

Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers
定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計 (第 1 報 , 同一の質量と剛性
を持つ二自由度系の場合)
--Manuscript Draft--

受付番号:	TRANS-JSME-D-11-01087R2
標題:	定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計 (第 1 報 , 同一の質量と剛性を持つ二自由度系の場合)
論文種別:	一般論文
責任著者:	田村 晋司 タムラ シンジ 島根大学 松江市, 島根県 JAPAN
責任著者 (英語):	
責任著者の組織名:	島根大学
責任著者の組織名 (英語):	
筆頭著者:	田村 晋司 タムラ シンジ
筆頭著者 (英語):	
全著者:	田村 晋司 タムラ シンジ 塩谷 友康 シオタニ トモヤス
全著者のセカンダリ情報:	
抄録:	無減衰二自由度振動系の外力が加わる質量に動吸振器を一つ取り付けた場合について , 二つのモードの同時制振に対する定点理論を検討した . 二つの定点で応答が同位相となる場合に対して , 定点振幅を等しくする動吸振器の固有振動数比と定点振動数 , および定点で極値を取る動吸振器の減衰比が解析的に得られ , この二つの定点の減衰比の相乗平均が動吸振器としてほぼ最適であることが分かった . 得られた理論解は定点で応答が逆位相となる場合の数値計算結果と制振性能にほとんど差が無く , 同位相の場合のみで十分実用的であることが分かった .

定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計*

(第1報, 同一の質量と剛性を持つ二自由度系の場合)

田村 晋司*¹, 塩谷 友康*²Design of Dynamic Absorber for Two DOF System by Fixed Points Theory
(1st Report: Case of Two DOF System with Identical Mass and Stiffness)Shinji TAMURA*¹ and Tomoyasu SHIOTANI

*¹ Department of Electronic and Control Systems Engineering,
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University
1060 Nishikawatsu-cho, Matsue-shi, Shimane 690-8504, Japan

The fixed points theory is applied for the dynamic absorber attached to two degree of freedom system which consists of two identical single degree of freedom systems connected in series. The frequencies of fixed points and the ratio of natural frequencies to equalize the amplitudes at fixed points are analytically derived, in case that the responses at fixed points are in phase. The damping coefficients which make fixed points extremal value are also obtained. Because each of fixed points has different optimal damping coefficient, representative value must be determined. Arithmetic and geometric means of the damping coefficients are considered, and the comparison of the frequency response functions show that the geometric mean is suitable. The analytical solution is compared to the numerically computed results whose responses at fixed points of equal amplitudes are π rad out of phase, and it is shown that these dynamic absorbers have almost same performance of vibration suppression.

Key Words : Dynamic Absorber, Forced Vibration, Frequency Response Function, Coupled Vibration, Fixed Point

1. 緒 言

制振デバイスとしての動吸振器は, 外部エネルギーを必要としないという大きな特徴を持つ. 減衰の無い一自由度振動系についての動吸振器の設計方法としては, Den Hartog によって確立された定点理論がある⁽¹⁾. また, 減衰のある一自由度振動系に対しては, 浅見らによって設計方法が示されている⁽²⁾⁽³⁾.

一方, 多自由度系や連続体の振動に対しては, モード毎に定点理論を応用してそれぞれのモードに最適化された動吸振器を, 制振したいモードの数だけ取り付けする方法が提案されている⁽⁴⁾. しかし, スペースやコストの問題のために多自由度系の制振に複数の動吸振器を取り付けることが困難な場合も想定される.

このような設置する動吸振器の数に制限がある場合を想定して, 本研究では一つの動吸振器を減衰の無い二自由度系に取り付けた場合を考える. 同一の無減衰一自由度系が直列に連結された二自由度系に対して, 著者らが数値計算により検討した結果⁽⁵⁾, 定点が三個存在し, 二つのモードの同時制振が可能であることが分かった. 本報では, この同一の質量と剛性を持つ無減衰二自由度系の外力が加わる質量に動吸振器を一つ取り付けただけの場合について, 二つのモードの同時制振に対する定点理論の定式化を検討する.

* 原稿受付 2011 年 11 月 30 日

*¹ 正員, 島根大学 総合理工学部 電子制御システム工学科 (〒 690-8504 島根県松江市西川津町 1060)

*² 島根大学 総合理工学部 電子制御システム工学科

E-mail: stamura@ecs.shimane-u.ac.jp

2. 運動方程式と周波数応答関数

2.1 対象とする振動系

図 1 に示されるような減衰の無い同一の系が直列に連結された二自由度系が、剛体壁に直接バネでつながっている左の質量に励振力 $F \cos \omega t$ を受ける場合を考える．質量を m ，バネ係数を k とし，左右の質量の変位をそれぞれ x_1, x_2 とする．

この系に一つだけ動吸振器を取り付ける．外力を打ち消すことを目的とし，図 2 のように励振力を受ける左の質量に動吸振器を取り付ける場合を考える．動吸振器の変位と質量，バネ係数，減衰係数をそれぞれ， x_a, m_a, k_a, c_a とおく．

