

Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers

定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計 (第2報 , 異なる質量と剛性を持ち , 二次質量が励振を受ける系の場合)

--Manuscript Draft--

受付番号:	Trans-JSME-D-14-00622R2
標題:	定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計 (第2報 , 異なる質量と剛性を持ち , 二次質量が励振を受ける系の場合)
論文種別:	原著論文
責任著者:	田村 晋司 島根大学 松江市, 島根県 JAPAN
責任著者 (英語):	TAMURA Shinji
責任著者の組織名:	島根大学
責任著者の組織名 (英語):	
筆頭著者:	富室 崇志
筆頭著者 (英語):	
全著者:	富室 崇志 田村 晋司
抄録:	多自由度系を制振する場合 , 複数の動吸振器を取り付けられない場合が想定される . そのような場合を想定して接地面から離れた質量に外力が働く質量と剛性の異なる二自由度系に動吸振器を一つ取り付けたモデルについて , 主系の質量比と剛性比が定点理論による最適設計式に与える影響の考察を行った . その結果, 接地面に近い質量の変位を制振する場合は最適同調値を求められない質量比と剛性比の範囲があるが , 接地面から離れた質量の変位を制振する場合は全ての質量比と剛性比で最適同調値を求められることが分かった .
追加投稿情報:	
質問	回答
質問 1 : 日本機械学会の会員でしょうか ?	はい
会員番号を入力してください。 質問 1 : 日本機械学会の会員でしょうか ? に関連する質問	9736048

定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計
(第2報, 異なる質量と剛性を持ち, 二次質量が励振を受ける系の場合)富室 崇志^{*1}, 田村 晋司^{*2}Design of dynamic absorber for two DOF system by fixed points theory
(2nd report: case of the system with different mass and stiffness, and excited secondary mass)Takashi TOMIMURO ^{*1} and Shinji TAMURA ^{*2}^{*1*} Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University

1060 Nishikawatsu-cho, Matsue-shi, Shimane 690-8504, Japan

Received 16 August 2013

Abstract

The fixed points theory is applied for the dynamic absorber attached to two degree of freedom system with different mass and stiffness. In this study, the case that the dynamic absorber is connected to the excited mass which is far from the base is considered. The frequencies of fixed points and the ratio of natural frequencies to equalize the amplitudes at fixed points are analytically derived, in case that the responses at fixed points are in phase. The damping coefficients which make fixed points extremal value are also obtained. It is found that some ratios of mass and stiffness have no fixed points with same amplitude in the frequency response curve of unexcited mass. But the fixed points always exist in the frequency response curve of excited mass. Furthermore, mass and stiffness ratios which equalize the amplitudes of all fixed points are obtained. For the frequency response curve of unexcited mass, the stiffness ratio that equalizes the amplitudes of all fixed points is uniquely determined for arbitrary chosen mass ratio. But for the frequency response curve of excited mass, the mass ratio changes the number of the stiffness ratio that equalizes the amplitudes of all fixed points into two or zero.

Key words : Forced vibration, Dynamic absorber, Frequency response function, Coupled vibration, Fixed points theory

1. 緒 言

制振デバイスとしての動吸振器は, 外部エネルギーを必要としないという大きな特徴を持つ. 減衰の無い一自由度振動系についての動吸振器の設計方法としては, Den Hartog によって確立された定点理論がある(Den Hartog, 1956). また, 減衰のある一自由度振動系に対しては, 浅見らによって設計方法が示されている(Asami, et al., 2002, Asami and Nishihara, 2003).

一方, 多自由度系に対しては, モード毎に定点理論を応用してそれぞれのモードに最適化された動吸振器を, 制振したいモードの数だけ取り付ける方法が提案されている(背戸, 2010). 連続体に対しても, モード解析と定点理論を組み合わせた研究(Dayou, 2006, Cheung and Wong, 2009)や対象の振動数範囲を設定した場合の設計方法の検討(Yang, et al., 2011)が行なわれている. しかし, スペースやコストの問題のために多自由度系の制振に複数の動吸振器を取り付けることが困難な場合も想定される. このように設置する動吸振器の数に制限がある場合を想定して, 著者らは一つの動吸振器を同一の質量と剛性を持つ無減衰二自由度系の二自由度系に取り付けた場合を考え, 外力が加わる質量に動吸振器を一つ取り付けた場合における二つのモードの同時制振に対する定点理論の定式化を行なった(田村, 塩谷, 2012). また, 質量と剛性が異なる場合に対する拡張も行なった(田村他, 2013). しかし外力が働く質量が接地面から離れている場合については研究がされていない.

そこで本研究では質量と剛性が異なり接地面から離れた質量に外力が働く二自由度系に動吸振器を一つ取り付

No.14-00622 [DOI: 10.1299/transjsme.14-00622]

^{*1} 学生員, 島根大学 大学院総合理工学研究科 (〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060)

^{*2} 正員, 島根大学 大学院総合理工学研究科

E-mail of corresponding author: stamura@ecs.shimane-u.ac.jp

けた場合について定点理論を用いて動吸振器の最適設計の検討を行う。

2. 解析モデルと周波数応答関数

2.1 解析モデル

本研究では図1に示されているような接地面から離れた質量に外力 $F\cos\omega t$ が働く質量と剛性の異なる二自由度系に動吸振器を一つ取り付け付けたモデルについて考える。主系の質量を m_1, m_2 ，ばね係数を k_1, k_2 ，変位を x_1, x_2 とする。

動吸振器の質量を m_a ，バネ係数を k_a ，減衰係数を c_a とする。

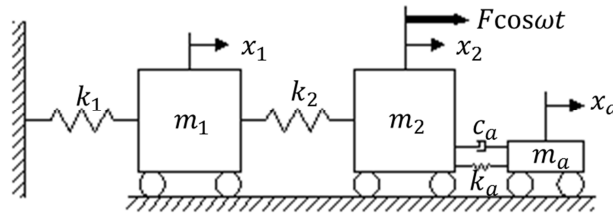


Fig.1 2-DOF system with dynamic absorber

図1の解析モデルの運動方程式から周波数応答関数を導出し解析を行う。その際に主系の質量比と剛性比のパラメータとして以下の値を用いる。

$$\alpha = \frac{m_1}{m_2}, \quad \beta = \frac{k_1}{k_2} \quad (1)$$

質量 m_1 の固有角振動数 ω_n 及び動吸振器の固有角振動数 ω_a 減衰比 ζ_a として以下の値を用いる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}, \quad \zeta_a = \frac{c_a}{2\sqrt{m_a k_a}} \quad (2)$$

