行列の Jordan 標準形について

新　谷　三　郎

（昭和31年11月30日受理）

Saburo Araya: On Jordan's Normal Form of Matrices

従来行列の Jordan 標準形についてはその必要性を示すためには単因子論が用いられていた。以下は此複雑な単因子論を使用しないでその標準形に到達することを目的とする。但ベクトル空間の性質を使用する。

§ 1. 行列の幾何学的意義

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を略して $Y=AX$ と書く。即ベクトル X は行列 A を左乗することによつてベクトル Y に変換される。此間座標即基（基底ともいう）は前と変らないとする。X を原像　Y を像とすれば行列 A は作用素と考え得る。

若上式に於てベクトル自身は変らないものとし X 及 Y はその異る表現とすると上式は基又は座標の変換である。此時 A は正則即 A^{-1} が存在するものとする。即正則行列 A は座標変換とも考えられる。

今正則行列 C は底標変換とし　$X' = CX$　　$Y' = CY$　とすれば勿論　$X = C^{-1}X'$　$Y = C^{-1}Y'$ である。又 A, A' を作用素として $Y = AX$,　$Y' = A'X'$　とすれば

$$A'X' = Y' = CY = CAX = CAC^{-1}X'$$

$$\therefore \qquad A'X' = CAC^{-1}X'$$

即　$A' = CAC^{-1}$ は作用素 A を異る基又は座標で表したものである。そして $CA^2C^{-1} = CAC^{-1}CAC^{-1} = A'^2$　$CA^3C^{-1} = (CAC^{-1})^3 = A'^3$　等々である。又 k が基礎体 K に属するスカラーならば $C(kA)C^{-1} = k(CAC^{-1})$ 更に $C(A+B)C^{-1} = CAC^{-1} + CBC^{-1}$ だから之等を組合せて $f(x)$ が多項式である時　$Cf(A)C^{-1} = f(A')$ となる。

$f(A)$ に対し 0 でないベクトル X があつて $f(A)X = 0$ ならば $f(A)$ は X を消すという。斯様な X の全体は K 加群をなす。換言すれば

$f(A)X_1 = 0$　$f(A)X_2 = 0$　ならば　　$f(A)(X_1 + X_2) = 0$

k がスカラーで $k \in K$　　ならば　　$f(A)(kX_1) = 0$

此様なベクトル X の全体即空間を $f(A)$ の零点集合[(1)]といい $\overline{f(A)}$ で表す。

今 $Y = CX \quad B = CAC^{-1} \quad X \in \overline{f(A)}$ とすると

$$f(B)Y = f(CAC^{-1})CX = Cf(A)X = 0 \qquad \therefore \ f(B)Y = 0$$

又逆に C は正則である故 $f(B)Y = 0$ から $f(A)X = 0$ も得られる。即 $\overline{f(A)}$ と $\overline{f(B)}$ とは同一部分空間の異る基による表示である。

又 A の多項式 $f(A)$ は唯一の行列 A を含むのみであるから A とは可換である。故に $X \in \overline{f(A)}$ なら

$$f(A)(AX) = Af(A)X = 0 \qquad \therefore \ AX \in \overline{f(A)}$$

此事を $\overline{f(A)}$ は A 及 $f(A)$ に対して不変[2]であるという。

§ 2. ベクトル空間の双対性[3]

二つの多項式 $f(A)$ と $g(A)$ との最大公約数を $f(A) \cup g(A)$ で表し最小公倍数を $f(A) \cap g(A)$ で表す。然る時

定理
$$\overline{f(A) \cup g(A)} = \overline{f(A)} \cap \overline{g(A)}$$
$$\overline{f(A) \cap g(A)} = \overline{f(A)} \cup \overline{g(A)}$$

証明 $X \in \overline{f(A)} \cap \overline{g(A)} \longrightarrow f(A)X = g(A)X = 0$

$f(A) \cup g(A) = d(A) \longrightarrow d(A) = F(A)f(A) + G(A)g(A)$

$$\therefore \ d(A)X = 0 \qquad \overline{f(A) \cup g(A)} \ni X$$

$$\therefore \ \overline{f(A) \cup g(A)} \supset \overline{f(A)} \cap \overline{g(A)} \tag{1}$$