2.2 運動方程式と周波数応答関数

図 2 に示すモデルの運動方程式は以下となる．

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_a\dot{x}_1 + (2k + k_a)x_1 - c_a\dot{x}_a - kx_2 - k_ax_a &= F \cos \omega t \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 &= 0 \\ m_a\ddot{x}_a + c_a\dot{x}_a + k_ax_a - c_a\dot{x}_1 - k_ax_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

x_1, x_2 の振幅をそれぞれ X_1, X_2 と定義すると，虚数単位を i として仮想的な外力項 $iF \sin \omega t$ を付加することによって， x_1, x_2 に対する周波数応答関数 H_{11}, H_{21} はそれぞれ以下のように求められる．

$$H_{11} = \frac{X_1}{F} = \frac{(k - \omega^2 m)A}{D} \quad (2)$$

$$H_{21} = \frac{X_2}{F} = \frac{kA}{D} \quad (3)$$

ここで， A, D は，それぞれ以下の式で与えられる量である．

$$A = k_a + i\omega c_a - \omega^2 m_a \quad (4)$$

$$D = (2k + k_a + i\omega c_a - \omega^2 m)(k - \omega^2 m)A - (k_a + i\omega c_a)^2 (k - \omega^2 m) - k^2 A \quad (5)$$

2.3 周波数応答関数の無次元化

以下に示すように，それぞれの系を 1 自由度系としたときの固有角振動数と減衰比を導入する．

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}, \quad \zeta_a = \frac{c_a}{2\sqrt{m_a k_a}} \quad (6)$$

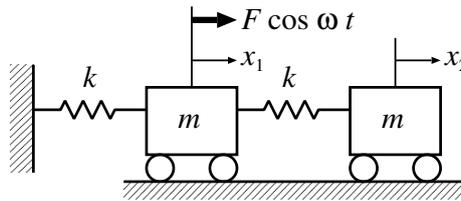


Fig. 1 Undamped 2-DOF system

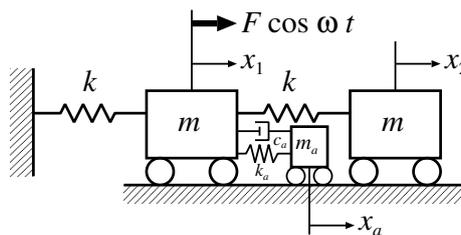


Fig. 2 2-DOF system with dynamic absorber

そして、以下のように、系と動吸振器の質量比 μ と固有振動数比 γ 、および励振力の振動数比 Ω の無次元量を導入する。

$$\mu = \frac{m_a}{m}, \quad \gamma = \frac{\omega_a}{\omega_n}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (7)$$

式 (6), (7) を式 (4), (5) に代入すると無次元化された \bar{A}, \bar{D} は以下のように求められるので、

$$\bar{A} = \frac{A}{m_a \omega_n^2} = \gamma^2 - \Omega^2 + 2i\zeta_a \gamma \Omega \quad (8)$$

$$\bar{D} = \frac{D}{m^2 m_a \omega_n^6} = \gamma^2 - \{1 + (3 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + \{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^4 - \Omega^6 + 2i\zeta_a \gamma \Omega \{1 - (3 + \mu)\Omega^2 + (1 + \mu)\Omega^4\} \quad (9)$$

周波数応答関数 (2), (3) は以下のように無次元化される。

$$\bar{H}_{11} = kH_{11} = \frac{(1 - \Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2 + 2i\zeta_a \gamma \Omega)}{\gamma^2 - \{1 + (3 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + \{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^4 - \Omega^6 + 2i\zeta_a \gamma \Omega \{1 - (3 + \mu)\Omega^2 + (1 + \mu)\Omega^4\}} \quad (10)$$

$$\bar{H}_{21} = kH_{21} = \frac{\gamma^2 - \Omega^2 + 2i\zeta_a \gamma \Omega}{\gamma^2 - \{1 + (3 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + \{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^4 - \Omega^6 + 2i\zeta_a \gamma \Omega \{1 - (3 + \mu)\Omega^2 + (1 + \mu)\Omega^4\}} \quad (11)$$

3. 定点理論の適用

3.1 定点振動数の代数方程式

定点とは、動吸振器の減衰比 ζ_a の値に関わらず周波数応答関数を通る点であるので、前節で導出した周波数応答関数に対して $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ に対する振幅が等しいという方程式から求められる。ただし、既報⁽⁵⁾で示したように ζ_a の小さい値と大きい値で定点と共振点の位置が逆になることより、 $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ では定点における周波数応答関数は逆位相となることに注意する必要がある。

x_1 に関しては、無次元化された周波数応答関数 (10) の $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ で振幅が等しい条件から以下の式が得られ、

$$\frac{(1 - \Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2)}{\gamma^2 - \{1 + (3 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + \{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^4 - \Omega^6} = -\frac{1 - \Omega^2}{1 - (3 + \mu)\Omega^2 + (1 + \mu)\Omega^4} \quad (12)$$

反共振点における自明な定点 $\Omega = 1$ を除き、 Ω についてまとめると以下の定点振動数に関する代数方程式を得る。

$$\Omega^6 - \frac{2(\mu + 1)\gamma^2 + \mu + 6}{\mu + 2} \Omega^4 + \frac{2\{(\mu + 3)\gamma^2 + 1\}}{\mu + 2} \Omega^2 - \frac{2\gamma^2}{\mu + 2} = 0 \quad (13)$$

x_2 に関しては、無次元化された周波数応答関数 (11) の $\zeta_a = 0$ と $\zeta_a = \infty$ で振幅が等しい条件から以下の式が得られ、

$$\frac{\gamma^2 - \Omega^2}{\gamma^2 - \{1 + (3 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + \{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^4 - \Omega^6} = -\frac{1}{1 - (3 + \mu)\Omega^2 + (1 + \mu)\Omega^4} \quad (14)$$

