スペクトル理論による不規則振動の解析

田村 晋司

「機械の研究」 第62巻 第8号 別刷

2010年8月1日 発行

スペクトル理論による不規則振動の解析

田村 晋司*

1. はじめに

振動試験における周波数応答関数の推定や，時系列データの周波数分析など，フーリエ変換をベースとしたスペクトル理論は様々な領域に用いられている．

本稿の前半ではスペクトル理論，確率過程論およびスペクトル理論を用いた線形系の不規則振動の解析手法を概説する．また後半では，線形系に対して不規則振動応答のモンテカルロシミュレーションを行い，スペクトル理論を用いた解析の有用性を示すとともに，応答の特性がスペクトルあるいは確率密度単独では，完全に表現されるとは限らないことを述べる．

2. フーリエ変換とスペクトル解析

2.1 パワースペクトル密度と自己相関関数

信号$x(t)$のフーリエ変換およびフーリエ逆変換は，虚数単位iを用いて次式で定義される．

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\,e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

なお，不規則振動論では式（1），（2）とは逆にフーリエ変換の方に$1/(2\pi)$の係数が付き，逆フーリエ変換には係数を付けないフーリエ変換/逆変換の定義が使われることが多いが，本稿では一般的な定義である上記の式（1），（2）の定義を用いる．

フーリエ変換結果において，$X(\omega)$は複素数であり，その絶対値$|X(\omega)|$は角周波数ωの成分の強さを表し，偏角$\arg X(\omega)$はその角周波数ωにおける位相角を表す．この位相角は，逆フーリエ変換で元の信号$x(t)$に戻すためには欠かせない量である．しかし，通常の工学上の問題においては以下の量に着目する場合が多い．

・対象としている角周波数における成分の強さ
・単位時間当たりの物理量（密度）

これらのことより，以下の式で定義されるパワースペクトル密度$S_X(\omega)$がよく用いられる．

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\right|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{X_T^*(\omega)\,X_T(\omega)}{T} \tag{3}$$

ここで，$*$は複素共役を表す記号であり，$X_T(\omega)$は次式で定義される量である．

$$X_T(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$X(\omega)=\lim_{T\to\infty}X_T(\omega) \tag{5}$$

ここで，$x(t)*y(t)$を$x(t)$と$y(t)$の畳み込み積分を表すとすると，フーリエ変換には以下の性質が成り立つので，

$$F[x(-t)]=X^*(\omega) \tag{6}$$

$$F[x(t)*y(t)]=X(\omega)\,Y(\omega) \tag{7}$$

パワースペクトル密度$S_X(\omega)$は，以下の量のフーリエ変換であることがわかる．

$$S_X(\omega)=F\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(\tau-t)\,x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \tag{8}$$

式（8）の右辺の

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(\tau-t)\,x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

は，$x(\tau)$と時間差tだけ離れた$x(\tau-t)$の相関の

* 島根大学 総合理工学部
電子制御システム工学科 講師
(Shinji Tamura)

0368-5713/10/¥500/1論文/JCOPY

強さを表す物理量である．$T\to\infty$ の極限の任意性より，以下の自己相関関数 $R_X(\nu)$ を定義する．

$$R_X(\nu)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2-\nu}^{T/2-\nu}x(\tau)x(\tau+\nu)\,\mathrm{d}\tau$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(\tau)x(\tau+\nu)\,\mathrm{d}\tau \quad (9)$$

これらのように定義されたパワースペクトル密度 $S_X(\omega)$ と自己相関関数 $R_X(\nu)$ は，以下のフーリエ変換/逆変換の関係を持つ．

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\nu)\,e^{-i\omega\nu}\,\mathrm{d}\nu \quad (10)$$

$$R_X(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,e^{i\omega\nu}\,\mathrm{d}\omega \quad (11)$$

式(10),(11)は，ウィーナー・キンチンの関係と呼ばれる．

また，式(9),(11)に $\nu=0$ を代入すると，次式のパーシバルの定理が得られる．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,\mathrm{d}\omega=R_X(0)$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad (12)$$

つまり，パワースペクトル密度 $S_X(\omega)$ は，元の信号 $x(t)$ の二乗平均値 $R_X(0)$ に対する角周波数 ω の成分の寄与率を表す量となる．

2.2 クロススペクトル密度と相互相関関数

前節のパワースペクトル密度と自己相関関数と同様に，二つの信号 $x(t)$, $y(t)$ に対して以下のように，クロススペクトル密度 $S_{XY}(\omega)$ と相互相関関数 $R_{XY}(\nu)$ が定義される．