また以下のような主系と動吸振器の質量比 μ ，最適同調値 γ ，励振力の無次元振動数 Ω を導入する。

$$\mu = \frac{m_a}{m_1}, \quad \gamma = \frac{\omega_a}{\omega_n}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (3)$$

2.2 運動方程式と周波数応答関数

図1に示すモデルの運動方程式は以下となる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_a \dot{x}_2 + (k_2 + k_a)x_2 - k_2 x_1 - c_a \dot{x}_a - k_a x_a &= F \cos \omega t \\ m_a \ddot{x}_a + c_a \dot{x}_a + k_a x_a - c_a \dot{x}_2 - k_a x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

虚数単位を j として仮想的な外力項 $jF\sin\omega t$ を付加し，式(4)に式(5)を導入すると運動方程式は以下のように変形される。

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = X_2 e^{j\omega t} \\ x_a = X_a e^{j\omega t} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ -k_2 X_1 + (-\omega^2 m_2 + k_2 + k_a + j\omega c_a)X_2 - (k_a + j\omega c_a)X_a = F \\ -(k_a + j\omega c_a)X_2 + (-\omega^2 m_a + k_a + j\omega c_a)X_a = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式(1), (2), (3)を運動方程式(6)に代入すると周波数応答関数は以下のように求められる。

$$\left| \frac{kX_1}{F} \right| = \sqrt{\frac{\beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\zeta_a^2\gamma^2\Omega^2}{A'}} \quad (7)$$

$$\left| \frac{kX_2}{F} \right| = \sqrt{\frac{(\beta + 1 - \Omega^2)^2(\gamma^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_a^2\gamma^2\Omega^2(\beta + 1 - \Omega^2)^2}{A'}} \quad (8)$$

式(7), (8)の A' は次式である。

$$\begin{aligned} A' = & [(\beta + 1 - \Omega^2)\{(\beta - \alpha\Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) - \mu\gamma^2\Omega^2\} - \beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)]^2 \\ & + 4\zeta_a^2\gamma^2\Omega^2[\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}(\beta + 1 - \Omega^2) - \beta^2]^2 \end{aligned} \quad (9)$$

3. 定点理論による解析

3・1 定点の数

図2に式(7), 式(8)の周波数応答関数に $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ を代入した時に, 減衰が0と ∞ である場合の周波数応答曲線を示す。図2(a)は x_1 の周波数応答曲線, (b)は x_2 の周波数応答曲線を示す。図2の赤線は $\zeta_a = 0$, 緑色の線は $\zeta_a = \infty$ を代入した時である。

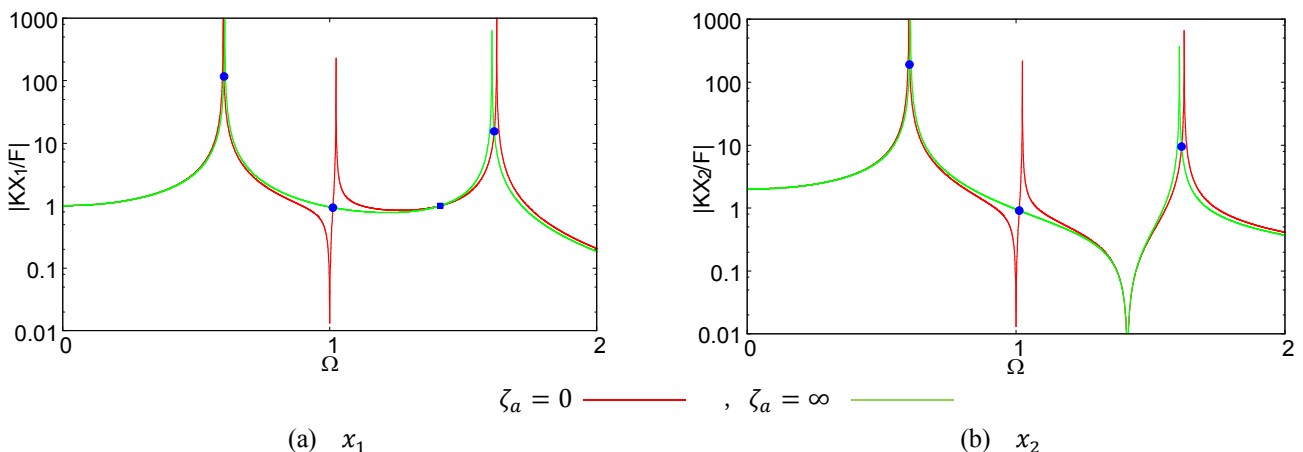


Fig.2 Frequency response curves for $\zeta_a = 0, \infty$ ($\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \mu = 0.05$). There are 4 fixed points in (a) and 3 fixed points in (b).