式 (12) と式 (14) を比較すると、定点振動数に関する代数方程式は式 (13) となることは明らかである。

3.2 最適固有振動数比 γ

3.2.1 三次方程式における解と係数の関係の利用

導出された定点振動数に関する代数方程式 (13) の根を解析的に求め、その振動数における振幅を等しくする γ を求めると定点理論における最適固有振動数比となる。しかし、式 (13) の根は煩雑な式となるため、この方法を用いることは困難である。そのため、文献⁽⁶⁾の一自由度系に対する動吸振器の導出方法を参考に、三次方程式における解と係数の関係、および定点における振幅が等しい条件の四本の方程式から、定点の振動数と最適固有振動数比 γ を同時に求めることを考える。

三つの定点の角振動数を $\Omega_p, \Omega_q, \Omega_o$ とし、角振動数 Ω_p, Ω_q における振幅が等しいとする。すると、式 (13) は以下の形に因数分解されることとなる。

$$\Omega^6 - \frac{2(\mu + 1)\gamma^2 + \mu + 6}{\mu + 2} \Omega^4 + \frac{2\{(\mu + 3)\gamma^2 + 1\}}{\mu + 2} \Omega^2 - \frac{2\gamma^2}{\mu + 2} = (\Omega^2 - \Omega_p^2)(\Omega^2 - \Omega_q^2)(\Omega^2 - \Omega_o^2) \quad (15)$$

式 (15) の右辺を展開して， Ω の係数を比較すると次式を得る．

$$\left. \begin{aligned} \Omega_p^2 + \Omega_q^2 + \Omega_o^2 &= \frac{2(\mu+1)\gamma^2 + \mu + 6}{\mu + 2} \\ \Omega_p^2 \Omega_q^2 + \Omega_q^2 \Omega_o^2 + \Omega_o^2 \Omega_p^2 &= \frac{2\{(\mu+3)\gamma^2 + 1\}}{\mu + 2} \\ \Omega_p^2 \Omega_q^2 \Omega_o^2 &= \frac{2\gamma^2}{\mu + 2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

3.2.2 x_1 の周波数応答関数における最適固有振動数比 γ

x_1 について，減衰比 ζ_a の値に関わらず定点振動数 Ω_p, Ω_q で振幅が等しいという条件より，周波数応答関数 (10) における $\zeta_a = \infty$ の場合として次式を得る．

$$\left| \frac{1 - \Omega_p^2}{1 - (3 + \mu)\Omega_p^2 + (1 + \mu)\Omega_p^4} \right| = \left| \frac{1 - \Omega_q^2}{1 - (3 + \mu)\Omega_q^2 + (1 + \mu)\Omega_q^4} \right| \quad (17)$$

振幅の等しい定点における応答が同位相であり，式 (17) の両辺が同符号の場合には次式となり，

$$\Omega_p^2 + \Omega_q^2 - \Omega_p^2 \Omega_q^2 = \frac{\mu + 2}{\mu + 1} \quad (18)$$

振幅の等しい定点における応答が逆位相で，式 (17) の両辺が異符号の場合は次式を得る．

$$(\mu + 1)(\Omega_p^2 + \Omega_q^2)(\Omega_p^2 + \Omega_q^2 - \Omega_p^2 \Omega_q^2 - 1) + 4\Omega_p^2 \Omega_q^2 - 3(\Omega_p^2 + \Omega_q^2) + 2 = 0 \quad (19)$$

定点の角振動数 $\Omega_p^2, \Omega_q^2, \Omega_o^2$ と最適固有振動数比 γ を得るためには，式 (16) と連立させて，式 (18) あるいは式 (19) を解けば良いことになるが，振幅の等しい定点における応答が逆位相の場合である式 (19) は次数が高いため解くことが困難である．しかし，同位相の場合については解析解を得ることが可能であり，式 (18) と式 (16) を解いた結果を以下に示す．

$$\left. \begin{aligned} \Omega_o^2 &= \frac{1}{\mu + 3} \\ \Omega_p^2 &= \frac{\mu + 3}{\mu + 2} - \frac{1}{\mu + 2} \sqrt{\frac{\mu^2 + 5\mu + 5}{\mu + 1}} \\ \Omega_q^2 &= \frac{\mu + 3}{\mu + 2} + \frac{1}{\mu + 2} \sqrt{\frac{\mu^2 + 5\mu + 5}{\mu + 1}} \\ \gamma^2 &= \frac{\mu^2 + 4\mu + 2}{2(\mu + 1)(\mu + 3)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

3.2.3 x_2 の周波数応答関数における最適固有振動数比 γ

同様に x_2 について，減衰比 ζ_a の値に関わらず定点振動数 Ω_p, Ω_q で振幅が等しいという条件より，周波数応答関数 (11) における $\zeta_a = \infty$ の場合として，次式を得る．

$$\left| \frac{1}{1 - (3 + \mu)\Omega_p^2 + (1 + \mu)\Omega_p^4} \right| = \left| \frac{1}{1 - (3 + \mu)\Omega_q^2 + (1 + \mu)\Omega_q^4} \right| \quad (21)$$

