島大論集（自然科学）
第10号　昭和36年3月

Abel 群と行列

新　谷　三　郎

（昭和35年11月18日受理）

Sabrô ARAYA : Abelian Groups and Matrices

（1）

Abel 群の元の合成法は可換であるから，これを加法と考え，記号＋で表わし，合成結果を和といい，単位元を0で示す。個々の元は，n 次元空間の，格子点と考え，ベクトルを用いて表わすことが出来る。任意のベクトルXは

$$X=(a_1, a_2, \cdots a_n)=a_1(1,0,0,\cdots 0)+a_2(0,1,0\cdots 0)+\cdots+a_n(0,0,\cdots 1)$$

$$=a_1E_1+a_2E_2+\cdots+a_nE_n \qquad \text{但 } a_iE_i=E_ia_i$$

の如くに，整数 a_i を係数として $E_i=(0,\cdots 1,\cdots 0)$ の一次結合として表わされる。此群を基 E_1, $E_2,\cdots E_n$ から生成された自由 Abel 群といい，A で表わす。

A は $E_1, E_2,\cdots E_n$ の代りにその一次結合である所の，他の一次独立な一組のベクトル $A_1, A_2,\cdots A_n$ を基として生成されると考える事も出来る。その時

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

で α_{ij} は整数，且 $|\alpha_{ij}|=\pm 1$ である。従つて，$E_1, E_2,\cdots E_n$ は亦 $A_1, A_2, \cdots A_n$ の一次結合となる。

今ベクトル $Y=(b_1, b_2,\cdots b_n)$ を元とする他の Abel 群 B を考え，B は A に準同型なるものとする。換言すれば，A の一個の元には B の唯一個の元が対応し，B の一個の元には A の少くも一個の元が対応し，且対応元の和が，また対応するものとする。B の単位元 0 には A の中の

$$C_1=\lambda_{11}E_1+\lambda_{12}E_2+\cdots\cdots+\lambda_{1n}E_n$$
$$C_2=\lambda_{21}E_1+\lambda_{22}E_2+\cdots\cdots+\lambda_{2n}E_n$$
$$\vdots$$

等有限個，又は無限個の元が対応するものとする。これ等の全体は A の中の正規部分群 C を作る。$C_1, C_2,\cdots$ 中に一次独立なものは高々 n 個しかないから，それらを改めて $C_1, C_2\cdots$ とすると，部分群 C は

$$(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\cdots\cdots\lambda_{1n}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\cdots\cdots\lambda_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

なる行列で，表わすことが出来る。

行列の

(1) 或行（又は列）に±1を乗ずること

(2) 或行（又は列）に整数を乗じて，他の行（又は列）に加減すること

(3) 或二つの行（又は列）を入替えること

の三つは行列の基本変形といわれる。それは (λ) の左側（又は右側）から $|\alpha|=\pm1$ なる行列 (α) を乗ずることによつて達成される。(α) を (λ) の左側から乗ずることは，部分群Cの，元なるベクトルの一次結合を作ることを意味し (α) を (λ) の右側から乗ずるこは自由群Aの基 E_1, $E_2,\cdots E_n$ の一次結合を作ることを意味する。

(λ) のすべての組成分子 $\lambda_{ij}=0$ となるのは，二つの群AとBとが同型の場合であるが，この場合は，後に考えることにしよう。先ず (λ) の行と列とに凡ゆる基本変形を行つて得られる λ_{ij} の絶対値 $|\lambda_{ij}|$ の零でない最小のものを (1, 1) 分子とする。$e_1=|\lambda_{11}|$ とおき $\lambda_{ij}=qe_1+r$ $0\leqq r<e_1$ とし，第1列をq倍して第j列から減ずると (1, j) 分子はrとなるが $e_1=|\lambda_{11}|$ 最小の仮定によつて $r=0$ となる。このような操作を反覆すれば第1行は (1, 1) 分子以外悉く零となり第1列も同様の操作によつて (λ) は

$$\begin{pmatrix}e_1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0\\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23}\cdots & \\ \vdots & \lambda_{32}\cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots\cdots & & \end{pmatrix}$$

となる。この時 λ_{ij} $(i, j\geqq 2)$ は e_1 の倍数である。何となれば $\lambda_{ij}=qe_1+r$ $0\leqq r<e_1$ とする時，第1行を第i行に加えしかる後，第1列のq倍を，第j列から減ずると e_1 最小の仮定によつて $r=0$ となるからである。次に

$$\begin{pmatrix}\lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots\cdots\\ \lambda_{32} & \lambda_{33} & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{pmatrix}$$

に同様の操作を行ない (λ) を

$$\begin{pmatrix}e_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0\\ 0 & e_2 & 0 & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \cdots\cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