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{X_T^*(\omega)\,Y_T(\omega)}{T} \quad (13)$$

$$R_{XY}(\nu)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(\tau)y(\tau+\nu)\,\mathrm{d}\tau \quad (14)$$

これらのクロススペクトル密度 $S_{XY}(\omega)$ と相互相関関数 $R_{XY}(\nu)$ には同様にウィーナー・キンチンの関係が成り立ち，フーリエ変換／逆変換の関係となる．

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\nu)\,e^{-i\omega\nu}\,\mathrm{d}\nu \quad (15)$$

$$R_{XY}(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XY}(\omega)\,e^{i\omega\nu}\,\mathrm{d}\omega \quad (16)$$

3．離散データのスペクトル解析

実際にスペクトル解析が適用される場合の多くは，実験データに代表される離散データである．

離散データを取り扱う場合，前章で述べた連続関数のスペクトル解析とは異なる部分があるので簡単に述べる．

3.1 離散フーリエ変換

離散データ

$$x_j=x(t_j)=x(j\Delta t),\quad j\in[0,N-1] \quad (17)$$

に対しては，以下のように成分 X も角周波数 ω_k で離散的となり，

$$X_k=X(\omega_k)=X(k\Delta\omega),\quad k\in[0,N-1] \quad (18)$$

角周波数の刻み幅 $\Delta\omega$ は，データ長 $T=N\Delta t$ により以下のように決定される．

$$\Delta\omega=\frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (19)$$

式(17)～(19)の離散データの性質を考慮して，連続関数におけるフーリエ変換(1)と逆フーリエ変換(2)の積分を総和に変換した離散フーリエ変換と逆変換は次式となる．

$$X_k=\sum_{j=0}^{N-1}x_j\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right)\Delta t$$
$$=\Delta t\cdot\sum_{j=0}^{N-1}x_j\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right) \quad (20)$$

$$x_j=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}X_k\exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right)\Delta\omega$$
$$=\frac{1}{\Delta t}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_k\exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right) \quad (21)$$

ここで，式(20),(21)において $k,j\notin[0,N-1]$ となる k,j を代入した場合，以下の式が成り立つことより

$$\exp\left\{-\frac{2\pi ij(k\pm N)}{N}\right\}$$
$$=\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\mp 2\pi ij\right)=\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right)$$

$$\exp\left\{-\frac{2\pi i(j\pm N)k}{N}\right\}$$
$$=\exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\pm 2\pi ik\right)=\exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right)$$

離散フーリエ変換では $j,k\in[0,N-1]$ の部分が

繰り返される信号と解釈される．

また，数値計算ライブラリなどで計算される離散フーリエ変換である高速フーリエ変換では，通常，以下の計算を行っている．

$$Y_k=\sum_{j=0}^{N-1} y_j \exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right) \tag{22}$$

$$y_j=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y_k \exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right) \tag{23}$$

つまり，高速フーリエ変換を離散データに適用するためには，式(20),(21)中に示される Δt の因子が必要である．

3.2 スペクトル密度と相関関数

離散データに関するパワースペクトル密度 $S_X(\omega_k)$ と自己相関関数 $R_X(t_j)$ は，式(3),(9)より以下のように定義される．

$$S_X(\omega_k)=\frac{1}{N\Delta t}X_k^* X_k \tag{24}$$

$$R_X(t_j)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x_l x_{l+j} \tag{25}$$

先ほど述べたように x_{l+j} において $N\leq l+j<2N$ となる j,l では，$x_{l+j}=x_{l+j-N}$ として取り扱う．

式(24)に式(20)を代入すると，次式となる．

$$\begin{aligned} S_X(\omega_k)&=\frac{(\Delta t)^2}{N\Delta t}\left\{\sum_{l=0}^{N-1} x_l \exp\left(-\frac{2\pi ilk}{N}\right)\right\}^* \\ &\quad\times\left\{\sum_{m=0}^{N-1} x_m \exp\left(-\frac{2\pi imk}{N}\right)\right\} \\ &=\frac{\Delta t}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_l x_m \exp\left\{-\frac{2\pi i(m-l)k}{N}\right\}\right] \\ &=\frac{\Delta t}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left[\sum_{j=-l}^{N-1-l} x_l x_{l+j} \exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right)\right] \end{aligned} \tag{26}$$

前述のように x_j が繰り返される信号であることを考慮し，式(20)と式(26)を比較すると，$S_X(\omega_k)$ と $R_X(t_j)$ はフーリエ変換/逆変換の関係となっていることがわかる．つまり，離散データに関して以下のウィーナー・キンチンの関係が成り立つ．

$$S_X(\omega_k)=\Delta t\cdot\sum_{j=0}^{N-1} R_X(t_j)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right) \tag{27}$$

$$R_X(t_j)=\frac{1}{\Delta t}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_X(\omega_k)\exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right) \tag{28}$$

