

Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers
 連続ウェーブレット変換を用いたDuffing系の不規則応答におけるジャンプ現象の解析
 (第2報, 複素ウェーブレット変換による解析)
 --Manuscript Draft--

受付番号:	TRANS-JSME-D-11-00731R2
標題:	連続ウェーブレット変換を用いたDuffing系の不規則応答におけるジャンプ現象の解析 (第2報, 複素ウェーブレット変換による解析)
論文種別:	一般論文
責任著者:	田村 晋司 タムラ シンジ 島根大学 松江市, 島根県 JAPAN
責任著者 (英語):	
責任著者の組織名:	島根大学
責任著者の組織名 (英語):	
筆頭著者:	田村 晋司 タムラ シンジ
筆頭著者 (英語):	
全著者:	田村 晋司 タムラ シンジ 舟越 良文 フナコシ ヨシフミ 加藤 佑斗 カトウ ユウト
全著者 (英語):	
抄録:	狭帯域不規則励振を受けるDuffing系は, 応答の標本関数において振幅が急激に変化する確率論的ジャンプ現象を生じることがある. この現象は, 調和励振におけるジャンプ現象と同様に応答振幅の大/小, 励振と応答の同位相/逆位相の2つの安定状態が存在することに対応する. 本研究では, 狭帯域不規則励振を受けるDuffing系の確率論的ジャンプ現象に対し, 励振と応答の複素ウェーブレット変換を用いて励振と応答の位相差を求め, 調和励振に対する周波数応答関数より応答の状態を判別する方法を提案する. 提案した指標と前報で示した指標を比較した結果, 両者とも同等に応答の状態を判別できることが分かった.

連続ウェーブレット変換を用いた Duffing 系の不規則応答における ジャンプ現象の解析*

(第2報, 複素ウェーブレット変換による解析)

田村 晋司*¹, 舟越 良文*², 加藤 佑斗*²

Analysis for Jump Phenomena in Random Response of a Duffing Oscillator Using Continuous Wavelet Transform (2nd Report, Analysis by Complex Wavelet Transform)

Shinji TAMURA*¹, Yoshifumi FUNAKOSHI and Yuto KATO

*¹ Department of Electronic and Control Systems Engineering,
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University
1060 Nishikawatsu-cho, Matsue-shi, Shimane 690-8504, Japan

Stochastic jump phenomena in the random responses of a Duffing oscillator subjected to narrow band excitation are investigated. The stochastic jump phenomena correspond to the existence of multiple stationary responses, which differ in phase to the excitation. In our previous paper, the product of each real wavelet of response and excitation is proposed as the phase of each frequency component. But taking the moving average of the product over one period is necessary because of pulsation. In this paper, the product of the complex wavelet transform of the response and the complex conjugate of that of the excitation is used to evaluate phase of each frequency component. The central value of unstable region of the phase in the frequency response function is used as the center of the range of the principal value of the complex argument, and the value and bounds of unstable region are taken as the threshold for phase obtained from the wavelet transforms. Using this range of principal value of complex argument and thresholds, two states of the response are successfully identified, as well as the previously proposed criterion using real wavelet transform.

Key Words : Duffing Oscillator, Random Vibration, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Narrow Band Excitation, Stochastic Jump Phenomena, Continuous Wavelet Transform

1. 緒 言

パワースペクトルにピークを有する狭帯域性の不規則励振力が Duffing 系などの剛性非線形系に作用した場合、応答の標本関数において、振幅が時間的に急激に変化し、しかも大振幅と小振幅の状態間の推移がランダムに発生する、確率論的ジャンプ現象が生じることが知られている⁽¹⁾。このような場合には、等価線形化法で得られる RMS 応答が多価となることが報告され、これらの値は大振幅時、小振幅時の局所 RMS 応答と全体の RMS 応答に対応すると推測されてきた⁽¹⁾。しかし、この推測の妥当性を検証するためには、応答の標本関数において大振幅と小振幅の2つの状態を合理的に分類する指標が必要になる。また、信頼性解析の立場からは、各状態をとる確率、および各状態の安定性の尺度である継続時間が重要となる。

しかし、不規則励振の帯域幅が広くなるにつれて、大振幅と小振幅状態で取り得る振幅の範囲が広がり、状態間の区別が不明瞭となる性質を持つ。そのため、標本関数の振幅に着目して各状態を区別した従来の研究では、励振が振幅変調を受けた正弦波状となる帯域幅が狭い励振に関する研究^{(1)~(4)}が多く、帯域幅が広い場合については

* 原稿受付 平成 23 年 9 月 2 日

*¹ 正員, 島根大学 総合理工学部 電子制御システム工学科 (〒 690-8504 島根県松江市西川津町 1060)