図2(a)には定点が4つあり図2(b)には定点が3つあるが, 図2(a)の■で示した定点は図2(b)では反共振点に対応する定点であり, $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ で同位相になっている。本研究では最適設計式の解析方法として定点理論を用

いるが、後述するように $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ の場合で周波数応答関数が逆位相になる定点のみ考える。そのため同位相となる■の定点は除外される。本研究では図 2 中に●で示した $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ で逆位相になる 3 つの定点の無次元振動数を Ω_o , Ω_p , Ω_q とし、 $\Omega_p < \Omega_q$ とする無次元振動数 Ω_p , Ω_q において定点の振幅が等しくなるように最適設計式の導出を行う。

3・2 x_1 の無次元振動数と最適同調値の導出

定点とは動吸振器の減衰比 ζ_a の値にかかわらず周波数応答関数を通る点である。そこで周波数応答関数に $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ を代入したときの振幅が等しいという条件から定点の無次元振動数と最適同調値を導出できる。 x_1 について周波数応答関数(7)に $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ を代入したときの結果を以下に示す。

$$\lim_{\zeta_a \rightarrow 0} \left(\frac{kX_1}{F} \right)^2 = \left(\frac{\beta(\gamma^2 - \Omega^2)}{(\beta + 1 - \Omega^2)\{(\beta - \alpha\Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) - \mu\gamma^2\Omega^2\} - \beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)} \right)^2 \quad (10)$$

$$\lim_{\zeta_a \rightarrow \infty} \left(\frac{kX_1}{F} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}(\beta + 1 - \Omega^2) - \beta^2} \right)^2 \quad (11)$$

先行研究(田村, 塩谷, 2012)により $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ の場合では周波数応答関数が逆位相になることが分かっている。式(10)と式(11)で符号が異なる時に振幅が等しくなるという条件から以下の式が得られる。

$$\frac{\beta}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}(\beta + 1 - \Omega^2) - \beta^2} = - \frac{\beta(\gamma^2 - \Omega^2)}{(\beta + 1 - \Omega^2)\{(\beta - \alpha\Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) - \mu\gamma^2\Omega^2\} - \beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)} \quad (12)$$

式(12)を Ω についてまとめると、自明な点 $\beta = 0$ を除き以下のような式を得る。

$$\Omega^6 - \frac{2\mu\gamma^2 + (\beta + 1)\mu + 2\alpha\gamma^2 + 2(\alpha + \beta + \alpha\beta)}{2\alpha + \mu} \Omega^4 + \frac{2\{(\beta + 1)\mu\gamma^2 + (\alpha + \beta + \alpha\beta)\gamma^2 + \beta\}}{2\alpha + \mu} \Omega^2 - \frac{2\beta\gamma^2}{2\alpha + \mu} = 0 \quad (13)$$

Ω_o , Ω_p , Ω_q を用いると式(13)は以下の形に因数分解される。

$$(\Omega^2 - \Omega_o^2)(\Omega^2 - \Omega_p^2)(\Omega^2 - \Omega_q^2) = 0 \quad (14)$$

式(14)の左辺を展開し、 Ω の係数について式(13)と比較すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_p^2 + \Omega_q^2 + \Omega_o^2 &= \frac{2\mu\gamma^2 + (\beta + 1)\mu + 2\alpha\gamma^2 + 2(\alpha + \beta + \alpha\beta)}{2\alpha + \mu} \\ \Omega_p^2\Omega_q^2 + \Omega_q^2\Omega_o^2 + \Omega_o^2\Omega_p^2 &= \frac{2\{(\beta + 1)\mu\gamma^2 + (\alpha + \beta + \alpha\beta)\gamma^2 + \beta\}}{2\alpha + \mu} \\ \Omega_p^2\Omega_q^2\Omega_o^2 &= \frac{2\beta\gamma^2}{2\alpha + \mu} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

減衰比 ζ_a の値に関わらず定点の無次元振動数 Ω_p , Ω_q で振幅が等しいという条件より、周波数応答関数(7)における $\zeta_a = \infty$ の場合として次式を得る。

$$\left(\frac{\beta}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_p^2\}(\beta + 1 - \Omega_p^2) - \beta^2} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_q^2\}(\beta + 1 - \Omega_q^2) - \beta^2} \right)^2 \quad (16)$$

振幅の等しい定点における応答が同位相で、式(16)の両辺が同符号の場合には次式となり

$$\Omega_p^2 + \Omega_q^2 = \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta + \mu + \beta\mu}{\alpha + \mu} \quad (17)$$

振幅の等しい定点における応答が逆位相で、式(16)の両辺が異符号の場合には次式を得る。

$$2\beta - (\alpha + \beta + \alpha\beta + \mu + \beta\mu)(\Omega_p^2 + \Omega_q^2) + (\alpha + \mu)(\Omega_p^4 + \Omega_q^4) = 0 \quad (18)$$

定点の無次元振動数 Ω_o , Ω_p , Ω_q と最適同調値 γ を得るためには式(15)と、式(17)あるいは式(18)を連立させて解けばよい。振幅が等しい定点で逆位相である式(18)では次数が高いため連立させて解くのが困難であるが、振幅が等しい定点で同位相である式(17)では解の導出が可能である。式(15)と式(17)を連立して解いた定点の無次元振動数 Ω_o , Ω_p , Ω_q と最適同調値 γ の結果を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_o^2 &= \frac{1}{1 + \alpha + \mu} \\ \Omega_p^2 &= W_1 - \sqrt{W_1^2 - V_1} \\ \Omega_q^2 &= W_1 + \sqrt{W_1^2 - V_1} \\ \gamma^2 &= \frac{2\alpha^2 + (3\alpha - \beta - \alpha\beta)\mu + (1 - \beta)\mu^2}{2(\alpha + \mu)^2(\alpha + \mu + 1)} \\ W_1 &= \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta + \beta\mu + \mu}{2(\alpha + \mu)} \\ V_1 &= \frac{2\alpha^2\beta + 3\alpha\beta\mu - \beta^2\mu - \alpha\beta^2\mu + \beta\mu^2 - \beta^2\mu^2}{(\alpha + \mu)^2(2\alpha + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

3・3 x_2 の無次元振動数と最適同調値の導出

同様に x_2 について定点とは減衰比 ζ_a の値にかかわらず周波数応答関数を通る点という条件より、周波数応答関数(8)に $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ を代入した結果を以下に示す。

$$\lim_{\zeta_a \rightarrow 0} \left(\frac{kX_2}{F} \right)^2 = \left(\frac{(\beta + 1 - \Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2)}{(\beta + 1 - \Omega^2)\{(\beta - \alpha\Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) - \mu\gamma^2\Omega^2\} - \beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)} \right)^2 \quad (20)$$

$$\lim_{\zeta_a \rightarrow \infty} \left(\frac{kX_2}{F} \right)^2 = \left(\frac{\beta + 1 - \Omega^2}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}(\beta + 1 - \Omega^2) - \beta^2} \right)^2 \quad (21)$$