同様にして，二つの信号 x_j, y_j に対してクロススペクトル密度と相互相関関数が以下のように定義され，

$$S_{XY}(\omega_k)=\frac{1}{N\Delta t}X_k^* Y_k \tag{29}$$

$$R_{XY}(t_j)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_l y_{l+j} \tag{30}$$

以下のウィーナー・キンチンの関係が成り立つ．

$$S_{XY}(\omega_k)=\Delta t\cdot\sum_{j=0}^{N-1} R_{XY}(t_j)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right) \tag{31}$$

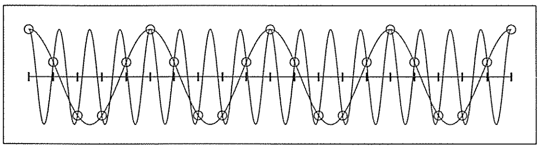
$$R_{XY}(t_j)=\frac{1}{\Delta t}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_{XY}(\omega_k)\exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right) \tag{32}$$

3.3 エイリアシングとナイキスト周波数

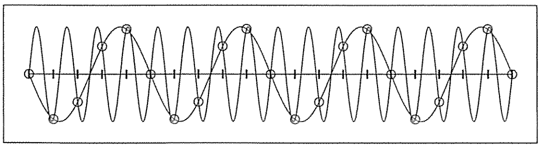
前述のとおり，x_j のフーリエ変換 X_k は $N\Delta\omega=2\pi/\Delta t$ で繰り返す信号となるが，さらに以下の式が成り立つので，

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-\frac{2\pi ij(N-k)}{N}\right\} \\ &=\exp\left(-2\pi ij+\frac{2\pi ijk}{N}\right) \\ &=\exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right)=\left\{\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right)\right\}^* \end{aligned}$$

式(20)より，$N/2<k<N$ の領域では X_k と X_{N-k} が複素共役の関係となる．これは，図1に示すように $\cos k\Delta\omega t$ と $\cos\{(N-k)\Delta\omega t\}$，



(a) 指数関数の実部(余弦関数)



(b) 指数関数の虚部(正弦関数)

図1　エイリアシングの例

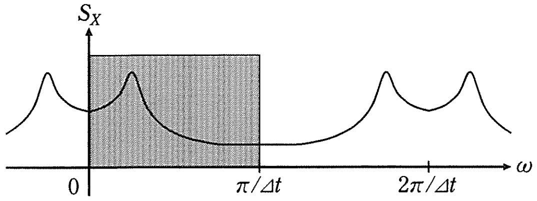


図2　パワースペクトル密度の例

$\sin k\Delta\omega t$ と $-\sin\{(N-k)\Delta\omega t\}$ が，それぞれ0, $\Delta t, 2\Delta t, \cdots, (N-1)\Delta t$ 上で同じ値となり，離散点では両者の区別ができなくなることに対応している．この性質はエイリアシングといい，このエイリアシングによってパワースペクトル密度 $S_X(\omega_k)$ は，図2のように $N/2$ に対応する角周波数 $\pi N/T=\pi/\Delta t$ で折り返したグラフになる．

つまり，時間長 T，データ数 N の時系列 x_j では，この折り返し点における角周波数 $\pi/\Delta t$ が X_k の表すことができる最も高い角周波数である．この周波数をナイキスト周波数，あるいは折り返し周波数という．時系列 x_j にこのナイキスト周波数より高い周波数成分が含まれている場合，エイリアシングの性質により，その周波数よりもずっと低い周波数成分に影響を及ぼす．そのため，実際にスペクトル解析を行う際にはローパスフィルタで高周波数の成分を除去しなければならない．

上記の性質を逆にいい換えると，Ω より高い角周波数成分を含まない信号であるならば，$\Delta t=\pi/\Omega$ のサンプリング周期で信号を再現することができることとなる．これは，染谷・シャノンのサンプリング定理である．

なお，実際の周波数分析でよく用いられる市販のスペクトラムアナライザでは，図2における灰色の部分のみが表示されていることに注意する必要がある．

4．確率過程，定常過程とエルゴード性

4.1　確率変数，標本関数

自然界における外力などのような予測不可能な現象に対しては，特定の測定結果を用いるのではなく，測定結果の集合として確率論的に考える必要がある．

確率変数とは，現象に対して，その集合の確率を評価するために割り当てる値である．観測結果が数値として得られる場合には観測値そのものであるが，機械の故障などを考える際には，例えば正常稼働では1，故障中は0などのように確率変数の割り当てを行う．また，この確率変数は確定的な値と区別するために，通常大文字で表記する．