と変形する。更に同様の手続を反覆し

$$(\lambda)=\begin{pmatrix}e_1 & & & & & \\ & e_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \ 0\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} e_i \mid e_{i+1} \\ \text{空所は0}\end{array}$$

の形とする事が出来る。$e_1, e_2, \cdots e_r$ は (λ) の単因子と呼ばれる。

これによつて見れば部分群 C は

$$C_1 = (e_1, 0, \cdots 0)$$
$$C_2 = (0, e_2 \cdots 0)$$
$$\cdots\cdots$$
$$C_r = (0, 0, \cdots e_r, \cdots 0)$$

なるベクトルの生成する自由群で，その元は $Z = c_1C_1 + c_2C_2 + \cdots + c_rC_r$ c_i＝整数 と表わされる。又 Abel 群 B は，A の C による剰余群 A/C に同型である。換言すれば A の元 $X = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ は a_i が e_i を法として，合同なとき，B の同一元に対応する。即 b_i は e_i を法とする剰余類であるとして B の元は $Y = b_1E_1 + b_2E_2 + \cdots + b_nE_n$ と表示され B は位数 b_i なる巡回群の直和となる。ここに $e_1, e_2, \cdots$ は 1 となる事も可能であるが，その時 $b_1E_1, b_2E_2 \cdots$ は 0 即単位元を表わすのみである。そして此場合 A の直和因子 $a_1E_1, a_2E_2 \cdots$ に対応する B の元が存在しないものと解する事が出来る。又 $\cdots e_{n-1}, e_n$ は 0 となる事も可能で，その時 $\cdots b_{n-1}E_{n-1}, b_nE_n$ は無限巡回群を表している。そしてこれは A の直和因子 $\cdots a_{n-1}E_{n-1}, a_nE_n$ をそのまま B に転用したものである。A と B と同型ならばすべての単因子は 0 となるが，前に除外したのは此場合であつた。

行列 (λ) のすべての i 次小行列式の最大公約数を 行列式因子といい d_i で表わす。但 $d_0 = 1$ とする。(λ) の右側又は左側に $|\alpha| = \pm 1$ なる行列 (α) を乗じて，行及列に変換を行つても同一の行列式因子を得ることは見易い。それ故，自由群 A 及その部分群 C の生成元なる基に変換を行つて 他の基を用いたとしても $\frac{d_i}{d_{i-1}}$, に変化は無い。之を対角線形で見れば $d_i = e_1e_2 \cdots e_i$ で $\frac{d_i}{d_{i-1}} = e_i$ である。B は A/C として表わされるから B の直和因子なる巡回群の位数 e_i が変らないのである。但 e_1, e_2, 等が 1 となるのは B に無関係な原因によるものであるからこの場合を除くと 1 でない単因子の列 $(e_1, e_2, \cdots)$ は Abel 群 B に固有のもので表示の如何に関らない。これを逆の順序に並べたものを B の不変系という。

(Ⅱ)

B の部分群 B′ を考える。B′ が対応する A の部分群を A′ とすると B′ は単位元 0 を含むから A′ はCを含む。故に C の生成元 $C_1, C_2, \cdots$ は A′ の生成元の一次式として表わされる。其行列を (μ) としよう。B′ の構造は B と同様に (μ) の単因子 $(e'_1, e'_2, \cdots)$ によつて定まる。

A′ の生成元は A の生成元 E_i の一次式として表わされるから其行列を (ν) とし，その一次式を A′ の生成元で C の生成元を表わす式に代入すると，C の生成元が A の生成元 E_i で表わされる。その行列は (λ) であつたから

$$(\lambda) = (\mu)(\nu)$$

なる関係を得る。(λ)，(μ) の二つを同時に対角線型に化する事は一般には不可能であるが (μ) のみなら可能である。そこで始から

$$(\lambda) = \begin{pmatrix} e'_1 & & \\ & e'_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} (\nu)$$

なる形に取ると，右辺の第一行は e'_1 を因数に持ち，第二行は e'_2 を… 第 i 行は e'_i を因数に持つ。故にその i 次の行列式因子 d_i は $e'_1e'_2\cdots e'_i$ で整除され 単因子 e_i は e'_i で整除される。

或 Abel 群 B^* が B に準同型なる場合を考える。B^* は B の或部分群 B' に対して B/B' に同型である。そして B/B' は A/A' に同型であり A/A' の構造は (ν) の単因子 $(e''_1, e''_2\cdots)$ によつて定まる。故に上と同様の考察により B の単因子 e_i は (ν) の単因子 e''_i で整除されることが分る。

(Ⅲ)