*² 学生員, 島根大学 大学院 総合理工学研究科 電子制御システム工学専攻

Email: stamura@ecs.shimane-u.ac.jp

あまり研究が行われていない。

多重尺度法⁽⁵⁾などの解析的方法を用いて Duffing 系の周波数応答関数を導出すると、例えばハードスプリング特性を持つ場合には、大振幅と小振幅の各状態がそれぞれ、励振と応答の位相差が同位相と逆位相の各状態に対応することが示される。そこで、この性質に着目して、著者らは励振と応答のウェーブレット変換の積を取ることにより振動数毎に励振と応答の位相差を求める指標を提案し、励振の帯域幅が広い場合でも応答の各状態を分類できることを示し⁽⁶⁾、この指標を利用して確率的ジャンプ現象の統計量を調べた⁽⁷⁾。

一方、これまでに著者らが行なった研究では励振と応答の実ウェーブレット変換結果から、励振と応答の位相差を計算する方法を用いていた。しかし、Morlet のマザーウェーブレット関数は複素関数であるので、変換結果は複素数となる。そこで、本研究では複素ウェーブレット変換を利用して励振と応答の位相差を求め、以前の方法により得られた位相差との比較を行なう。

2. 基礎方程式

次式の一自由度 Duffing 系の運動方程式を考える。

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon x^3) = f(t) \quad (1)$$

不規則励振力 $f(t)$ は、平均値 0、自己相関関数 $R(v)$ のガウス性定常非白色雑音とし、 $R(v)$ は以下の指数減衰調和関数を考える。

$$R(v) = R_0 e^{-\alpha|v|} \cos \rho v \quad (2)$$

励振の帯域幅および卓越角振動数を表す無次元パラメータ Q, Ω を、対応する線形系 ($\varepsilon = 0$) の周波数応答関数のピークの鋭さを表す $\zeta\omega_0$ および、減衰固有角振動数 $\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ に対する比として、以下のように導入する。

$$Q = \frac{\alpha}{\zeta\omega_0} \quad (3)$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4)$$

本研究では、 $Q \leq 1.0$ という狭帯域性の不規則励振を考える。

励振力の自己相関関数 (2) よりパワースペクトル密度関数を求めると次式となる。

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(v) e^{-i\omega v} dv = \frac{2R_0\alpha(\alpha^2 + \rho^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \rho^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (5)$$

i は虚数単位である。本研究では、このパワースペクトル密度 (5) に文献⁽⁸⁾の手法を適用して励振の標本関数を作成し、Runge-Kutta-Fehlberg 法により式 (1) を数値解析して、応答の標本関数を作成した。これらの計算において、時間刻みは $\Delta t = 0.05$ と設定した。

以下の計算では、系のパラメータ、および励振の強さを表す R_0 を

$$\zeta = 0.05, \quad \omega_0 = 1.0, \quad \varepsilon = 0.1 \quad R_0 = 1.0, \quad \Omega = 1.5$$

と固定し、ハードスプリング特性の場合を考える。励振の帯域幅 Q は、0.1 と 1.0 の 2 種類の値を考える。

3. 確定論におけるジャンプ現象

ここで、運動方程式 (1) において、励振 $f(t)$ を

$$f(t) = \varepsilon F \cos \omega t \quad (6)$$

とし、各パラメータを

$$\zeta\omega_0 = \varepsilon\mu, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$$

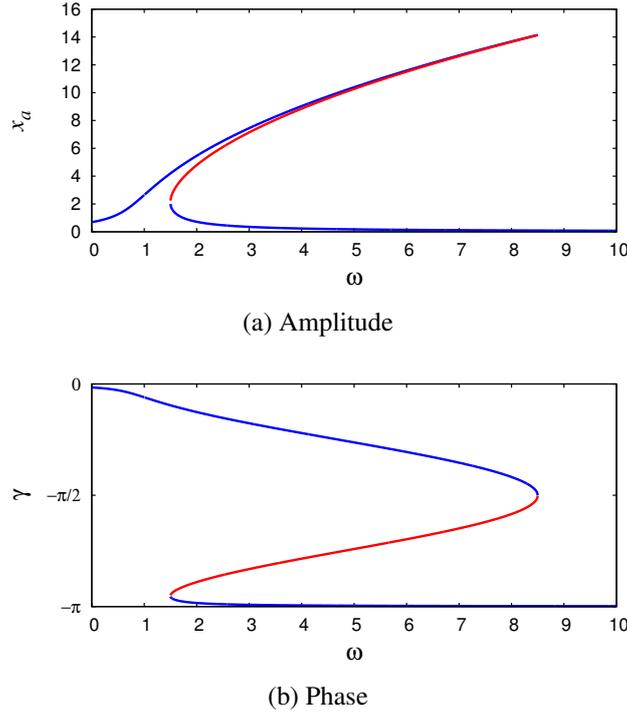


Fig. 1 Frequency response function for harmonic excitation
(— : stable, — : unstable)