確率過程は，この確率変数が時間 t や空間 x, y, z の関数となる場合である．ここで，確率過程では，次に測定される標本関数が予測不可能であるのであり，必ずしも標本関数自体が不規則に変動することを意味しているわけではないことを指摘しておく．

確率変数に対する観測値のそれぞれを確率論では標本といい，確率過程では標本関数という．また，確率を評価する対象である，着目している観測値の集合を事象という．

以降では，時間 t の関数である確率過程を考える．

4.2　確率分布関数と確率密度関数

$\rho(A)$ を事象 A の起こる確率とする．確率過程 $X(t)$ の確率分布関数，確率密度関数は時間 t をパラメータとする確率変数として，確率論と同様に以下のように定義される．

（1）確率分布関数

$$1次：P_X(x,t)=\rho(X(t)\leq x) \tag{33}$$

$$2次：P_X(x_1,t_1;x_2,t_2) =\rho(X(t_1)\leq x_1,\ X(t_2)\leq x_2) \tag{34}$$

$$\vdots$$

（2）確率密度関数

$$1次：p_X(x,t)=\frac{\mathrm{d}P_X(x,t)}{\mathrm{d}x} \tag{35}$$

$$2次：p_X(x_1,t_1;x_2,t_2)=\frac{\partial^2 P_X(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{36}$$

$$\vdots$$

4.3　期待値

期待値とは，確率変数を引数とする任意関数 $g_1(X(t)), g_2(X_1(t_1), X_2(t_2)), \cdots$ に対して，確率密度関数による集合平均として以下の式で計算される値であり，$E[\cdot]$ と表記する．

$$E[g_1(X(t))]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{37}$$

$$E[g_2(X_1(t_1),X_2(t_2))] =\int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x_1,t_1;x_2,t_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{38}$$

⋮

以下は，特に名前の付いている期待値である．

・平均

$\mu_X(t)=E[X(t)]$

・分散

$\sigma_X^2(t)=E[\{X(t)-\mu_X(t)\}^2]$
$=E[X^2(t)]-\mu_X^2(t)$

・標準偏差

$\sigma_X(t)=\sqrt{E[X^2(t)]-\mu_X^2(t)}$

・二乗平均

$E[X^2(t)]$

・k 次モーメント

$E[X^k(t)]$

・k 次中心モーメント

$E[X(t)-\mu_X(t)\}^k]$

なお，確率論の場合と区別するために関数を付ける呼び方もある（例えば，平均関数，分散関数など）が，何も付けないことが多い．

4.4 相関関数

相関関数とは，着目時間が異なる確率過程の積の期待値であり，自己相関関数は同じ確率過程 $X(t)$ の積の期待値として次式で定義される．

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_X(x_1,t_1;x_2,t_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{39}$$

また，相互相関関数は，異なる確率過程 $X(t)$，$Y(t)$ の積の期待値として次式で定義される．

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)\,Y(t_2)\}$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}xy\,p_{XY}(x,t_1;y,t_2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{40}$$

なお，着目時間が同じである4.3節の場合とは異なり，相関関数は常に関数を付けて呼ぶ．また，共分散関数は以下のように定義されるが，スペクトル密度と対応する相関関数に比べると使われることは少ない．

・自己共分散関数

$\sigma_X^2(t_1,t_2)$
$=E[\{X(t_1)-\mu_X(t_1)\}\{X(t_2)-\mu_X(t_2)\}]$

・相互共分散関数

$\sigma_{XY}^2(t_1,t_2)$
$=E[\{X(t_1)-\mu_X(t_1)\}\{Y(t_2)-\mu_X(t_2)\}]$

4.5 定常過程

確率過程が時間の原点の移動に対して，その統計的な性質は変化しないという性質を持つとき定常過程という．確率過程で定常過程という場合は，通常，以下に示すような2次の期待値までの定常性を持つ弱定常過程の意味である．

・平均 $\mu_X(t)$ が着目時間 t によらず一定値 μ_X となる．

・自己相関関数 $R_X(t_1,t_2)$ が以下の性質を持つ．

$$R_X(t_1,t_2)=R_X(t_1+\tau,t_2+\tau)=R_X(t_1-t_2,0) \tag{41}$$

この弱定常過程では，式 (41) より自己相関関数を下記のように表記する．

$$R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)] \tag{42}$$

式 (42) により，自己相関関数 $R_X(\tau)$ は以下の性質を持つ．

・τ に関して偶関数である

・時間差 $\tau=0$ で最大値を取り，分散 σ_X^2 となる

・$\tau\to\pm\infty$ の極限で0なる

なお，全ての次数の期待値が時間の原点の移動に対して変化しない定常性を持つ確率過程を強定常過程というが，現実的には，弱定常過程を“定常”な確率過程と考えることが普通である．