振幅の等しい定点における応答が同位相であり，式 (21) の両辺が同符号の場合には次式となり，

$$\Omega_p^2 + \Omega_q^2 = \frac{\mu + 3}{\mu + 1} \quad (22)$$

振幅の等しい定点における応答が逆位相で，式 (21) の両辺が異符号の場合は次式を得る．

$$(\mu + 1)(\Omega_p^4 + \Omega_q^4) - (\mu + 3)(\Omega_p^2 + \Omega_q^2) + 2 = 0 \quad (23)$$

x_1 の周波数応答関数の場合と同様に，振幅の等しい定点における応答が同位相の場合についてのみ解析解を得ることが可能であり，式 (22) と式 (16) を解いた結果を以下に示す．

$$\left. \begin{aligned} \Omega_o^2 &= \frac{2}{\mu+5} \\ \Omega_p^2 &= \frac{\mu+3}{2(\mu+1)} - \frac{1}{2(\mu+1)} \sqrt{\frac{\mu^3+8\mu^2+29\mu+10}{\mu+2}} \\ \Omega_q^2 &= \frac{\mu+3}{2(\mu+1)} + \frac{1}{2(\mu+1)} \sqrt{\frac{\mu^3+8\mu^2+29\mu+10}{\mu+2}} \\ \gamma^2 &= \frac{2(1-\mu)}{(\mu+1)^2(\mu+5)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

3.3 最適減衰比 ζ_a

3.3.1 x_1 の周波数応答関数における最適減衰比 ζ_a

x_1 について，定点振動数で極大となる最適減衰比を求めるためには，周波数応答関数 (10) の絶対値の二乗を Ω^2 で偏微分した値が 0 となる ζ_a を求めればよい．つまり，* は複素共役を表す記号として，

$$\frac{\partial}{\partial \Omega^2} (\bar{H}_{11}^* \bar{H}_{11}) = 0 \quad (25)$$

である．式 (25) は ζ_a^2 に関する二次方程式となるので，正の値となる ζ_a^2 を求めると次式となる．

$$\zeta_a^2 = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}{2} \quad (26)$$

ここで，式 (26) の α_1, β_1 は以下であり，

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a'_1 d + b'_1 c - a_1 d' - b_1 c'}{b'_1 d - b_1 d'} \\ \beta_1 &= \frac{a'_1 c - a_1 c'}{b'_1 d - b_1 d'} \\ a_1 &= (1 - \Omega^2)^2 (\gamma^2 - \Omega^2)^2 \\ b_1 &= 4\gamma^2 \Omega^2 (1 - \Omega^2)^2 \\ c &= \{\gamma^2 - \{1 + (3 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + \{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^4 - \Omega^6\}^2 \\ d &= 4\gamma^2 \Omega^2 \{1 - (3 + \mu)\Omega^2 + (1 + \mu)\Omega^4\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ダッシュは Ω^2 に関する微分を表すとする． a'_1, b'_1, c', d' を具体的に求めると以下となる．

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= -2(1 - \Omega^2)(\gamma^2 - \Omega^2)(1 + \gamma^2 - 2\Omega^2) \\ b'_1 &= 4\gamma^2(1 - 4\Omega^2 + 3\Omega^4) \\ c' &= -2[\gamma^2 - \{1 + (3 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + \{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^4 - \Omega^6] \\ &\quad \times [1 + (3 + \mu)\gamma^2 - 2\{3 + (1 + \mu)\gamma^2\} \Omega^2 + 3\Omega^4] \\ d' &= 4\gamma^2 \{1 - (3 + \mu)\Omega^2 + (1 + \mu)\Omega^4\} \{1 - 3(3 + \mu)\Omega^2 + 5(1 + \mu)\Omega^4\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

3.3.2 x_2 の周波数応答関数における最適減衰比 ζ_a

x_2 については，同様に

$$\frac{\partial}{\partial \Omega^2} (\bar{H}_{21}^* \bar{H}_{21}) = 0 \quad (29)$$

であり，式 (29) の正の値となる ζ_a^2 を求めると次式となる．

$$\zeta_a^2 = \frac{-\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4\beta_2}}{2} \quad (30)$$