とにおいて，共振点近傍で多重尺度法を適用する⁽⁵⁾と，離調度 σ と定常応答振幅 x_a ，励振と応答の位相差 γ について，以下の関係式が得られる．

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\omega_0 x_a^2}{8} \right)^2 \right] x_a^2 = \frac{F^2}{4\omega_0^2} \quad (7)$$

$$\gamma = \arctan \left(\frac{8\mu}{8\sigma - 3\omega_0 x_a^2} \right) \quad (8)$$

式 (7), (8) を解くと離調度 σ と定常応答振幅 x_a ，および励振と応答の位相差 γ の関係が得られる． $\zeta = 0.05$ ， $\omega_0 = 1.0$ ， $\varepsilon = 0.1$ ， $\varepsilon F = \sqrt{2}$ に対して，離調度 σ をさらに励振の角振動数 ω に変換して横軸とした時の定常応答振幅 x_a ，および励振と応答の位相差 γ の変化をそれぞれ，図 1(a), (b) に示す．それぞれ，青の実線は安定解，赤の実線は不安定解である．計算に用いたパラメータでは $\varepsilon > 0$ なのでハードスプリング特性を示しており，励振の角振動数 ω が 1.5 付近で，図 1(a) の定常応答振幅と同様に，図 1(b) に示す励振と応答の位相差も多価となっている．また，この周波数応答関数が多価となる領域で，図 1(a) における大振幅が図 1(b) では励振と応答が同位相，図 1(a) における小振幅が図 1(b) において逆位相に対応している．

4. ウェーブレット変換を用いたジャンプ現象の解析

4.1 連続ウェーブレット変換

関数 $x(t)$ に対して，マザーウェーブレット $\psi(t)$ による連続ウェーブレット変換は次式で定義される．

$$\tilde{c}_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{u-b}{a} \right) x(u) du \quad (9)$$

* は複素共役を表す．パラメータ a と b はそれぞれ，スケールパラメータとシフトパラメータである．

式 (9) は関数 $\psi^*(\cdot)$ と関数 $x(\cdot)$ の畳み込み積分に類似した式であるので，文献⁽⁷⁾⁽⁹⁾より次式の逆フーリエ変換で式 (9) の演算を行う．

$$\tilde{c}_x(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{a} \Psi^*(a\omega) X(\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (10)$$

また、パラメータ a, b の物理的意味より、本研究では $T > 0$ として以下のように a, b の変数変換を行う⁽⁷⁾。

$$c_x(T, t) = \tilde{c}_x\left(\frac{\Omega_\psi T}{2\pi}, t\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\Omega_\psi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left\{\frac{2\pi(u-t)}{\Omega_\psi T}\right\} x(u) du \quad (11)$$

Ω_ψ はマザーウェーブレット $\psi(t)$ の卓越角振動数である。式 (11) の変数変換を行うことで、 $c_x(T, t)$ の値は時刻 t における周期 T の成分を示すこととなる。

本研究で用いる Morlet マザーウェーブレットとそのフーリエ変換は次式で与えられ、これらの式から分かるようにその卓越角振動数は $\Omega_\psi = 5$ である。

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + 5it\right) \quad (12)$$

$$\Psi(\omega) = \sqrt{2\pi}^{1/4} \exp\left\{-\frac{(\omega-5)^2}{2}\right\} \quad (13)$$

4.2 複素ウェーブレット変換を用いた励振と応答の位相差の解析

著者らは以前の研究⁽⁶⁾⁽⁷⁾において、振動数毎の励振と応答の位相差を表す指標として、次式で表す励振と応答の実ウェーブレット変換結果 $c_f(T, t)$, $c_x(T, t)$ の積を提案した。

$$c_{fx}(T, t) = \text{Re}\{c_f(T, t)\} \cdot \text{Re}\{c_x(T, t)\} \quad (14)$$

この $c_{fx}(T, t)$ は、時刻 t における周期 T の成分に対して、励振と応答が同位相であれば 0 から正の値で振動し、逆位相であれば 0 から負の値で振動するという指標であり、その変動の正負で位相差の判別が可能である。また、励振と応答の着目している成分が小さいときは 0 に近く、着目成分が大きいときは 0 からの変動が大きくなるという性質を持っており、大きい振幅を持つ成分が特定しやすいという利点がある。その一方、これを利用して確率論的ジャンプ現象の統計量を求めようとするとき、着目する周期成分における指標の振動を移動平均によって平滑化する必要があった⁽⁷⁾。