群 A の元 X を同じく A の元 X′ に写す，即 $X'=\varphi(X)$ なる演算を写像という。X′ の全体が X の全体に準同型である時，即

$$\varphi(X_1+X_2)=\varphi(X_1)+\varphi(X_2)$$

である時，自己準同型写像という。

二つの自己準同型写像 φ と ψ との積及和を $(\varphi\psi)(X)=\varphi(\psi(X))$ $(\varphi+\varphi)(X)=\varphi(X)+\psi(X)$ で定義する。自己準同型写像の積及和が，矢張，自己準同型写像であること即

$$(\varphi\psi)(X_1+X_2)=\varphi\psi(X_1)+\varphi\psi(X_2)$$
$$(\varphi+\psi)(X_1+X_2)=(\varphi+\psi)(X_1)+(\varphi+\psi)(X_2)$$

が成立することは見易い。又自己準同整写像が環をなすこと即

$$\varphi+\psi=\psi+\varphi$$
$$(\varphi+\psi)+\Theta=\varphi+(\psi+\Theta)$$
$$\varphi(\varphi+\Theta)=\varphi\psi+\varphi\Theta \quad (\varphi+\psi)\Theta=\varphi\Theta+\psi\Theta$$
$$(\varphi\psi)\Theta=\varphi(\psi\Theta)$$

が成立することも明らかである。之を同型環という。又若上の自己準同型写像が逆を有するならば同型群という。

以下取扱うものは凡て有限 Abel 群とする。従つて不変系を与える行列の単因子は 0 でない。写像 φ はベクトルの変換であるから行列 (α) で表わすことが出来る。即

$$X'=\varphi(X)=(\alpha)X=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots \\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

自己準同型写像の積には行列の積が対応し 和には和が対応する。

一つの行列は，一つの写像を与えるけれども，二つの行列が同一の写像を与える場合もある。(α) と (β) とが同一の写像を表わせば $(\alpha)-(\beta)$ は B のすべての元を単位元 0 に写す。B が自由群 A とその部分群 C とにより 剰余群として表わされるから $(\alpha)-(\beta)$ は A の元を悉く C に写す。C の元は，ベクトル $C_1, C_2,\cdots$ で，行列 (κ) を用いて表わされるとする。$C_1, C_2\cdots$ は行列 (λ) を用いて基 $E_1, E_2,\cdots$ で表わされるから

$$(\alpha)-(\beta)=(\kappa)(\lambda)$$

なる関係が成立つ。即 $(\alpha)-(\beta)$ は右側から (λ) で整除される。逆に $(\alpha)-(\beta)$ が右側から (λ) で整除されるなら (α) と (β) とが B の同一写像を表わすことという迄もない。

次に，(α) で表わされる A の写像が A の部分群 A′ への自己準同型写像である為の条件を求め

よう。A の部分群 A′ は，或関係式を充す元の全体であるから，其関係を行列で示して (σ) とすれば A′ の元に (σ) を適用すれば 0 となる。A′ の元は $E_1, E_2\cdots$ で (τ) を用いて表わされるものとすると $(\sigma)(\tau)$ は行列の意味で 0 となる。即 (σ) と (τ) とは相互の零因子でなければならない。

偖，A の元が (α) によつて A′ に写された時，これに (σ) を適用すればベクトルの意味で 0 となる。そのベクトルを $E_1, E_2\cdots$ で表わしたとすると A′ の意味によつて $(\sigma)(\alpha)(\tau)$ は $(\sigma)(\tau)$ を其右側の因子として持つ。即ち $(\sigma)(\alpha)$ は右側から (σ) で整除される。それは必要条件であるが，十分なことというまでもない。

今生成元を適当に取つて (σ) を標準形にしておく。

$$(\sigma)=\begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} s_i \mid s_{i+1} \qquad s_n \neq 0 \\ \text{空所は } 0 \end{array}$$

その時 $$(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \frac{s_1}{s_2}\alpha_{12} & \cdots\cdots & \frac{s_1}{s_n}\alpha_{1n} \\ \frac{s_2}{s_1}\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \frac{s_2}{s_n}\alpha_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{s_n}{s_1}\alpha_{n1} & \frac{s_n}{s_2}\alpha_{n2} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

が整数を組成分子とする行列でなければならない。故に $\frac{s_i}{s_j}\alpha_{ij}$ $(i<j)$ が整数でなければならない。これが自己準同型になるための完全条件である。即 A から A′ への自己準同型写像は

$$(\alpha)=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \frac{s_2}{s_1}\beta_{12} & \cdots\cdots & \frac{s_n}{s_1}\beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots\cdots & \frac{s_n}{s_2}\beta_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots\cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられる。このような二つの行列が B の同一自己準同型写像を表わすためには上に見た如く第 j 列が e_j を法として合同であればよい。

以上によつて同型環が行列によつて表現された。

参考文献

浅野　啓三：線型代数学提要

正田健次郎：群

A. Chatelet, : Groupes abéliens finis.