先行研究(田村, 塩谷, 2012)より $\zeta_a = \infty$ と $\zeta_a = 0$ の場合では周波数応答関数が逆位相になることが分かっている。式(20)と式(21)で符号が異なる時に振幅が等しくなるという条件から以下の式が得られる。

$$\frac{(\beta + 1 - \Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2)}{(\beta + 1 - \Omega^2)\{(\beta - \alpha\Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) - \mu\gamma^2\Omega^2\} - \beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)} = - \frac{\beta + 1 - \Omega^2}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}(\beta + 1 - \Omega^2) - \beta^2} \quad (22)$$

式(22)を Ω についてまとめると、自明な点 $\beta = \Omega^2 - 1$ を除き 3.2 節の式(13)と同じ式を得る。そのことから 3 つの無次元振動数を Ω_o , Ω_p , Ω_p とし、振動数 Ω_p , Ω_p における振幅が等しい時の条件式は、式(15)と同じ式を得る。

減衰比 ζ_a の値に関わらず定点振動数 Ω_p , Ω_q で振幅が等しいという条件より, 周波数応答関数(8)における $\zeta_a = \infty$ の場合として次式を得る.

$$\left(\frac{\beta + 1 - \Omega_p^2}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_p^2\}(\beta + 1 - \Omega_p^2) - \beta^2} \right)^2 = \left(\frac{\beta + 1 - \Omega_q^2}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_q^2\}(\beta + 1 - \Omega_q^2) - \beta^2} \right)^2 \quad (23)$$

振幅の等しい定点における応答が同位相で, 式(23)の両辺が同符号の場合には次式となり

$$(1 + \beta)(\Omega_p^2 + \Omega_q^2) = \Omega_p^2 \Omega_q^2 + \frac{\alpha + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta^2 + (1 + 2\beta + \beta^2)\mu}{\alpha + \mu} \quad (24)$$

振幅の等しい定点における応答が逆位相で, 式(23)の両辺が異符号の場合には次式を得る.

$$\begin{aligned} \Omega_p^2 \Omega_q^2 (\alpha + \mu)(\Omega_p^2 + \Omega_q^2) + (\alpha + 2\beta + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta^2 + \mu + 2\beta\mu + \beta^2\mu)(\Omega_p^2 + \Omega_q^2) \\ = 2\beta(1 + \beta) + (\alpha + \mu)(1 + \beta)(\Omega_p^4 + \Omega_q^4) + 2(\alpha + \beta + \alpha\beta + \mu + \beta\mu)\Omega_p^2 \Omega_q^2 \end{aligned} \quad (25)$$

定点の無次元振動数 Ω_o , Ω_p , Ω_q と最適同調値 γ を得るためには式(15)と, 式(24)あるいは式(25)を連立させて解けばいい. 振幅が等しい定点で逆位相である式(25)では次数が高いため連立させて解くのが困難であるが, 振幅が等しい定点で同位相である式(24)では解の導出が可能である. 式(15)と式(24)を連立して解いた定点の無次元振動数 Ω_o , Ω_p , Ω_q と最適同調値 γ の結果を以下に示す.

$$\left. \begin{aligned} \Omega_o^2 &= \frac{\beta}{\alpha + \beta + \alpha\beta + (\beta + 1)\mu} \\ \Omega_p^2 &= W_2 - \sqrt{W_2^2 - V_2} \\ \Omega_q^2 &= W_2 + \sqrt{W_2^2 - V_2} \\ \gamma^2 &= \frac{2\alpha\beta + (\alpha + 2\beta + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta^2)\mu + (\beta + 1)^2\mu^2}{2(\alpha + \mu)\{\alpha + \beta + \alpha\beta + (\beta + 1)\mu\}} \\ W_2 &= \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta + \beta\mu + \mu}{2\alpha + \mu} \\ V_2 &= \frac{2\alpha\beta + (\alpha + 2\beta + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta^2)\mu + (\beta + 1)^2\mu^2}{(\alpha + \mu)(2\alpha + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

3・4 最適減衰比 ζ_a の導出

3・4・1 x_1 の最適減衰比の導出

x_1 について, 定点の無次元振動数で極大となるような最適減衰比を求めるには, 周波数応答関数(7)の絶対値の二乗を Ω^2 で偏微分した時の値が 0 となるような減衰比を求めればよい. つまり次式が成り立つ時である.

$$\frac{\partial}{\partial \Omega^2} \left(\frac{kX_1}{F} \right)^2 = 0 \quad (27)$$

式(27)を展開すると ζ_a^2 の二次方程式になり, 解の公式で解くと正の値となる ζ_a^2 は次式のように求められる.

$$\zeta_a^2 = \frac{-r_1(\Omega) + \sqrt{r_1^2(\Omega) - 4s_1(\Omega)}}{2} \quad (28)$$

式(28)の r_1, s_1 は次式で表せる.

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{e_1 d + f_1 c - a_1 h - b_1 g}{f_1 d - b_1 h} \\ s_1 &= \frac{e_1 c - a_1 g}{f_1 d - b_1 h} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式(29)の $a_1, b_1, c, d, e_1, f_1, g, h$ は式(30)である.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)^2 \\ b_1 &= 4\beta^2\gamma^2\Omega^2 \\ c &= [(\beta + 1 - \Omega^2)\{(\beta - \alpha\Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) - \mu\gamma^2\Omega^2\} - \beta^2(\gamma^2 - \Omega^2)]^2 \\ d &= 4\gamma^2\Omega^2[\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}(\beta + 1 - \Omega^2) - \beta^2]^2 \\ e_1 &= -2\beta^2(\gamma^2 - \Omega^2) \\ f_1 &= 4\beta^2\gamma^2 \\ g &= 2\{\beta^2 - (\beta - \alpha\Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) + \mu\gamma^2\Omega^2 + (\beta + 1 - \Omega^2)(-\beta - \alpha\gamma^2 - \mu\gamma^2 + 2\alpha\Omega^2)\} \\ &\quad \times [\Omega^2 - \gamma^2 + (2 - \Omega^2)\{(1 - \Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2) - \mu\gamma^2\Omega^2\}] \\ h &= 8\gamma^2\Omega^2\{-\beta - (\alpha + \mu)(\beta + 1 - \Omega^2) + (\alpha + \mu)\Omega^2\}[-\beta^2 + (\beta + 1 - \Omega^2)\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}] \\ &\quad + 4\gamma^2[-\beta^2 + (\beta + 1 - \Omega^2)\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega^2\}]^2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式(30)に式(19)で得られた最適同調値 γ と無次元振動数 Ω_p, Ω_q の値を代入し, 先行研究(田村, 塩谷, 2012)と同様に相乗平均を取ることで最適減衰比 ζ_a を得ることができる.