4.6 エルゴード過程

平均を評価するとき，確率過程では集合平均を考え，スペクトル理論では時間平均を考える．この集合平均と時間平均が等しくなる確率過程をエルゴード過程という．ここで，エルゴード過程は必然的に定常過程となることに注意されたい．

定常過程 $X(t)$ において以下の式が成り立ち，集合平均と時間平均による平均と相関関数が等しいとき，確率過程 $X(t)$ を弱エルゴード過程という．

$$\mu_X=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p_X(X,t)\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\,\mathrm{d}t \tag{43}$$

$$R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_X(x_1,t;x_2,t+\tau)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$
$$=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t)X(t+\tau)\,\mathrm{d}t \tag{44}$$

全ての次数の期待値において，集合平均と時間

平均が等しくなる確率過程を強エルゴード過程というが，定常過程と同様にエルゴード過程は，通常，2次の期待値までが等しい弱エルゴード過程を意味する．

また，エルゴード過程を対象に測定を行う場合には，多くの標本関数で集合平均を取る代わりに長い標本関数1本で時間平均を取ればよいことになるが，後述の計算例のように標本の時間平均に対して，さらに集合平均を取る場合が多い．

5．線形系の定常不規則振動解析

線形系における周波数応答関数 $H(\omega)$ は，励振 $f(t)$ と応答 $x(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$，$X(\omega)$ より次式で定義される．

$$H(\omega)=\frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{45}$$

周波数応答関数 (45) より，不規則励振 $f(t)$ を受ける線形振動系の応答 $x(t)$ のパワースペクトル密度 $S_X(\omega)$ は，以下のようにして求められる．

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{F_T^*(\omega)H^*(\omega)H(\omega)F_T(\omega)}{T} = |H(\omega)|^2 S_F(\omega) \tag{46}$$

式 (12) の関係より，応答 $x(t)$ の二乗期待値 $E[x^2]$ は次式で求められる．

$$E[x^2]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 S_F(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{47}$$

6．不規則振動応答の計算例

次式の無次元化された線形振動系の運動方程式に対して，シミュレーションを行った．

$$\ddot{x}+2\zeta\dot{x}+x=f(t) \tag{48}$$

以下の計算例では，時間刻みを $\Delta t=0.05$ として，励振 $f(t)$ の標本関数を時間長6553.6で1000本作成し，Runge-Kutta-Fehlberg法により式 (48) を解いて応答を求め，その後半部分 $T=3276.8$ を定常応答として統計量の算出を行った．このような多数の標本関数による統計量の算出方法をモンテカルロシミュレーションという．

6.1　ホワイトノイズ励振

最初に，式 (48) における励振力 $f(t)$ として，次式に示す自己相関関数 $R_F(\tau)$ とパワースペクトル $S_F(\omega)$ を持つホワイトノイズを考える．

$$R_F(\tau)=R_0\delta(\tau) \tag{49}$$

$$S_F(\omega)=R_0 \tag{50}$$

ホワイトノイズは，そのパワースペクトル密度 (50) からわかるとおり，全ての振動数成分が一様である信号であるので，以下の式のように二乗平均が無限大となる仮想的な信号である．

$$E[F^2(t)]=R_F(0)=\infty \tag{51}$$

以下に示す計算例では $R_0=0.01$ とし，付録Aに示す方法によるパワースペクトル密度が角振動数 $\pi/\Delta t$ まで R_0 となるガウス性擬似ホワイトノイズを用いた．