また $f(A) = f'(A)\,d(A) \quad g(A) = g'(A)d(A)$ とおけば

$$d(A)X = 0 \longrightarrow f(A)X = g(A)X = 0$$

$$\therefore \ \overline{f(A) \cup g(A)} \subset \overline{f(A)} \cap \overline{g(A)} \tag{2}$$

(1) (2) から $\overline{f(A) \cup g(A)} = \overline{f(A)} \cap \overline{g(A)}$ （第一式証了）

次に $f(A) \cap g(A) = h(A) \longrightarrow h(A) = f_1(A)\,f(A) = g_1(A)\,g(A)$

$$f_2(A)\,f_1(A) + g_2(A)g_1(A) = E$$

$h(A)X = 0 \longrightarrow X = EX = f_2(A)\,f_1(A)X + g_2(A)\,g_1(A)X = Y + Z$

とおけば $f(A)Y = f(A)\,f_2(A)\,f_1(A)X = f_2(A)\,f(A)\,f_1(A)X = f_2(A)\,h(A)X = 0$

$$\therefore \ Y \in \overline{f(A)} \qquad \text{同様に} \qquad Z \in \overline{g(A)}$$

$$\therefore \ \overline{f(A) \cap g(A)} \subset \overline{f(A)} \cup \overline{g(A)} \tag{3}$$

また $X \in \overline{f(A)} \cup \overline{g(A)} \qquad Y \in \overline{f(A)} \qquad Z \in \overline{g(A)} \qquad X = Y + Z$

$\longrightarrow h(A)X = h(A)Y + h(A)Z = f_1(A)f(A)Y + g_1(A)g(A)Z = 0 + 0 = 0$

$$\therefore \ \overline{f(A) \cap g(A)} \supset \overline{f(A)} \cup \overline{g(A)} \tag{4}$$

(3) (4) から $\overline{f(A) \cap g(A)} = \overline{f(A)} \cup \overline{g(A)}$ （第二式証了）

それ故若 $f(A) \cup g(A) = E$ なら $\overline{E} = 0$ だから $\overline{f(A)} \cap \overline{g(A)} = 0$ 此時 $\overline{f(A)g(A)} = \overline{f(A) \cap g(A)} = \overline{f(A)} \cup \overline{g(A)}$ は共通元素のない空間を連結したものである。

之を直和という。その任意のベクトルは $\overline{f(A)}$, $\overline{g(A)}$ のベクトルで唯一通りに表される。何となれば若 $X+Y=X'+Y'$ なら $\overline{f(A)}\ni X-X'=Y'-Y\in\overline{g(A)}$ $\therefore$ $X-X'=Y'-Y=0$ より $X=X'$ $Y=Y'$ を得るからである。

§ 3. 固有多項式の零点集合

n 次正方行列Aの固有多項式 $\varphi(x)=|xE-A|$ が互に素なる二因子の積に分解され $\varphi(x)=f(x)g(x)$ となるものとする。Hamilton-Cayley の定理(4)によつて $\varphi(A)=0$ であるから $\overline{\varphi(A)}$ は全空間を表す。一方 $\overline{f(A)}$ 及 $\overline{g(A)}$ は交わりのない二つの部分空間で之等を連結すれば全空間となる。故に基を適当に選んで

E_1, E_2, …… $E_k\in\overline{f(A)}$ E_{k+1}, E_{k+2}, …… $E_n\in\overline{g(A)}$ なる如く取れば空間の任意ベクトルは此基によつて必ず唯一通りに表される。初の基から此基に移る事は座標変換であるから正則行列Cで示すことが出来る。$CAC^{-1}=B$ とおく。$\overline{f(A)}$ 即 $\overline{f(B)}$ を M_1 $\overline{g(A)}$ 即 $\overline{g(B)}$ を M_2 で表す。任意のベクトル XはCによつて

$$CX=Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ となる。

但 $\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}\in M_1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}\in M_2$ である。前述の如くM_1 は$f(B)$ 及Bに対して不変であるから

$B\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 詳記すれば $\begin{pmatrix} & & \\ & b_{ik} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ である。Y_1 は任意と考えてよいから之に順次 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …… $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を使用すればBが $\begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形であることが分り，同様にM_2が，$g(B)$ 及Bに対して不変だから $B\begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ で従つてBが $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & B_2 \end{pmatrix}$ の形であることが分る。 $CAC^{-1}=B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ は各k次及$n-k$次の正方行列である。