3・4・2 x_2 の最適減衰比の導出

同様 x_2 について, 定点の無次元振動数で極大となる最適減衰比は, 次式が成り立つ時に導出できる.

$$\frac{\partial}{\partial \Omega^2} \left(\frac{kX_2}{F} \right)^2 = 0 \quad (31)$$

式(31)を展開すると ζ_a^2 の二次方程式になり, 解の公式から解くと正の値となる ζ_a^2 は次式のように求められる.

$$\zeta_a^2 = \frac{-r_2(\Omega) + \sqrt{r_2^2(\Omega) - 4s_2(\Omega)}}{2} \quad (32)$$

式(32)の r_2, s_2 は次式で表され式(33)の a_2, b_2, e_2, f_2 は式(34)である.

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{e_2 d + f_2 c - a_2 h - b_2 g}{f_2 d - b_2 h} \\ s_2 &= \frac{e_2 c - a_2 g}{f_2 d - b_2 h} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= (\beta + 1 - \Omega^2)^2(\gamma^2 - \Omega^2)^2 \\ b_2 &= 4\gamma^2\Omega^2(\beta + 1 - \Omega^2)^2 \\ e_2 &= -2(\beta + 1 - \Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2)(\beta + 1 + \gamma^2 - 2\Omega^2) \\ f_2 &= 4\gamma^2(\beta + 1 - \Omega^2)(\beta + 1 - 3\Omega^2) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

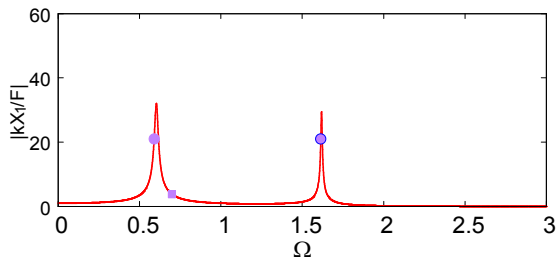
式(33)の c, d, g, h は式(30)と同じ式である。式(34)と式(30)の c, d, g, h に式(26)で得られた最適同調値 γ と無次元振動数 Ω_p, Ω_q の値を代入し先行研究(田村, 塩谷, 2012)と同様に相乗平均を取ることによって最適減衰比 ζ_a を得ることができる。

4. 計算結果

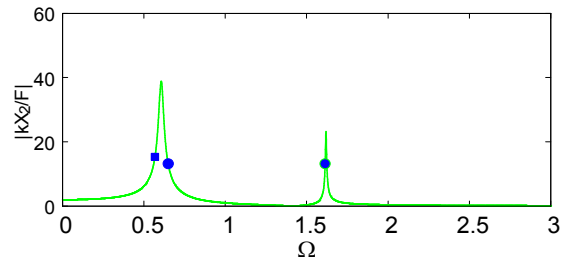
3節で定点の無次元振動数と最適同調値の導出を行った。そこで本節では主系の質量比と剛性比の与える影響を考える。

4・1 周波数応答曲線

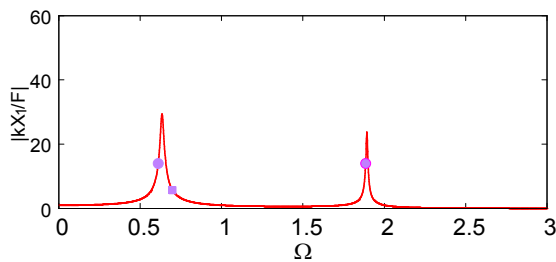
主系と動吸振器の質量比 $\mu = 0.05$ とし制振対象を x_1 とした時の x_1 の周波数応答曲線を図3に、制振対象を x_2 とした時の x_2 の周波数応答曲線を図4に示す。図3, 図4の質量比と剛性比の値は(a)は質量比 $\alpha = 1$ 剛性比 $\beta = 1$, (b)は質量比 $\alpha = 1$ 剛性比 $\beta = 1.5$, (c)は質量比 $\alpha = 1.5$ 剛性比 $\beta = 1$ である。また図中の丸い点は振幅の等しい定点を、四角い点はそうでない定点を示す。



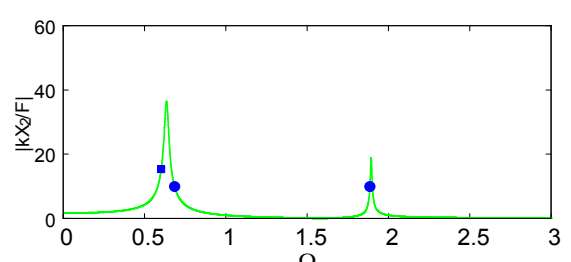
(a) $\alpha = 1, \beta = 1$



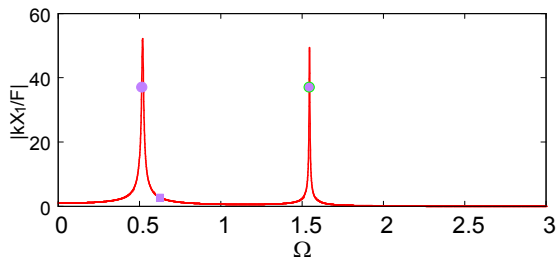
(a) $\alpha = 1, \beta = 1$



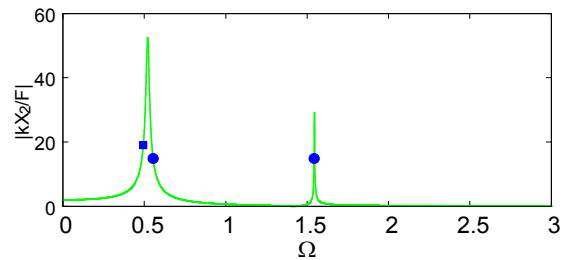
(b) $\alpha = 1, \beta = 1.5$



(b) $\alpha = 1, \beta = 1.5$



(c) $\alpha = 1.5, \beta = 1$



(c) $\alpha = 1.5, \beta = 1$

Fig.3 Frequency response curves for suppression of x_1

(●: fixed points with same amplitude. ■: other fixed point)

