本学教員が関わった本

p進ゼータ関数：久保田－レオポルドから岩澤理論へ

青木 美穂 著
日本評論社、2019年２月

紹介者　青　木　美　穂
（総合理工学部　教授）

本のタイトルの“p”は“prime number”（素数）を表します。私の専門分野である数論の研究者は論文や講演などで“p”という文字を“一般的な素数”という意味で用いる慣習があります。素数とは何でしょうか？　それは約数をちょうど２個（１とそれ自身）もつ自然数で、小さい順に２，３，５，７，……と続きます。数論の歴史はこの“素数”とともに刻まれてきました。紀元前３世紀にはユークリッドにより“素数”は無限個存在することが証明されていますが、素数の並びに規則性は見つかっておらず、そのことを利用し、“大きい素数”は現代では情報を安全にやりとりする“鍵”の役目を果たしています（RSA暗号)。最近では２年ごとぐらいの間隔で新しい素数が発見されていて、現在知られている最も大きい素数は“$2^{82589933}-1$”です(2018年12月にPatrick Laroche により発見)。

素数pを１つ選ぶと、それに応じて有理数の間に“距離”が定義できます。３つの自然数 1, 7, 19を数直線上に並べたとき、７－１＝６、19－１＝18 なので、19よりも７の方が１に近い場所にありますが、素数pによって決まる“距離”は、pで沢山割れるほど近くなります。例えばp＝３によって決まる距離を考えると、６は３で１回しか割れませんが18は２回割れるので、７より19の方が１に近くなります。このように素数pによって決まる距離を“p進距離”と呼んでいます。

有理数から実数を作る方法が“完備化”です。これは“隣り合う数の距離がどんどん近くなっていく有理数列を一つの実数だと思う”ということです。たとえば円周率πの小

数第n位以下を切り捨てた有理数をa_nとおくと、次のような有理数の無限数列ができます。

$a_1=3,\ a_2=3.1,\ a_3=3.14,$
$a_4=3.141,\ \cdots\cdots$

“完備化” はこの数列を円周率πと同一視するということです。“p進距離”に対しても同様に有理数を“完備化”することができます。有理数の無限数列

$a_1=1,\ a_2=1+3,\ a_3=1+3+3^2,$
$a_4=1+3+3^2+3^3,\ \cdots\cdots$

は３進距離で考えると隣り合う数の距離がどんどん近くなっているので（a_2-a_1は３で１回割れる、a_3-a_2は３で２回割れる、……）完備化によってこの数列を１つの数だと思うような“３進世界“が構成できます。“p進ゼータ関数”は通常の世界（実数世界）で定義されるゼータ関数から作られる“p進世界”のゼータ関数です。実数上定義される最も有名なゼータ関数は次の“リーマンのゼータ関数”です。

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

１より大きい実数sに対し上の無限和は収束します。この関数は解析接続という方法を用いると、任意の複素数sに対し意味をもつように定義域を拡張することができます。数学で最も重要な予想であるリーマン予想（Riemann hypothesis）は、解析接続された“リーマンのゼータ関数”の非自明な零点が１直線上に並ぶという主張で1859年にベルンハルト・リーマンによって提示されてから現在も未解決であり、解決の糸口すら見つかっていない超難問として知られています。解析接続されたリーマンのゼータ関数の負の整数での値は有理数になり、和算家の創始者として知られる関孝和とスイスのヤコブ・ベルヌーイによって発見された漸化式：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=n+1\quad(n=0,1,2,\ldots)$$

（$\binom{n+1}{k}$は二項係数）で定義される“関・ベルヌーイ数”とよばれる数列B_nで次のように表すことができます。

$$\zeta(1-n)=-\frac{B_n}{n}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$B_0=1,\quad B_1=\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,$$

$$B_4=-\frac{1}{30},\cdots$$

ベルヌーイ数には素数pごとに不思議な性質があることが19世紀にエルンスト・クンマーによって発見されていて、p進ゼータ関数はベルヌーイ数のp進的な性質を用いて構成さ

れます。このような実数世界で定義されるゼータ関数から久保田富雄とハインリッヒ・ヴォルフガング・レオポイドは1964年にp進世界のゼータ関数を発見しました。本書はp進ゼータ関数の久保田－レオポルドによるオリジナルの構成方法とp進測度を用いた現代的構成方法について解説しています。

久保田－レオポルドによって構成されたp進ゼータ関数は単に実数世界でのゼータ関数の類似というだけでなく、その後の数論研究において“p進”という手法の重要性を定着させる大きな役割を果たしていきます。数論では代数的対象と呼ばれるものを研究する代数的整数論と、上記のようなゼータ関数の性質などを研究する解析的整数論が並行して研究されてきましたが、実数世界の関数から構成されたp進ゼータ関数は代数的整数論の研究対象と結びつきやすいことが岩澤健吉によって発見され、岩澤理論と呼ばれる大きな理論構築につながっていきます。

本書を執筆していたとき、名城大学で行われたセミナーで久保田富雄先生の講演を拝聴することができました。数論の歴史に大きな変化をもたらすような仕事をされた大数学者の講演を聞くことは、p進ゼータ関数が発見されてから僅か50年しか経っていないことを実感させられる機会でもありました。数学者が紡ぐ業績が次世代に受け継がれていくことを実感しながら、また各時代の研究者に敬意と畏れを抱きながら本書を書き上げました。