

「なぜそうなるのか」	【根拠】
「似ているところはあるか」「違うところはあるか」	【共通性、相違性】
「他の場合も同じように考えられるのか」「いつでもできるのか」	【整合性、一般性】
「もっと簡単にできないのか」	【整合性、一般性】
「他の考え方はないのか」「もっとよい解決方法はないのか」	【発展性、よさ】
「この考え方のよい点はどんなところだろうか」	【発展性、よさ】

子どもの思考を深め、より質の高い学び合いを実現するためには、学習課題を解決していく上での、教師からの意図的な問いの投げかけや、子どもから生まれた問いをつないでいくことが重要である。算数・数学の授業での「問い」について、中村享史氏（2008）の考えをもとに4つの視点から考えていく

と上記のような問いが考えられる。実際の授業の中で生まれる問いでもっとも多いのが、自分が予想したことや他人が考えたことについて「なぜそうなるのか」ということであり、これはこれまでに習得した知識や技能、数学的な考え方をを用いた説明を促すものである。この根拠を問い、説明する活動は、数学の授業における柱である。そしてここで学習を終えるのではなく、そこからさらに学び合いを活性化させるための問いとして、「他の場合も同じように考えられるか」「もっとよい方法はないのか」など、子どもの思考を広げるような問いや、「似ているところはあるか」「いつでもできるのか」などの授業のねらいに迫っていくような問いを意図的に投げかけていく。また、こうした問いを教師が連続させていくことで、やがて子ども自身からの問いへと変容していくことをめざしていきたい。

②数学的な表現を用いて、自分やまわりの友だちと共に考えたことや判断したことを「表現する」活動を充実させていく。

「10のまとまりからひくと・・・」	〈自分の言葉で〉
「線分図に表して考えると・・・」「x、yの関係を表に表してみると・・・」	〈自分の言葉で〉
「2つのグラフを使って比較して考えると・・・」	〈図、表、グラフを用いて〉
「合同条件が成り立つので・・・」「この式からいえることは・・・」	〈数学用語などを用いて〉

「問い」に対する自分の考えを検討し、解決していくためには、式や図、表、グラフなどの数学的な表現を用いて思考を深めていくことが重要である。上記のように、まずは自分の言葉で考えたことを説明すること、また与えられた条件から図をかくこと、表をつくって関係を見つけることなど、自分の思考の過程が適切に表現できるようにするために、授業における教師の働きかけを充実させていく。

上記の①、②を基盤として、

③自分（たち）の考えたことや判断したことを伝え合い、互いに広め、深めていけるような学級全体での「学び合い」の場を設定していく。

「自分の考えや答えは正しいだろうか」	〔自分の考えたことの妥当性を検討する場〕
「あの式はどうやって考えたのだろうか」「一体何が言いたいのだろうか」	〔自分の考えたことの妥当性を検討する場〕
「あの答えは間違っているけど、どうしてそうなったのだろうか」	〔自分の考えたことの妥当性を検討する場〕
	〔友だちの考えたことの意味を理解する場〕
「Aの考え方よりもBの考え方の方が・・・」「どの考え方が一番わかりやすいのだろうか」	〔友だちの考えたことの意味を理解する場〕
	〔多様な考え方を比較し価値づけする場〕
「この課題の学習を通して、こんなことがいえそうだ」	〔学習成果としての発展性やよさを認める場〕

学級全体での学び合いとは、上記のような学習から生じた多様な価値を追求していく場であり、そして最終的に授業のねらいにみんなまで迫っていく場であると考えられる。そのためには、1時間の授業の中で「みんな、何を、どんな視点で学び合うのか」を明確にした上で授業を構成していくことが重要である。子ども同士の発言をつなげ、一人一人がしっかり考えることのできる授業展開を明らかにしていく。

4 成果と課題

発達段階に応じて、子どもたちの数学的な思考や表現する力が徐々に変容し、多様化していくこと、また初等部前期を土台として中等部までに積み上げていきたい力として、より具体的にイメージすることができた。こうした力をさらに伸ばすためには、学習場面における学び合いが重要であり、授業の中でいかに生み出し深めていけるかが課題である。

（文責 後藤 幸広）

- 【参考文献】 ・数学的な思考力・表現力を伸ばす算数授業（中村享史，明治図書，2008年）
・中学校数学科「数学的な表現力」を育成する授業モデル（松本新一郎，明治図書，2009年）