図3と図4に，それぞれ励振 $f(t)$ と応答 $x(t)$ の標本関数を示す．また，図5に応答 $x(t)$ のパワー

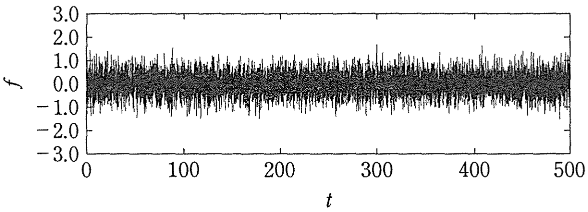


図3　励振の標本関数（ホワイトノイズ励振）

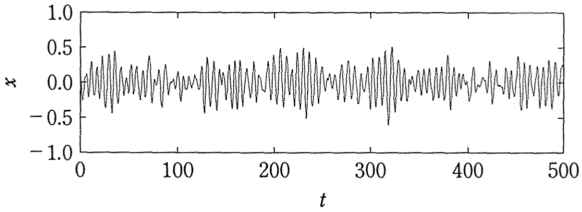


図4　応答の標本関数（ホワイトノイズ励振）

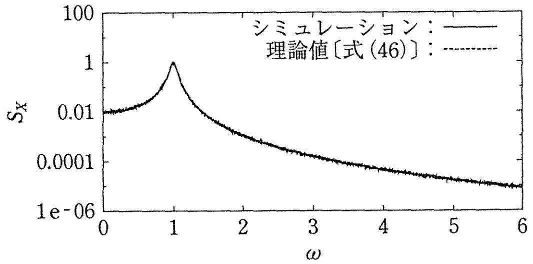


図5　応答のパワースペクトル密度（ホワイトノイズ励振）

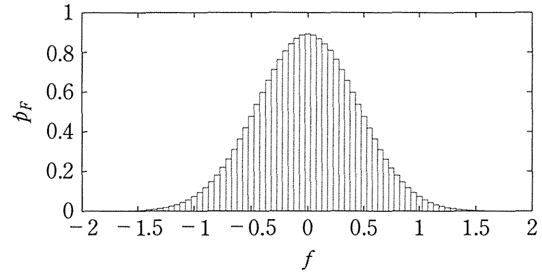


図6　励振の確率密度（ホワイトノイズ励振）

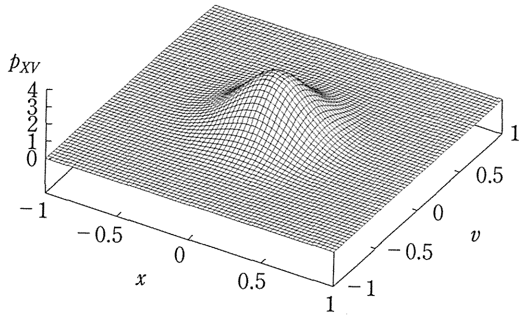


図7　応答の結合確率密度（ホワイトノイズ励振）

スペクトル密度を示す．図5において2本の曲線は重なっており，応答のパワースペクトル密度は理論解（46）と正確に一致していることがわかる．

ヒストグラムより得た励振の確率密度，および応答の変位 x と速度 $v \equiv \dot{x}$ の結合確率密度を図6と図7に示す．励振，応答ともにガウス分布の形状となっていることがわかる．

6.2　狭帯域励振

式（48）における励振力 $f(t)$ として，次式に示す自己相関関数 $R_F(\tau)$ とパワースペクトル $S_F(\omega)$ を持つ狭帯域励振を考える．

$$R_F(\tau)=F^2\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}|\tau|\right)\cos\Omega\tau \qquad (52)$$

$$S_F(\omega)=\frac{F^2\gamma^2}{2}\frac{\omega^2+\Omega^2+\gamma^4/4}{(\omega^2-\Omega^2-\gamma^4/4)^2+\gamma^4\omega^2} \qquad (53)$$

ここで，F は励振の大きさ，γ は帯域幅，Ω は卓越振動数を表す．

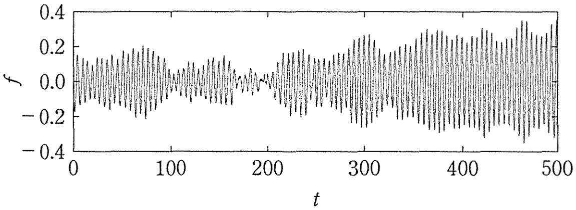
著者らが以前に公表した研究[1]を参考にして，これらのパラメータの値を以下と設定し，

$$\zeta=0.05,\quad F=0.2,\quad \gamma=0.025,\quad \Omega=1.2$$

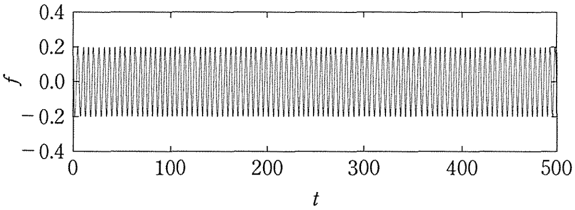
付録B.1，B.2に示す逆フーリエ変換とウィーナー過程による2種類の方法で作成した．

図8と図9は，それぞれ励振 $f(t)$ と応答 $x(t)$ の標本関数である．これらの図において，(a) は逆フーリエ変換［B.1］，(b) はウィーナー過程［B.2］により励振 $f(t)$ を生成した結果である．また，図10は応答 $x(t)$ のパワースペクトル密度である．

図8と図9からわかるとおり，2種類の方法で生成された励振と応答の標本関数の時刻歴はかなり異なるにもかかわらず，図10の3本の曲線は全て重なっており，応答のパワースペクトル密度はどちらの生成方法においても，理論解（46）に正確