そこで、本研究では励振と応答の複素ウェーブレット変換 $c_f(T, t)$, $c_x(T, t)$ の積の偏角として以下の指標 $\phi_{fx}(T, t)$ を提案する。

$$\phi_{fx}(T, t) = \arg\{c_f^*(T, t) \cdot c_x(T, t)\} \quad (15)$$

式 (15) は次式のように変形できるので、

$$\phi_{fx}(T, t) = \arg\{c_f^*(T, t) \cdot c_x(T, t)\} = \arg\left\{|c_f(T, t)|^2 \frac{c_x(T, t)}{c_f(T, t)}\right\} = \arg\left\{\frac{c_x(T, t)}{c_f(T, t)}\right\} \quad (16)$$

この $\phi_{fx}(T, t)$ は着目周期 T における励振と応答の位相差を表すこととなる。しかし、位相差としてよく用いられる商 $c_x(T, t)/c_f(T, t)$ とは異なり、式 (15) の $\phi_{fx}(T, t)$ は、従来の指標 (14) と同様に励振と応答の着目している成分が小さいときは 0 付近の値となる指標である。また、非線形系に特徴的な振動である高調波共振、分数調波共振などがあったとしても、0 による除算が発生しない。

帯域幅 $Q = 0.1$ の場合における励振と応答の標本関数に対して、式 (15) で定義される $\phi_{fx}(T, t)$ と従来の研究における指標 $c_{fx}(T, t)$ を比較した結果を図 2 に示す。図 2(a), (b), (c) はそれぞれ、応答の標本関数、式 (15) の指標、従来の指標である。図 2 のウェーブレット変換結果 (b), (c) では、横軸と縦軸がそれぞれ時刻と着目周期であり、緑が 0 付近の値、赤と青がそれぞれ正と負の値を表している。また、図 2 のウェーブレット変換結果 (b), (c) 中の黒の実線は、狭帯域励振の卓越周期を表す。

図 2(a) より、 $t = 180$ と $t = 350$ 付近で振幅が急激に減少してまた増大する確率論的ジャンプ現象が発生していることが分かる。図 2(b) の卓越周期の成分に着目すると、指標 (15) が上記のジャンプに対応して、同位相を表す緑から逆位相を表す赤と青に変化してまた同位相の緑に戻るという変化をしていることが分かる。よって、図 2(a) における振幅と同様に、図 2(b) の位相差で応答の状態の判別が可能であることが示された。

一方、振幅による判別では小振幅と大振幅を分けるための閾値を設定しなければならず、また、励振を大きくすると一般に 2 つの状態の振幅が大きくなるため、その基準の設定方法が問題となるが、位相差による判別では