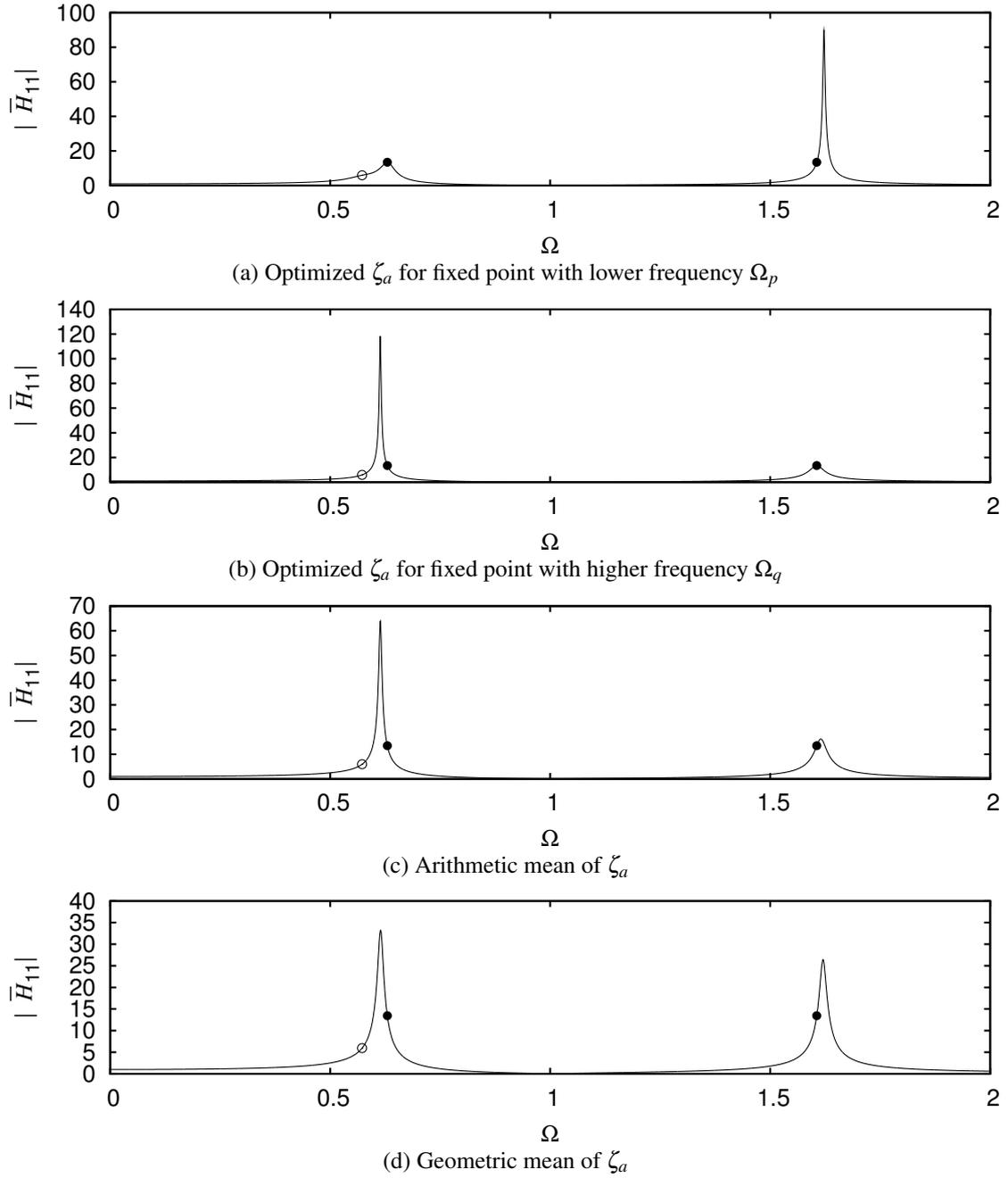


Fig. 3 Frequency response functions of x_1 for variously optimized ζ_a ($\mu = 0.05$)

[● : fixed points with equal amplitude, ○ : other fixed point]

ここで、式 (30) の α_2, β_2 は以下であり、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{a'_2 d + b'_2 c - a_2 d' - b_2 c'}{b'_2 d - b_2 d'} \\ \beta_2 &= \frac{a'_2 c - a_2 c'}{b'_2 d - b_2 d'} \\ a_2 &= (\gamma^2 - \Omega^2)^2 \\ b_2 &= 4\gamma^2 \Omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

c, d は式 (27) で定義されている値である。 a'_2, b'_2 を具体的に求めると以下となる。

$$\left. \begin{aligned} a'_2 &= -2(\gamma^2 - \Omega^2) \\ b'_2 &= 4\gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