Fig.4 Frequency response curves for suppression of x_2

(●: fixed points with same amplitude. ■: other fixed point)

図3, 図4の周波数応答曲線を比較すると, 剛性比 β が異なる(a)と(b)の周波数応答曲線の最大値に大きな差は無いが, 質量比 α が異なる(a)と(c)では周波数応答曲線の最大値に大きな差がある. このことから周波数応答曲線に与える影響は剛性比よりも質量比の方が大きいことが分かる.

4・2 定点の無次元振動数と最適同調値

主系の質量比と剛性比が定点の無次元振動数と最適同調値に与える影響を考察する.

4・2・1 制振対象 x_1 の場合

主系と動吸振器の質量比 $\mu = 0.05$ の時に, 質量比 α と剛性比 β に対する式(19)の無次元振動数 $\Omega_o, \Omega_p, \Omega_q$ と最適同調値 γ の変化を, 横軸が質量比 α で奥行きが剛性比 β の図5(a)~(d)に示す.

図5(a)~(c)より Ω_o は質量比 α のみに影響を受けており, これは式(19)からも分かる. 一方 Ω_p と Ω_q は質量比 α と剛性比 β の両方から影響を受けていることが分かる. また Ω_p は質量比 α の影響が大きく, Ω_q は質量比 α が小さいほど剛性比 β の影響が大きいことが分かる.

図5(d)より最適同調値 γ は質量比 α の影響が大きいことが分かる.

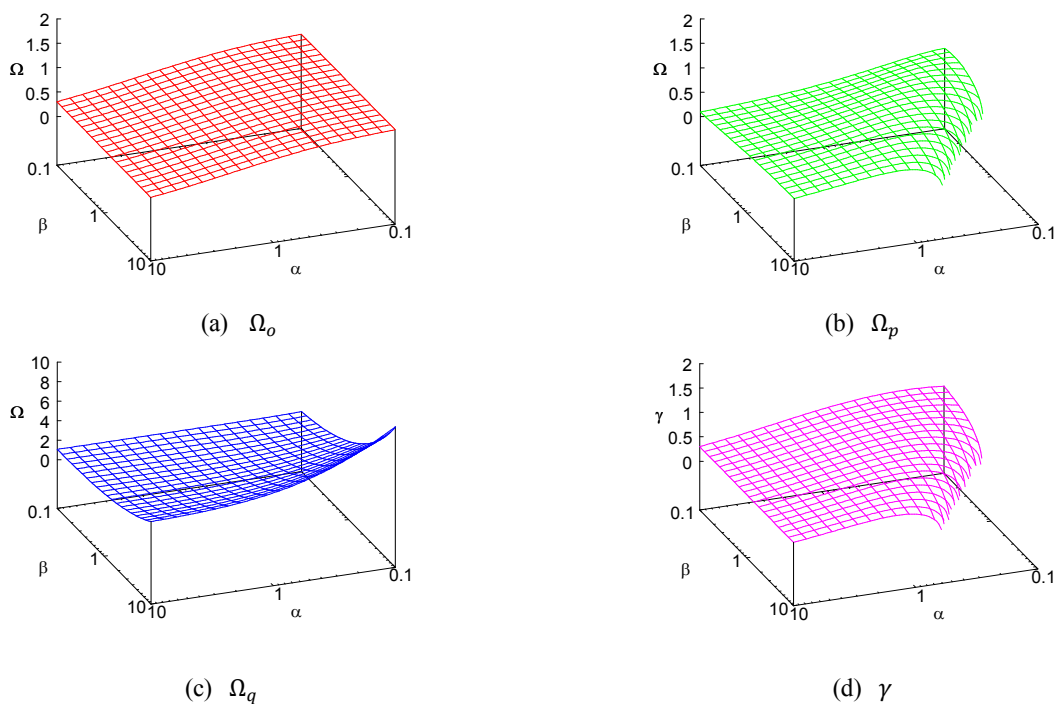
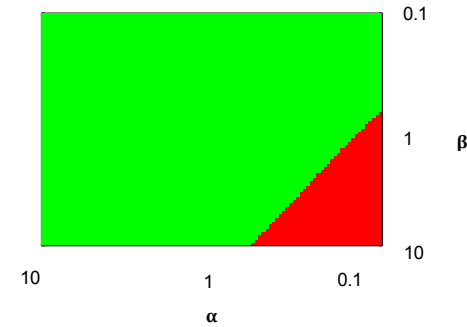


Fig.5 Frequencies of fixed points and natural frequency ratio for suppression of x_1 ($\mu = 0.05$). There is the area where Ω_p and γ vanish.

図5(b)より無次元振動数 Ω_p の図が欠けていて導出できない質量比 α と剛性比 β が存在するのが分かる. 同様に図5(d)では最適同調値 γ の図が欠けていて導出できない質量比 α と剛性比 β があることが分かる. その原因をしらべた結果, 導出できない範囲は式(19)の Ω_p^2 と γ^2 が負の値になる時であった. そこで式(19)について考察した結果, Ω_p^2 と γ^2 が正の値をとり定点理論により最適設計ができる範囲は共に次式が成り立つ範囲であると分かった.

$$\frac{2\alpha^2 + 3\alpha\mu + \mu^2}{\mu(\mu + \alpha + 1)} > \beta \tag{35}$$

図6に最適同調値と無次元振動数を導出できる質量比 α と剛性比 β の範囲を示す。図6では式(35)が成り立ち最適同調値と無次元振動数を導出できる範囲を緑色で、そうでない範囲を赤色で示してある。



(Green: $\gamma^2, \Omega_p^2 > 0$, Red: $\gamma^2, \Omega_p^2 < 0$)

Fig.6 Area of imaginary frequency and natural frequencies ratio for suppression of x_1 ($\mu = 0.05$).