Aの異る固有値を λ_1, λ_2,……λ_s とし $\varphi(x)$ が $\varphi(x)=(x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots\cdots(x-\lambda_s)^{\alpha_s}$ と分解されるならば $f(x)$ 及 $g(x)$ も分解されるから上の方法を続行することが出来る。故に更に適当な変換Cを用いれば

$$CAC^{-1}=B=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}$$

と直される。Bは B_{11}, B_{22} , …… B_{ss} の直和であるという。

$B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ なら $B^2=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1B_1+00 & B_10+0B_2 \\ 0B_1+B_20 & 00+B_2B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1^2 & 0 \\ 0 & B_2^2 \end{pmatrix}$

同様に $B^3=\begin{pmatrix} B_1^3 & 0 \\ 0 & B_2^3 \end{pmatrix}$ 等々

更に $\lambda B^s+\mu B^t=\begin{pmatrix} \lambda B_1^s+\mu B_1^t & 0 \\ 0 & \lambda B_2^s+\mu B_2^t \end{pmatrix}$ である故

$0=C\varphi(A)C^{-1}=\varphi(B)=\begin{pmatrix} \varphi(B_1) & 0 \\ 0 & \varphi(B_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(B_1)g(B_1) & 0 \\ 0 & f(B_2)g(B_2) \end{pmatrix}$

$\therefore\ f(B_1)g(B_1)=f(B_2)g(B_2)=0$

然る時 $f(B_1)=0 \quad g(B_1)\neq 0 \quad f(B_2)\neq 0 \quad g(B_2)=0$

証明 $\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}\in M_1$

$$0=f(B)\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(B_1) & 0 \\ 0 & f(B_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(B_1)Y_1 & 0 \\ 0 & f(B_2)0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ f(B_1)Y_1=0$ Y_1 は任意だから前の如く $f(B_1)=0$

又 $\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}\overline{\in} M_2$ 故 $0\neq g(B)\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(B_1) & 0 \\ 0 & g(B_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(B_1)Y_1 & 0 \\ 0 & g(B_2)0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ g(B_1)Y_1\neq 0 \quad g(B_1)\neq 0$

同様に $f(B_2)\neq 0 \quad g(B_2)=0$ （証了）

此論法を続ければ $\varphi(x)=(x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots\cdots(x-\lambda_s)^{\alpha_s}=h_1(x)h_2(x)\cdots\cdots h_s(x)$ ならば

$$CAC^{-1}=B=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}$$

$$h_1(B_{11})=h_2(B_{22})=\ \cdots\cdots\ =h_s(B_{ss})=0$$

となる。

以上 $\varphi(B)=0$ から $h_i(B_{ii})=0$ が出たけれども逆の成立つことも明らかである。そして
これは Hamilton-Cayley の定理の内容を示すものである。

§ 4. 巾 零 行 列

前節の $h_i(B_{ii})=(B_{ii}-\lambda_iE)^{\alpha_i}=0$ を改めて $B^\alpha=0$ と書く。詳言すれば α 次の正方行列 B の固有値は悉く 0 で $B^\alpha=0$ である。然し $\beta\leqq\alpha$ なる β で $B^\beta=0$ 但 $B^{\beta-1}\neq 0$ とする。此様な B

を巾零行列と呼ぶ。

周知[5]の如く適当な正則行列 C を用いれば $C^{-1}BC$ の対角線には B の固有値が並び左下半部は0となるような所謂三角行列に B を変形する事が出来る。今の場合 B の固有値は皆0であるから対角線にも亦0が並ぶ。

先ず $C^{-1}BC$ の (12) 分子が0でない場合には

$$C_1=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&1&&&\lambda&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\2\\\\\\\\\\\\\end{array}\\\begin{array}{ccccccc}&&&&j&&\end{array}&\end{array}$$

但 $2<j$　空所は0

なる行列 C_1 を右乗すると第二列の λ 倍が第 j 列に加えられ C_1^{-1} を左乗すると第 j 行の $-\lambda$ 倍が第二行に加えられる。故に λ を適当に選べば $C_1^{-1}C^{-1}BCC_1$ の $(1j)$ 分子を0にする事が出来る。そして此方法を反覆することによつて第一行ベクトルを $(0\ast00\cdots\cdots0)$ とする事が出来る。そこで

$$C_2=\left(\begin{array}{cccccc}1&&&&&\\&\mu&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{array}\right)$$