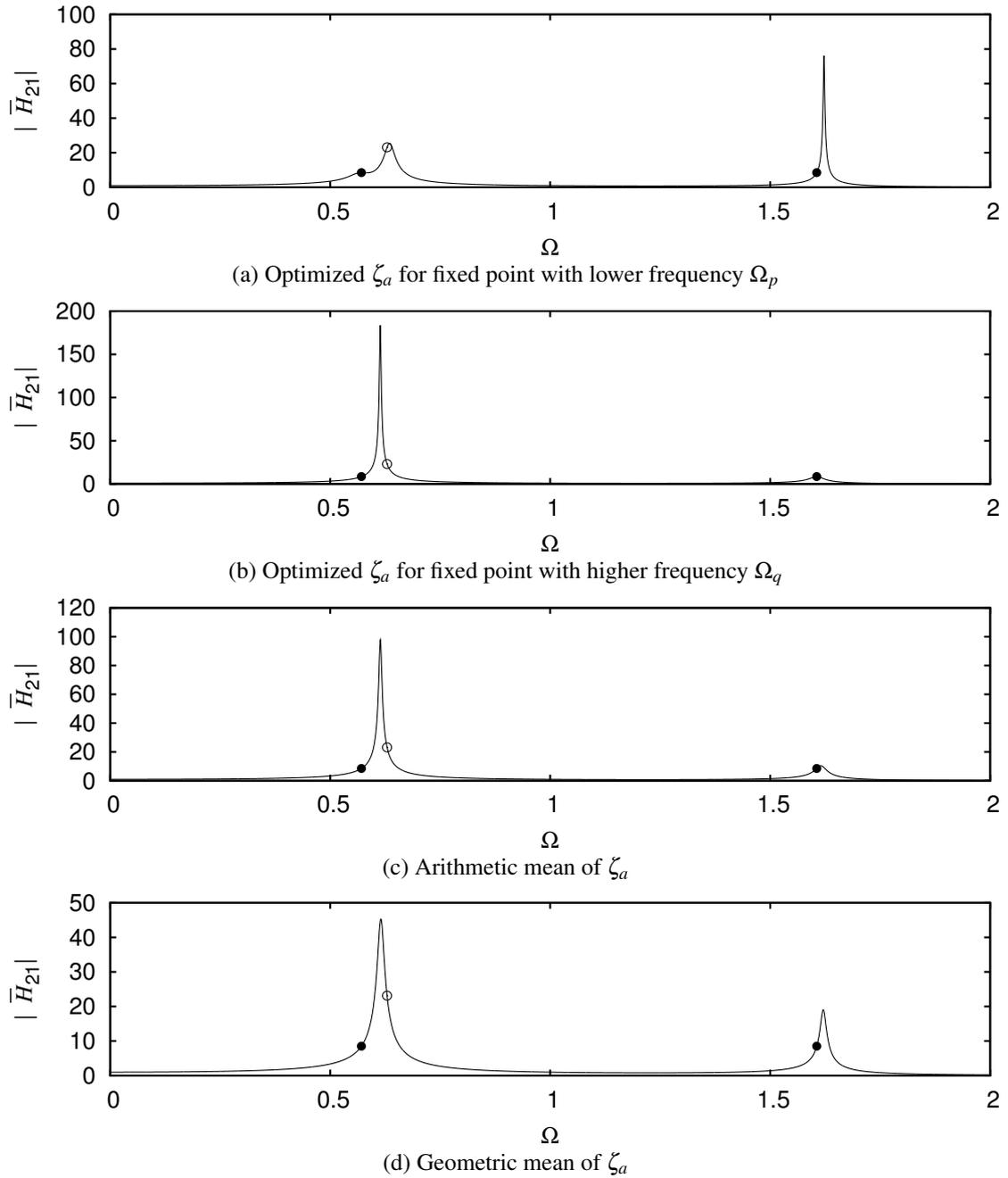


Fig. 4 Frequency response functions of x_2 for variously optimized ζ_a ($\mu = 0.05$)

[● : fixed points with equal amplitude, ○ : other fixed point]

Table 1 Optimized frequencies of fixed points, ratio of natural frequencies and damping coefficients for $\mu = 0.05$

	Ω_p	Ω_q	γ	optimized ζ_a			
				(a) Ω_p	(b) Ω_q	(c) AM	(d) GM
Fig. 3	0.6299	1.606	0.5864	0.08896	1.167	0.6277	0.3221
Fig. 4	0.5710	1.606	0.5842	0.06456	1.134	0.5994	0.2706

3.3.3 それぞれの定点に対する二つの最適減衰比の平均

前節で得られた式 (26), (30) の Ω に定点の角振動数 Ω_p, Ω_q を代入すれば最適減衰比が得られることとなる。しかし、式 (26), (30) では二つの定点に対応して二つの最適減衰比が得られるが、実際のモデルの図 2 では減衰は一つである。したがって、二つの定点に対応する最適減衰比について、何らかの平均をとる必要がある。そこで、本研究では相加平均と相乗平均を考える。