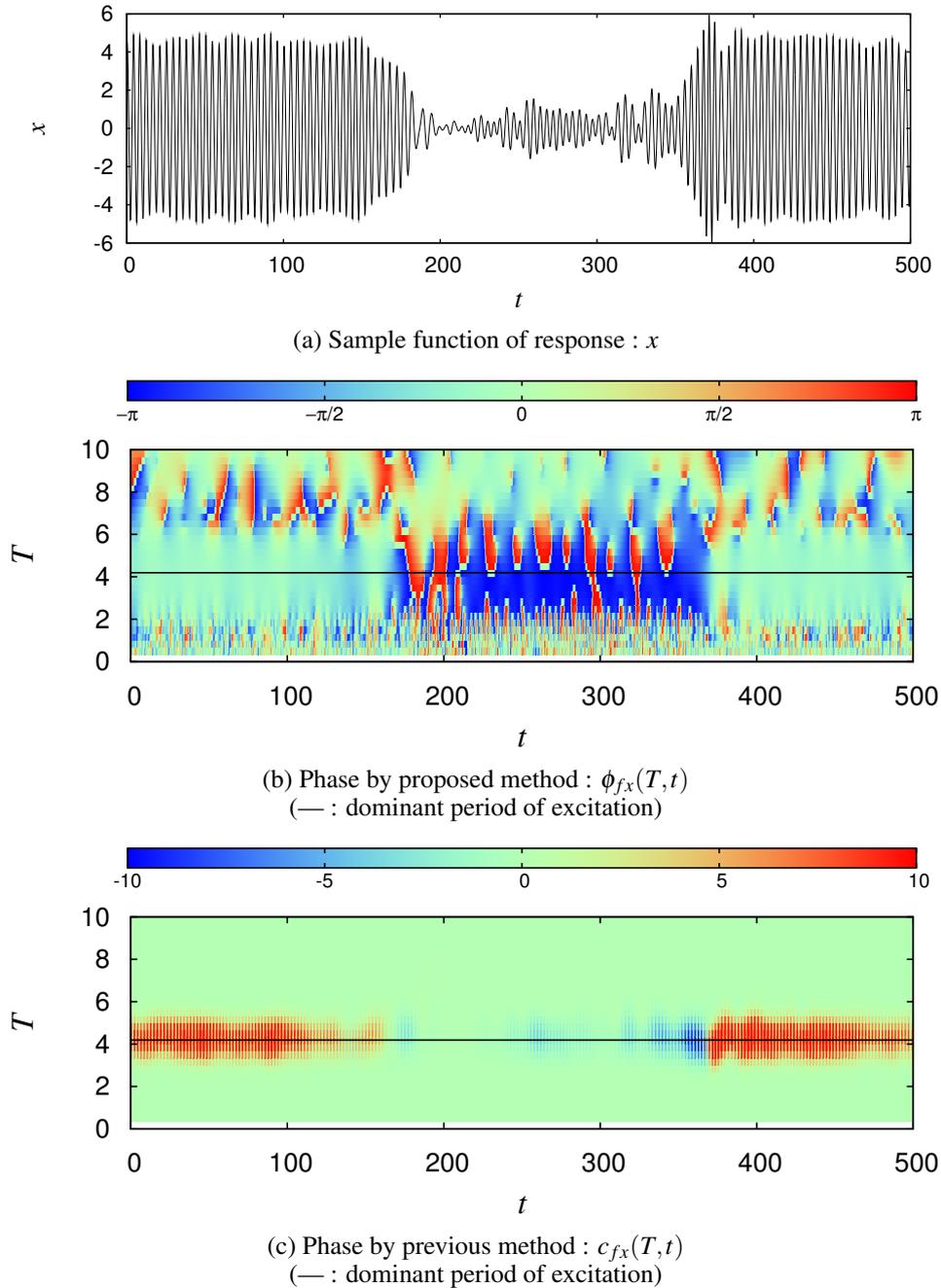


Fig. 2 Samples function and phases by wavelet transforms ($Q = 0.1$)

次節で述べるように近似周波数応答関数から逆位相と同位相を判別する閾値を設定できる利点がある．そのため，閾値の設定という視点からは，応答の位相差で判別の方が望ましいと考えられる．

また，提案する指標の図 2(b) と従来の指標の図 2(c) の比較より，どちらの位相差も同等に応答の状態を判別できていることが分かる．しかし，従来の指標では単なる積であるため応答振幅が大きい時には値が大きくなることと，図 2(c) で縞模様として表れているように 0 と正または負の値を繰り返す振動があるため，偏角で位相差を求めた式 (15) の指標の方が優れていると思われる．

4.3 応答の状態の判別に対する位相差の導入

前節において，確率論的ジャンプ現象における応答の状態を判別するためには，式 (15) の指標 $\phi_{fx}(T, t)$ が望ましいことが分かった．本節では，励振の卓越周期における $\phi_{fx}(T, t)$ の値に閾値を導入して，応答の状態を判別することを考える．

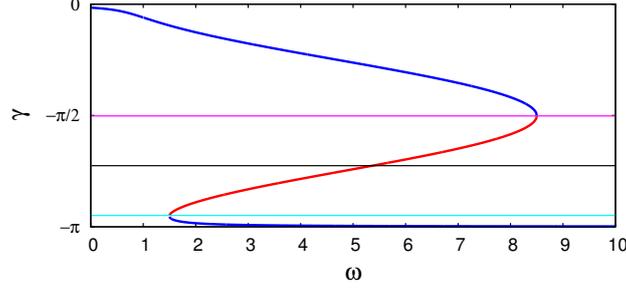


Fig. 3 Stationary phase for harmonic excitation and thresholds

(— : stable response, — : unstable response, — : threshold γ_u , — : threshold γ_0 , — : threshold γ_l)

まず、複素ウェーブレット変換における励振と応答の位相差 (15) において励振の卓越周期 $2\pi/\rho$ に着目し、 $\Phi_{fx}(t)$ とおく。

$$\Phi_{fx}(t) = \phi_{fx}\left(\frac{2\pi}{\rho}, t\right) \quad (17)$$

また、位相差の閾値として、先ほどの調和励振に対する周波数応答関数の位相差の図 1(b) の不安定解の存在する領域が適切であると考え、その位相差 γ の不安定解の領域の上限と下限をそれぞれ γ_u, γ_l とおいて、 γ_u, γ_l の平均値を γ_0 と設定する。図 1(b) に $\gamma_u, \gamma_l, \gamma_0$ をそれぞれピンク、水色、黒の実線で加えた図を図 3 に示す。

先ほどの図 2(a)、および式 (17) の $\Phi_{fx}(t)$ と閾値 $\gamma_u, \gamma_l, \gamma_0$ をそれぞれ、図 4(a), (b) に示す。図 2(b) において逆位相を表す部分が π と $-\pi$ の 2 つの値をとっていることより、図 4(b) では偏角の主値として、

1. $\Phi_{fx}(t) \in [-\pi, \pi]$
2. $\Phi_{fx}(t) \in [-2\pi, 0]$
3. $\Phi_{fx}(t) \in [\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$