図6より質量比 α の値が小さく、かつ剛性比 β の値が大きい時に Ω_p^2 と γ^2 を導出できないため、定点理論による最適設計が出来ないことが分かる。

4・2・2 制振対象 x_2 の場合

主系と動吸振器の質量比 $\mu = 0.05$ の時に、質量比 α と剛性比 β に対する式(26)の無次元振動数 Ω_o , Ω_p , Ω_q と最適同調値 γ の変化を、横軸が質量比 α で奥行きが剛性比 β の図7(a)~(d)に示す。

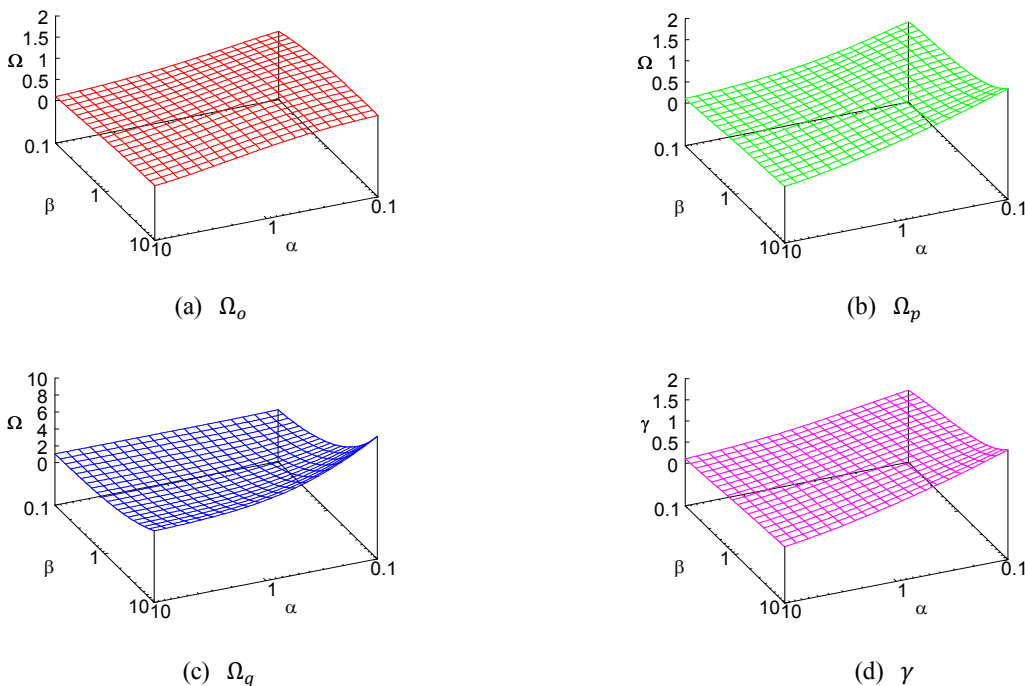


Fig.7 Frequencies of fixed points and natural frequency ratio for suppression of x_2 ($\mu = 0.05$). Fixed points and natural frequency ratio are evaluated for any ratio of mass and stiffness.

図7(a), (b)より Ω_o , Ω_p は質量比 α の影響が大きいことが分かる。図7(c)より Ω_q は剛性比 β の値が大きいほど質量比 α の影響は大きくなることが分かる。

図7(d)から最適同調値 γ は質量比 α の影響が大きいことが分かる。

4・2・1 節の図 5 より x_1 の時は定点の無次元振動数と最適同調値を導出できる質量比 α と剛性比 β の範囲に限られるが、図 7 より x_2 の時は質量比 α と剛性比 β の値に関わらず定点の無次元振動数と最適同調値を導出できることから、全ての質量比と剛性比で最適設計が可能であると分かる。

5. 全ての定点の振幅が等しい場合

主系の質量比と剛性比の値を変化させながら最適設計式への影響について調べる中で、3 つの定点の振幅が等しくなる場合があることが分かった。そこで 3 つの定点の振幅が等しい場合について考察を行う。3 節では振動数 Ω_p, Ω_q で定点の振幅が等しくなるように導出を行った。つまり、3 つの定点の振幅が等しくなるのは定点の無次元振動数 Ω_p または Ω_q での振幅と振動数 Ω_o での振幅が等しい時である。3 節で求めた定点の無次元振動数 Ω_p, Ω_q で周波数応答関数が同位相のときは、図 2 と図 3 より無次元振動数 Ω_o と Ω_p は共振点に対して逆側にあるため逆位相となる。周波数応答関数(7)に $\zeta_a = \infty$ を代入した式から、 x_1 で全ての定点の振幅が等しくなるのは以下の式が成り立つ時である。

$$\frac{\beta}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_p^2\}(\beta + 1 - \Omega_p^2) - \beta^2} = -\frac{\beta}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_o^2\}(\beta + 1 - \Omega_o^2) - \beta^2} \quad (40)$$

同様に周波数応答関数(8)に $\zeta_a = \infty$ を代入した式から、 x_2 で全ての定点の振幅が等しくなるのは以下の式が成り立つ時である。

$$\frac{\beta + 1 - \Omega_p^2}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_p^2\}(\beta + 1 - \Omega_p^2) - \beta^2} = -\frac{\beta + 1 - \Omega_o^2}{\{\beta - (\alpha + \mu)\Omega_o^2\}(\beta + 1 - \Omega_o^2) - \beta^2} \quad (41)$$