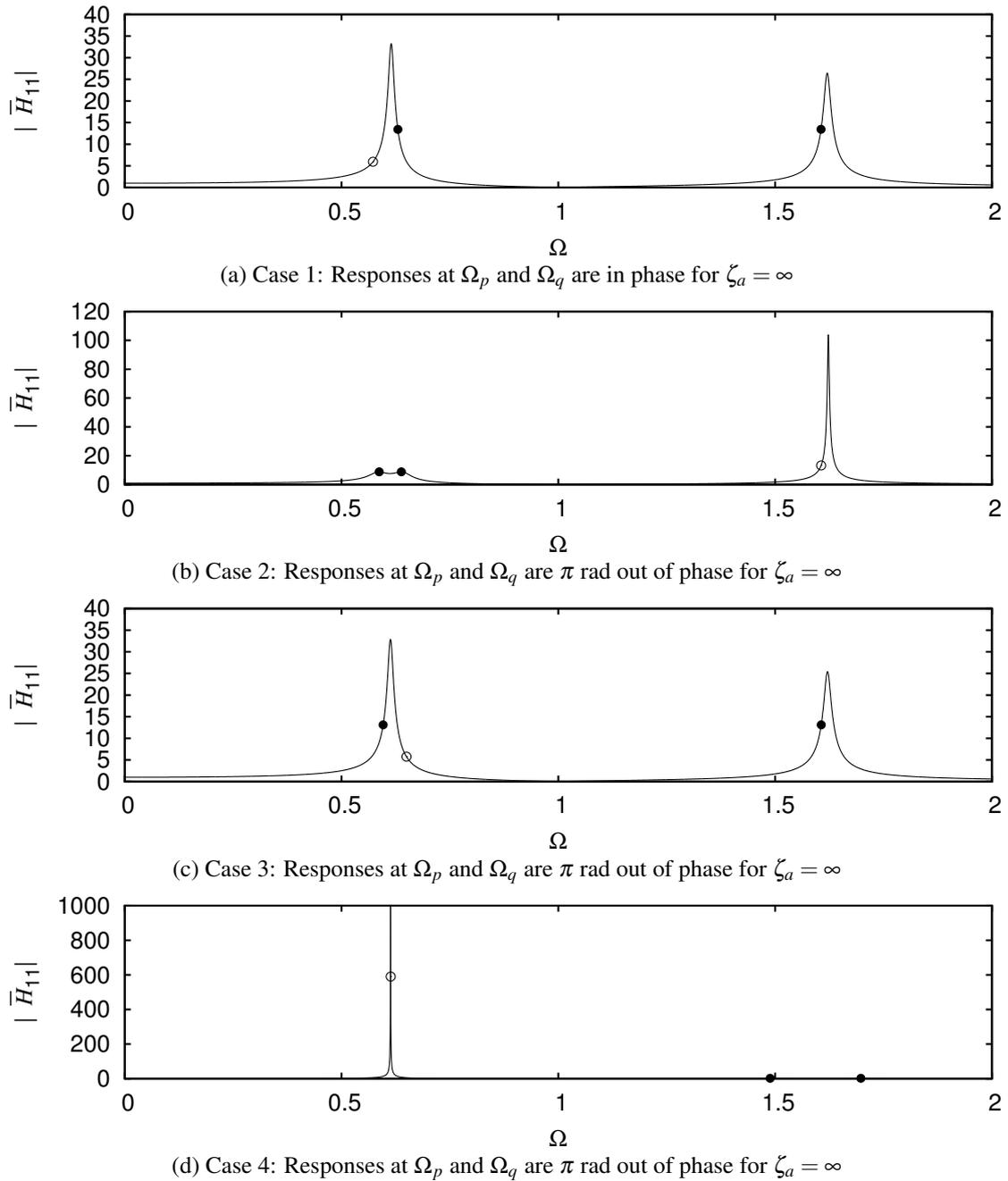


Fig. 5 Frequency response functions of x_1 by numerically solved $\gamma, \Omega_p, \Omega_q$ and geometric mean for ζ_a ($\mu = 0.05$)

[● : fixed points with equal amplitude, ○ : other fixed point]

動吸振器の質量比 $\mu = 0.05$ として, x_1 と x_2 に対する最適な動吸振器を付加した周波数応答関数を, それぞれ図 3, 4 に示す. 振幅の等しい定点の角振動数が $\Omega_p < \Omega_q$ であるとして, 各図における動吸振器の減衰比 ζ_a は, (a): Ω_p に対する ζ_a , (b): Ω_q に対する ζ_a , (c): 二つの ζ_a の相加平均, (d): 二つの ζ_a の相乗平均である. 各図において振幅の等しい定点 Ω_p, Ω_q を黒丸, 他の定点 Ω_o を白丸で示す. また, これらの図における各最適パラメータの値を表 1 にまとめる.

どちらの結果においても, (c) の相加平均は (b) の Ω_q に対する ζ_a の結果とほとんど変わらない結果となっていることが分かる. これは, Ω_p に対する ζ_a は 10^{-2} のオーダーであるのに対し, Ω_q に対する ζ_a は 1 を少し超える超過減衰であるということより, 両者の相加平均では Ω_p に対する ζ_a の影響がほとんど現われないということであると思われる. 一方, (d) の相乗平均はどちらの結果でも, 一次と二次の固有角振動数の両方のピークを同程度に抑えており, 二つのモードの同時制振がほぼ実現できていると考えられる.