の 3 種類を考え、それぞれ緑、青、赤の実線で示す。また、 $\gamma_u, \gamma_l, \gamma_0$ をそれぞれピンク、水色、黒の実線で示す。

図 4(b) より、偏角の主値を $[-\pi, \pi]$ や $[-2\pi, 0]$ に取ると、折り返しのために主値の上限と下限を往復していることが分かる。このような閾値の横断はジャンプの誤判定につながる事となる。一方、主値が $[\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$ の場合では、折り返しが起こっていないことが分かる。よって、偏角の主値を $[\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$ とするのが望ましいと言える。

次に、主値を $[\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$ とした励振と応答の位相差 $\Phi_{fx}(t)$ に対して、単位ステップ関数 $U(\cdot)$ を用いて次式のように応答の 2 値化を行う。

$$\xi_u(t) = U\{\Phi_{fx}(t) - \gamma_u\} \quad (18)$$

$$\xi_0(t) = U\{\Phi_{fx}(t) - \gamma_0\} \quad (19)$$

$$\xi_l(t) = U\{\Phi_{fx}(t) - \gamma_l\} \quad (20)$$

式 (18)–(20) によって 2 値化された $\xi_u(t), \xi_0(t), \xi_l(t)$ をそれぞれ、図 4(c)–(e) に示す。図 4(a) の応答の状態が、励振と応答の位相差により図 4(c)–(e) のように 1 と 0 に判別できていることが分かる。ただし、 γ_u と γ_0 による判別では、ジャンプの起きた時間が多少異なるもののジャンプの回数は同じであるが、 γ_l による判別では、図 4(a), (b) の小振幅・逆位相の領域での振幅のゆらぎをジャンプと誤判定しており、ジャンプの回数を多く判定していることが分かる。そのため、帯域幅 $Q = 0.1$ の結果からは γ_u, γ_0 による応答の判別が望ましいと結論づけられる。

励振の帯域幅を $Q = 1.0$ とした場合の結果を図 5 に示す。各図 (a)–(e) は図 4 と同様である。図 5(b) より、 $Q = 1.0$ の場合でも $Q = 0.1$ と同様に、位相差の偏角の主値を $[\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$ とするのが望ましいと言える。ただし、 $t = 210$ 付近と $t = 470$ 付近に見られる位相の反転については主値の範囲の設定で対応できないので、今後検討を行なう予定である。一方、図 5(c)–(e) から、 $Q = 0.1$ の場合とは異なり、 $Q = 1.0$ では γ_u と γ_0 による判別でジャンプの回数が等しくなっていないことが分かる。図 5(c)–(e) におけるジャンプの回数を表 1 にまとめる。表 1 より、閾値が 0 に近づくにつれてジャンプと判定された回数が減少していることが分かる。この帯域幅では閾値の値によってジャンプの回数が増えるので、今後、閾値を合理的に決定する基準を検討する必要があると考えられる。