を右乗すると第二列が μ 倍され C_2^{-1} を左乗すると第二行が $\dfrac{1}{\mu}$ 倍されるから μ を適当に取つて $C_2^{-1}C_1^{-1}C^{-1}BCC_1C_2$ の第一行を $(0100\cdots\cdots0)$ の形に直すことが出来る。

若 $C^{-1}BC$ の (12) 分子が0で $(1j)$ 分子 (但 $2<j$) が0でないならば

$$C_3=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{cccccccccc}1&&&&&&&&&\\&0&&&&&1&&&\\&&1&&&&&&&\\&&&1&&&&&&\\&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&1&&&&\\&1&&&&&0&&&\\&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\2\\\\\\\\\\j\\\\\\\\\end{array}\\\begin{array}{cccccccccc}&2&&&&&j&&&\end{array}&\end{array}$$

但空所は0

を右乗すると第二列と第 j 列とが交換され C_3^{-1} を左乗とすると第 j 行と第二行とが交換される。それ故 $C_3^{-1}C^{-1}BCC_3$ の (12) 分子は0でないものとなる。以下は前の通り。

若 $C^{-1}BC$ の第一行が悉く 0 ならばそのまゝとする。

斯くして得られた行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\ 0\ 0\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ 0 \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{又は} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 0 \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

であるから B_1 に今と同じ手続を繰返して行く。

そうして最後に得られた行列を改めて $C^{-1}BC$ と書くとそれは

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & \overbrace{1 & \cdots & 1}^{\beta-1\text{個}} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & 0 & \overbrace{1 & 1 \cdots 1}^{\gamma-1\text{個}} & & \\ & & & & & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{但空所は 0}$$

のようなものである。即対角線上にも亦 0 が並ぶ三角行列で右上部の対角線に隣接した線上に若干個の 1 が並び他は悉く 0 である。その 1 は β 個隣接して並ぶ事は決してない。若そうならば $C^{-1}BC$ は β 乗では決して 0 となる筈がないのに

$$(C^{-1}BC)^{\beta}=C^{-1}B^{\beta}C=C^{-1}\,0\,C=0$$

なる矛盾を生ずるからである。而してまた $\beta-1$ 個並ぶような部分が存在することは

$B^{\beta-1}\fallingdotseq 0 \qquad B^{\beta}=0$ から明らかである。

そこで $C^{-1}BC$ から此 β 次の小さい三角行列を引去れば残は $\beta\geqq\gamma$ なる γ 乗によつて 0 となり $\gamma-1$ 乗では 0 とならないような α 次三角行列となる。そこで上と同様に γ 次の小さい三角行列が存在するから此を引去る。以下同様にすると $C^{-1}BC$ は β 次，γ 次，…… の小さい三角行列の直和である事が分る。勿論 $\alpha=\beta+\gamma+\cdots\cdots$ である。之等の $\beta\geqq\gamma\geqq\cdots\cdots$ の列は最初与えられた A により一定のものである事はいうまでもない。そしてこれらの三角行列は単因子論に於ける固有値 λ_i に付属する単純単因子(6)に該当するものであることは見易い。

以上の全演算を $B_{ii}-\lambda_i E$ に施し

$$C^{-1}(B_{ii}-\lambda_i E)C+\lambda_i E=C^{-1}B_{ii}C$$

を作れば

$$J_{ii}=\begin{pmatrix}
\lambda_i & 0 & & & & & & & \\
 & \lambda_i & 1 & \beta-1\text{個} & & & & & \\
 & & \lambda_i & 1 & & & & & \\
 & & & \ddots & 1 & & & & \\
 & & & & \lambda_i & 0 & & & \\
 & & & & & \lambda_i & 1 & \gamma-1\text{個} & \\
 & & & & & & \ddots & 1 & \\
 & & & & & & & \lambda_i & 1 \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & \lambda_i
\end{pmatrix}$$

の形となり此等の行列の直和即

$$J=\begin{pmatrix}
J_{11} & & & \\
 & J_{22} & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & J_{ss}
\end{pmatrix}$$

が所謂 Jordan 標準形である。 (終)

文　　献

(1) Schreier-Sperner; Analytische Geometrie P.67

(2) 藤原松三郎 ; 行列及行列式 P.184

(3) 遠 山　啓 ; 行列論 P.109

(4) Wedderburn ; Lectures on Matrices P.169

(5) 浅 野 啓 三 ; 線型代数学提要 P.69

(6) 藤原松三郎 ; 行列及行列式 P.213