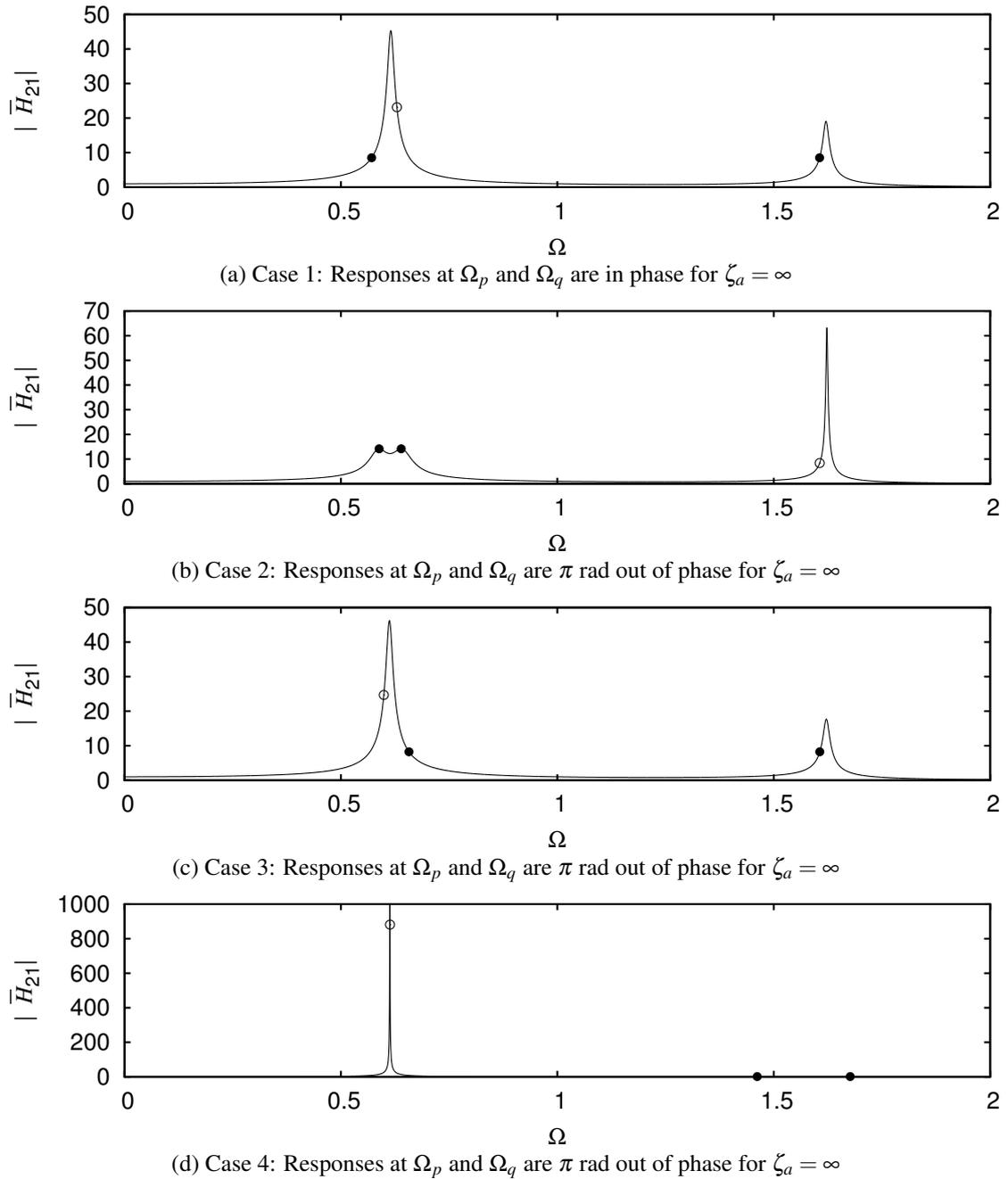


Fig. 6 Frequency response functions of x_2 by numerically solved $\gamma, \Omega_p, \Omega_q$ and geometric mean for ζ_a ($\mu = 0.05$)

[• : fixed points with equal amplitude, ○ : other fixed point]

4. 定点で周波数応答関数が逆位相となる場合の検討

前節の定点理論では、 $\zeta_a = \infty$ の場合に振幅の等しい二つの定点で応答が同位相となる場合のみに理論解が得られた。この振幅の等しい二つの定点で同位相となる場合の結果の汎用性を確認するため、本節では数値計算で定点の振幅を等しくする固有振動数比 γ を求めた結果を示す。

固有振動数比 γ を変化させながら、定点に関する代数方程式 (13) を解き、定点の振幅が等しくなる $\gamma, \Omega_p, \Omega_q$ を求めた結果、 $\zeta_a = \infty$ の場合に振幅の等しい二つの定点で応答が同位相となる場合が一組、逆位相となる場合が三組の計四組の数値解が得られた。その時の x_1, x_2 の周波数応答関数を、それぞれ図 5, 6 に示す。動吸振器の減衰比 ζ_a は、 $\gamma, \Omega_p, \Omega_q$ の数値解を式 (26), (30) に代入することで得られた値の相乗平均とした。各図において振幅の等しい定点 Ω_p, Ω_q を黒丸、他の定点 Ω_o を白丸で示す。

図 5, 6 の双方において、 $\zeta_a = \infty$ の場合に二つの定点で応答が同位相となる (a) は、解析的に求めた結果である

図 3(d), 4(d) と同じ結果である。数値計算でしか得られない結果が図 5, 6 の (b)-(d) であるが, そのうち図 (b), (d) はそれぞれ, 一次モードと二次モードのみの最適化であり, 緒言で述べたモード毎に定点理論を応用して動吸振器を設計した結果とほとんど同じであると思われる。従って, 本研究で対象としている二つのモードの同時最適化であり, 数値計算でしか求められない結果は図 5, 6 の (c) のみである。図 5, 6 のそれぞれにおいて, 図 (a), (c) を比較すると, 両者の周波数応答関数のピーク値や形状についてはほとんど差が無いと考えられる。そのため, 二つのモードの最適化を考える場合, 本研究で導出した $\zeta_a = \infty$ の場合に振幅の等しい二つの定点で応答が同位相となる場合の理論解のみで十分実用的であると考えられる。

5. 結 言

同一の質量と減衰を持つ無減衰の二自由度振動系に対して, 外力が加わる質量に動吸振器を一つ取り付けた場合について, 定点理論を検討した。本研究で得た知見を以下にまとめる。

- 動吸振器の減衰比 $\zeta_a = \infty$ の時に二つの定点における応答が同位相となる場合に対して, 定点の振幅を等しくする動吸振器の固有振動数比 γ と定点の角振動数 Ω_p, Ω_q の解析解が得られた。
- 定点の角振動数で周波数応答関数が極値を取る, 動吸振器の減衰比 ζ_a の解析解が得られた。
- 動吸振器の質量比 $\mu = 0.05$ に対する周波数応答関数を検討した結果, それぞれの定点で極値を取る減衰比二つの相乗平均が動吸振器としてほぼ最適である。
- 動吸振器の減衰比 $\zeta_a = \infty$ の時に振幅の等しい二つの定点で応答が逆位相となる場合に対する数値計算結果との比較より, 二つのモードの同時制振の観点では二つの定点の応答が同位相の場合と逆位相の場合で制振性能にほとんど差が無く, 同位相の場合の理論解のみで十分実用的である。

本研究では主系の二つの振動系が同一の場合のみを考えしたが, 今後, 主系の二つの振動系で質量や固有振動数が異なる場合を検討する予定である。

文 献

- (1) Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, 4th edition, (1956), McGraw-Hill, New York.
- (2) Asami, T., Nishihara, O., and Baz, A. M., "Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization", *Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124 (2002), pp. 284–295.
- (3) Asami, T. and Nishihara, O., "Closed-form exact solution to H_∞ optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems)", *Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 125 (2003), pp. 398–405.
- (4) 背戸一登, 動吸振器とその応用, (2010), コロナ社.
- (5) 田村晋司, 酒井孝真, "動吸振器を用いた 2 自由度系の振動抑制に関する研究", 日本機械学会講演論文集, Vol. 10, No. 8, (2010), p. 283.
- (6) 田中信雄, 振動制御, (2008), 養賢堂.