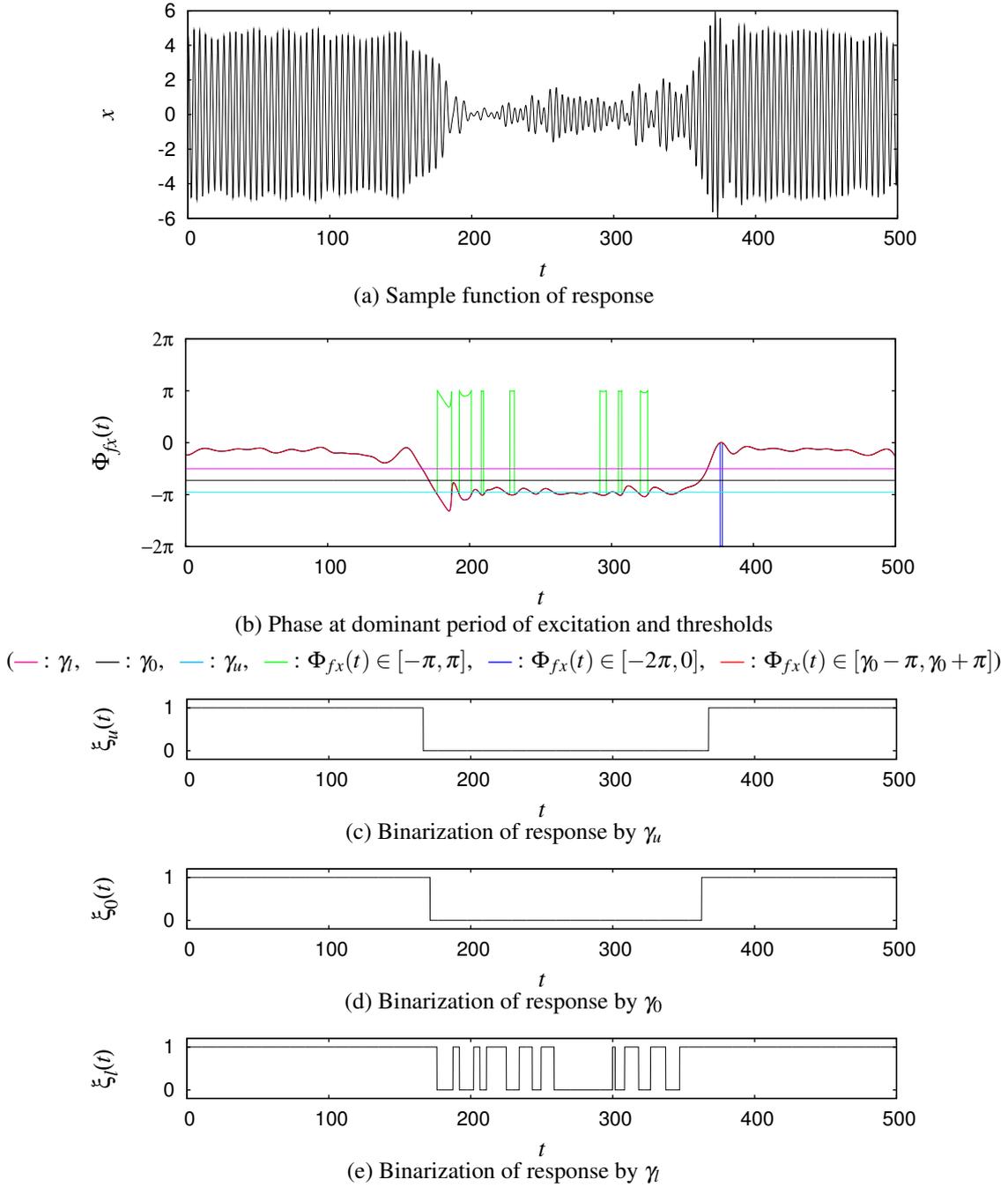
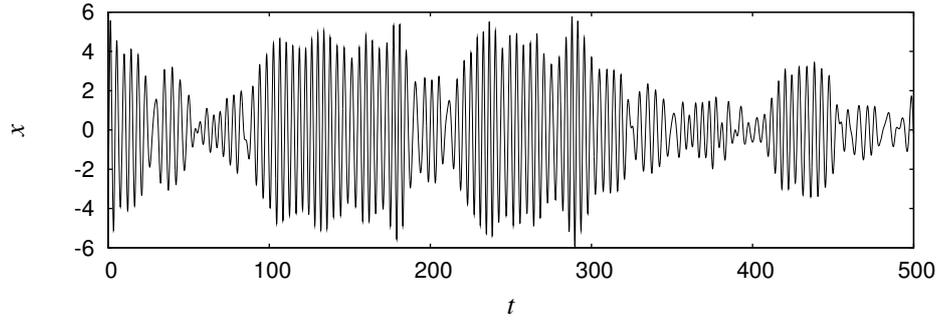


Fig. 4 Phases by wavelet transforms and binarizations of response ($Q = 0.1$)

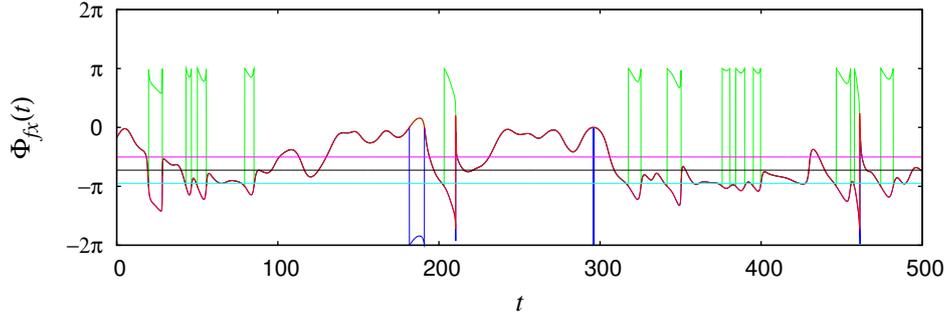
5. 結 論

狭帯域不規則励振を受ける Duffing 系の確率論的ジャンプ現象に対し、複素ウェーブレット変換を適用して、励振のウェーブレット変換の共役と応答のウェーブレット変換の積の偏角から励振と応答の位相差を求め、応答の状態を判別する指標を提案した。励振と応答の標本関数を作成して応答の状態の判別を行い、以下の知見を得た。