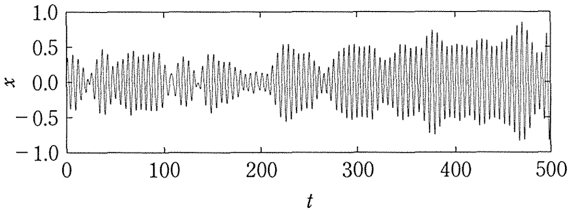


(a) 逆フーリエ変換による方法

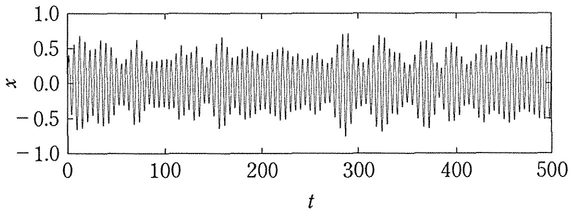


(b) ウィーナー過程による方法

図8　励振の標本関数（狭帯域励振）



(a) 逆フーリエ変換による方法



(b) ウィーナー過程による方法

図9　応答の標本関数（狭帯域励振）

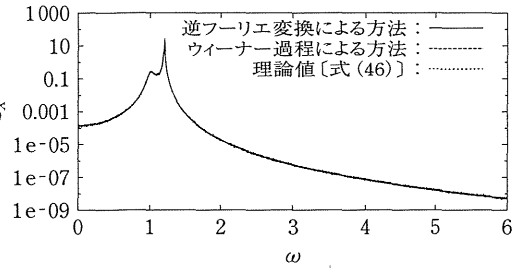
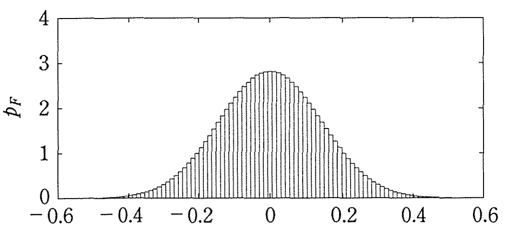


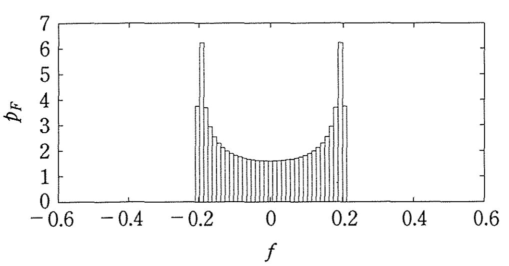
図10　応答のパワースペクトル密度（狭帯域励振）

に一致していることがわかる．したがって，スペクトル理論による不規則振動解析では，応答の性質は励振の標本関数の2種類の生成方法によらないこととなる．

次に，励振の確率密度，および応答の変位 x と速度 $v \equiv \dot{x}$ の結合確率密度を図11と図12に示す．図9より，逆フーリエ変換による方法に比べ，ウィーナー過程による方法では，応答振幅があまり変動しない性質を持つことがわかる．応答の結合確率密度（図12）では，この性質がより顕著に現れ，逆フーリエ変換による方法ではガウス結合確率密度となり，またウィーナー過程による方法では，振幅徐変化の三角関数の性質を示すクレーター型の結合確率密度となっている．これらの応答の結合確率密度は，励振の確率密度（図11）の

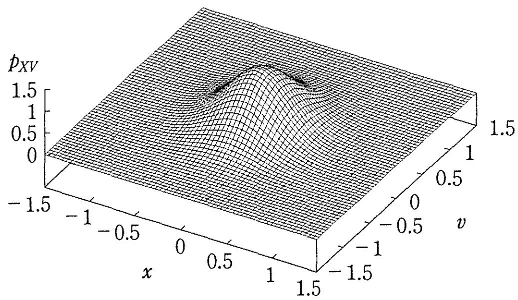


(a) 逆フーリエ変換による方法

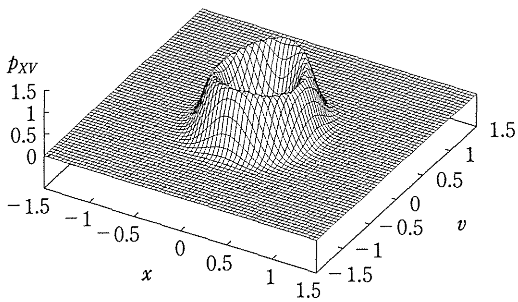


(b) ウィーナー過程による方法

図11　励振の確率密度（狭帯域励振）



(a) 逆フーリエ変換による方法



(b) ウィーナー過程による方法

図12　応答の結合確率密度（狭帯域励振）

性質をそのまま反映していると考えられる．

一方，応答の結合確率密度に関して，図12(a)とホワイトノイズ励振の図7はよく似た形状となっているが，対応するパワースペクトル密度は図10と図5のように異なる．したがって，確率密度だけでも応答の特性の評価はできないことがわかる．