式(40)に 3・2・1 節で導出した式(19)の Ω_o, Ω_p を代入すると、 x_1 において全ての定点の振幅が等しくなる質量比と剛性比の関係が導出できる。同様に式(41)に 3・2・2 節で導出した式(26)の Ω_o, Ω_p を代入すると、 x_2 において全ての定点の振幅が等しくなる質量比と剛性比の関係が導出できる。主系と動吸振器の質量比 $\mu = 0.05$ の時の導出した全ての定点の振幅が等しくなる時の質量比 α と剛性比 β の関係を図 8 に示す。図 8 では x_1 の質量比と剛性比の関係を赤の線で、 x_2 の質量比と剛性比の関係を緑の線で示してある。

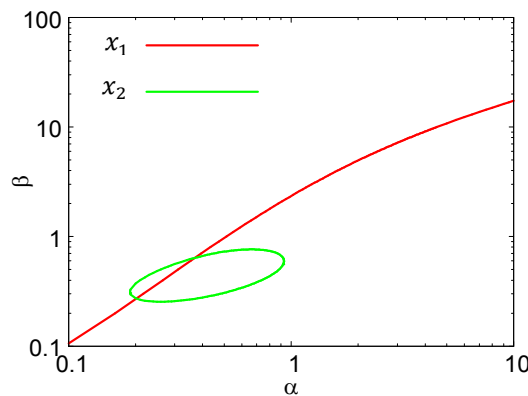


Fig.8 Relation of stiffness ratio and mass ratio where amplitudes of all fixed points are same ($\mu = 0.05$). For the frequency response curve of x_1 , the stiffness ratio that equalizes the amplitudes of all fixed points is uniquely determined for arbitrary chosen mass ratio. But for the frequency response curve of x_2 , the mass ratio changes the number of the stiffness ratio that equalizes the amplitudes of all fixed points into two or zero.

図8より、 x_1 では全ての質量比で全ての定点の振幅が等しくする剛性比が存在し、その剛性比は質量比に対して単調増加していることが分かる。しかし x_2 では全ての定点の振幅が等しくする質量比と剛性比に範囲があり、その剛性比の数は質量比によって変化していることが分かる。また二つの線が二点で交差していることから、同じ質量比と剛性比で x_1 と x_2 における全ての定点の振幅が等しくなる場合があることが分かる。

6. 結 言

本研究では、質量と剛性の異なり外力が接地面から離れた質量に働く二自由度系に動吸振器を一つ取り付けた場合について、動吸振器の最適設計式に主系の質量比と剛性比が与える影響を考察した。その結果得られた知見を以下に示す。

- x_1 と x_2 の周波数応答関数において振幅が等しい定点で位相が同位相となる時の無次元振動数と最適同調値を導出した。
- x_1 と x_2 の周波数応答関数において最適減衰比を導出した。
- x_1 を制振する場合は最適同調値が求められない質量比と剛性比の範囲があるが、 x_2 を制振する場合はすべての質量比と剛性比で最適同調値が求められる。
- 周波数応答関数において全ての定点の振幅が等しくなる質量比と剛性比の関係を求めた。 x_1 では全ての質量比で全ての定点の振幅を等しくする剛性比が存在し、その剛性比は質量比に対して単調増加する。 x_2 では全ての定点の振幅を等しくする質量比と剛性比に範囲があり、その剛性比の数は質量比によって変化する。

本研究では二自由度系を対象としたが、より現実的な設計を考え、今後はさらに多くの質量からなる多自由度系について検討する必要がある。

文 献

- Asami, T. and Nishihara, O., Closed-form exact solution to H_∞ optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems), Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 125(2003), pp. 398-405.
- Asami, T., Nishihara, O. and Baz, A. M., Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization, Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 124 (2002), pp. 284-295.
- Cheung, Y. L. and Wong, W. O., H_∞ and H_2 optimizations of a dynamic vibration absorber for suppressing vibrations in plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 320 (2009), pp. 29-42.
- Dayou, J., Fixed-points theory for global vibration control using vibration neutralizer, Journal of Sound and Vibration, Vol. 292 (2006), pp. 765-776.
- Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations, 4th edition (1956), McGraw-Hill, New York.
- 背戸一登, 動吸振器とその応用 (2010), コロナ社.
- 田村晋司, 鈴木健介, 小塚翔太, 異なる特性を持つ二自由度系を対象とした定点理論による動吸振器の最適設計, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2013 講演論文集 No.227 (2013).
- 田村晋司, 塩谷友康, 定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計 (第1報, 同一の質量と剛性を持つ二自由度系の場合), 日本機械学会論文集C編, Vol. 78, No. 786 (2012), pp. 372-381.
- Yang, C., Li, D. and Cheng, L., Dynamic vibration absorbers for vibration control within a frequency band, Journal of Sound and Vibration, Vol. 330 (2011), pp. 1582-1598.

References

Asami, T. and Nishihara, O., Closed-form exact solution to H_∞ optimization of dynamic vibration absorbers (application to

different transfer functions and damping systems), Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 125 (2003), pp. 398-405.

Asami, T., Nishihara, O. and Baz, A. M., Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization, Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 124 (2002), pp. 284-295.

Cheung, Y. L. and Wong, W. O., H_∞ and H_2 optimizations of a dynamic vibration absorber for suppressing vibrations in plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 320 (2009), pp. 29-42.

Dayou, J., Fixed-points theory for global vibration control using vibration neutralizer, Journal of Sound and Vibration, Vol. 292 (2006), pp. 765-776.

Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations, 4th edition (1956), McGraw-Hill, New York.

Seto, K., Dynamic Vibration Absorber and its Applications (2010), Corona, Tokyo (in Japanese).

Tamura, S., Suzuki, K. and Kozuka, S., Optimal design of dynamic absorber for two DOF system with different characteristics by fixed points theory, Proceedings of the Dynamics and Design Conference No.227 (2013) (in Japanese).

Tamura, S. and Shiotani, T., Design of dynamic absorber for two DOF system by fixed points theory (1st report: case of two DOF system with identical mass and stiffness), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol. 78, No. 786 (2012), pp. 372-381 (in Japanese).

Yang, C., Li, D. and Cheng, L., Dynamic vibration absorbers for vibration control within a frequency band, Journal of Sound and Vibration, Vol. 330 (2011), pp. 1582-1598.