- 提案した複素ウェーブレット変換による指標は、前報の実ウェーブレット変換による指標と同等に応答の状態を判別することが可能である。一方、前報の指標とは異なり、今回提案した指標は 0 と正または負の値を繰り返す振動がないという利点を持つ。
- 周波数応答関数の位相差の不安定領域の中心の値 γ_0 を用いて、着目時間における励振と応答の位相差の主値を $[\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$ とすることにより、折り返しが少ない位相差が得られる。
- 主値を $[\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$ とした位相差に閾値を適用することにより、応答の大振幅・同位相状態と小振幅・逆位

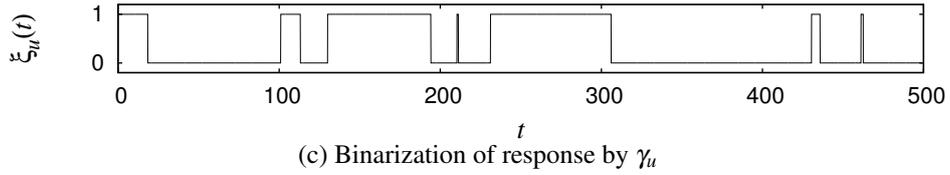


(a) Sample function of response

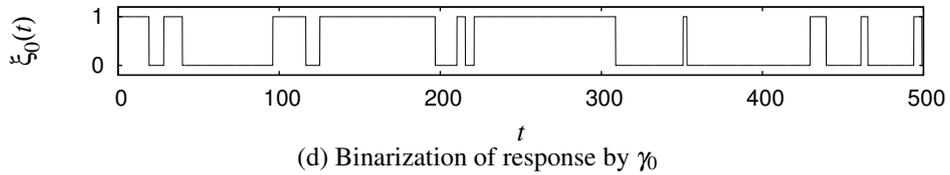


(b) Phase at dominant period of excitation and thresholds

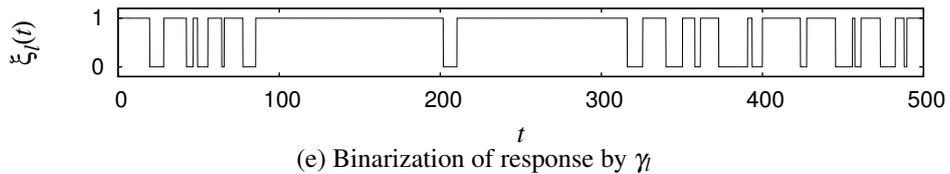
(— : γ_l , — : γ_0 , — : γ_u , — : $\Phi_{fx}(t) \in [-\pi, \pi]$, — : $\Phi_{fx}(t) \in [-2\pi, 0]$, — : $\Phi_{fx}(t) \in [\gamma_0 - \pi, \gamma_0 + \pi]$)



(c) Binarization of response by γ_u



(d) Binarization of response by γ_0



(e) Binarization of response by γ_l

Fig. 5 Phases by wavelet transforms and binarizations of response ($Q = 1.0$)

Table 1 Number of jump phenomena ($Q = 1.0$)

Threshold	γ_u	γ_0	γ_l
Number of jump phenomena	13	19	32

相状態が判別できる。

- 今回の計算において、帯域幅が狭い場合には閾値に γ_0 と不安定領域の上限を用いた時のジャンプの回数は同じであったが、帯域幅が広い場合には閾値を大きくするにつれてジャンプの回数が減少する結果が得られた。

文 献

- (1) Roberts, J. B., "Multiple solutions generated by statistical linearization and their physical significance", *International*

Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 26, No. 6 (1991), pp. 945–959.

- (2) Fang, T. and Dowell, E. H., "Numerical simulations of jump phenomena in stable Duffing systems", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 22, No. 3 (1987), pp. 267–274.
- (3) Huang, Z. L., Zhu, W. Q., Ni, Y. Q., and Ko, J. M., "Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators under bounded noise excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 2 (2002), pp. 245–267.
- (4) Roberts, J. B. and Spanos, P. D., *Random Vibration and Statistical Linearization*, (1990), John Wiley & Sons, Chichester, England.
- (5) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), John Wiley & Sons, New York.
- (6) 田村晋司, 土屋博徳, 木村康治, "連続ウェーブレット変換を用いた Duffing 系の不規則応答におけるジャンプ現象の解析", 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 73, No. 728 (2007), pp. 1029–1036.
- (7) 田村晋司, 鈴木康弘, 木村康治, "狭帯域不規則励振を受ける Duffing 系の確率論的ジャンプ現象の各種統計量", 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 75, No. 754 (2009), pp. 1560–1567.
- (8) 日本機械学会 (編), *機械工学便覧 基礎編 $\alpha 2$ 機械力学*, (2004), 第 11 章, 日本機械学会.
- (9) Perrier, V., Philopovitch, T., and Basdevant, C., "Wavelet spectra compared to Fourier spectra", *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 36, No. 3 (1995), pp. 1506–1519.