7. おわりに

フーリエ変換をベースとしたスペクトル理論，およびスペクトル理論を用いた線形系の不規則振動の解析手法について概説した．線形系に対して不規則振動応答のモンテカルロシミュレーションを行い，スペクトル理論を用いた解析の有効性を示すとともに，スペクトル解析には現れない応答の特性を述べた．

参考文献にスペクトル理論および不規則振動に対する代表的な教科書[2)〜4)]を挙げておくので，参考にされたい．

参考文献

1)　田村晋司・鷹野聡明・木村康治：日本機械学会講演論文集，

06-7 (2006) p. 28.
2) J. S. Bendat and A. G. Piersol : Random Data, 3rd edition, John Wiley & Sons (2000).
3) 日野幹雄：スペクトル解析, 朝倉書店 (1977).
4) D. E. Newland : An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis, 3rd edition, Longman (1993).
5) 日本機械学会 編：機械工学便覧 基礎編α2 機械力学, 日本機械学会 (2004) p. 98.
6) W. V. Wedig : Structural Safety, **8** (1990) p. 13.
7) T. T. Soong : Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press (1973) p. 120.

付　録

A. ホワイトノイズの発生方法

文献5) より，微小時間間隔 Δt を用いて $t_j=j\Delta t$ とし，各時間区間 $t\in[t_j-1, t_j]$ において，それぞれ独立な0平均ガウス確率変数となる確率過程 $n(t)$ により定常ホワイトノイズを近似することができる．したがって，二乗平均値 R_0 を持つホワイトノイズは，

$$\sigma^2=\frac{R_0}{\Delta t} \tag{A.1}$$

のように決定される標準偏差 σ を持つガウス確率変数を各時間ステップにおいて発生させることによって，近似することができる．

B. 狭帯域信号のモデル化

B.1 パワースペクトルの逆フーリエ変換

式 (12) に示されるパーシバルの定理と三角関数の直交性より，正の角周波数の領域だけを考慮した以下の式によって所定のパワースペクトル密度 $S_F(\omega)$ に従う信号 $f(t)$ の生成が可能である．

$$f(t)=\sum_{k=0}^{N-1} 2\sqrt{\frac{S_F(\omega_k)\Delta\omega}{2\pi}}\cos(\omega_k t+\phi_k) \tag{B.1}$$

ここで，$\Delta\omega$ は考慮する角周波数の上限を ω_u としたときに $\Delta\omega=\omega_u/N$ で定義される値である．$\omega_k=(k+1/2)\Delta\omega$ であり，ϕ_k は区間 [0, 2π) で一様に分布する互いに独立な乱数である．

$\Delta\omega$ は十分に小さく $\omega_k=k\Delta\omega$ としても大きな差が生じないという場合には，上式は逆フーリエ変換と同じ演算を行っていることに着目すると，文献5) に述べられている方法と同様に，エイリアシングにより実際の周波数を表さない成分を0として，

$$F_k=\begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{S_F(k\Delta\omega)\Delta\omega}{2\pi}}e^{i\phi k}, & 0<k\le N/2 \\ 0, & \begin{Bmatrix} k=0 \\ N/2<k<N \end{Bmatrix} \end{cases} \tag{B.2}$$

により定義される F_k の逆フーリエ変換を高速フーリエ変換により行い，結果の実数部を取ることで所定のパワースペクトル密度を持つ信号が生成できる．ただし，高速フーリエ変換による逆フーリエ変換では式 (23) の演算を行うので，高速フーリエ変換による逆フーリエ変換結果に N を掛ける必要がある．

B.2 単位ウィーナー過程による方法

文献6) より，式 (53) のパワースペクトルを持つ狭帯域信号の標本関数は次式により得られる．

$$f(t)=F\cos\{\Omega t+\gamma W(t)\} \tag{B.3}$$

ここで，$W(t)$ は以下の性質を持つ単位ウィーナー過程であり，

$$E[W(t_1)W(t_2)]=\min(t_1, t_2) \tag{B.4}$$

次式の単位ホワイトノイズ $\xi(\tau)$

$$E[\xi(\tau_1)\xi(\tau_2)]=\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{B.5}$$

を $\tau\in[0, t]$ の区間で時間積分することにより得られる[7]．