準群についての二,三の注意

山　田　深　雪

§ 1. Introduction

準群 G_1, G_2, …… G_n がある時，$G=\left\{(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \mid x_i \in G_i\right\}$ に対して積を次の如く定義する。即ち

$$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)=(x_1 y_1, x_2 y_2, \cdots\cdots, x_n y_n)$$

然る時はGは又準群となる。かゝる準群をG_1, G_2, G_3, ……, G_n の直積と云う。又準群Gが群G'と right (left) singular monoid I [即ち $I \ni x, y$ ならば常に $xy=y(xy=x)$ なる準群] との直積に同型なる時Gを right (left) $\mathcal{T}$-group と云ひ，準群Gが right singular monoid, left singular monoid, group の直積と同型な時Gを quasi-$\mathcal{T}$-group と云ふ。さて準群Gが次の条件

(A_1);
(Ⅰ) Gには少なくとも一つ左（右）単位元が存在する。その一つを e とすれば
(Ⅱ) Gに含まれる任意のaに対し $aa^{-1}=e$ ($a^{-1}a=e$) なる右（左）逆元が存在する。

を満足する時，その時に限りGは right (left) $\mathcal{T}$-group となる事は既に二,三の論文中に見られる所であり，(1)(2) 又筆者は先に数学紙上談話に於て，準群Gが

(A_2);
(Ⅰ) Gは少くとも一つ middle unit をもち，その一つを e とすれば
(Ⅱ) 任意の a に対して，$eay=yae=e$, $aya=a$ を満す y が存在する。

を満足する時，その時に限りGは quasi-$\mathcal{T}$-group となる事を示した。(2) 但し e が準群 G の middle unit であるとは，$e^2=e$ で $G \ni x, y$ とする時 $xey=xy$ が成立する様な元である。そこで $*-$ operator をもつ準群 $*-$ monoid(3) とか regularity, coregularity を満足する準群とかを調べる場合に於て，あらかじめ条件 (A_1), (A_2) と $*-$ operator, regularity, coregularity との間の関係が明らかにされているならば，その type を決定する上非常に好都合であると思われる。よつて以下それ等の間の関係について記述してみたいと思う。

§ 2. $\mathcal{T}$-group と regularity, coregularity, 及び dual endomorphism との関係

[Lemma 1] rigt (left) $\mathcal{T}$-group・G は次の条件を満足する。

(B_1);
(Ⅰ) $G \ni a$ なる任意の a に対し $aG=G$ ($Ga=G$)。　left (right) coregularity
(Ⅱ) $G \ni a$ なる任意の a に対し，$ax=ay$ ($xa=ya$) ならば $x=y$ が成立す。
left (right) regularity

[証明] right $\mathcal{T}$-group の時のみ証明すればよいが，G が right $\mathcal{T}$-group ならば G は条件 (A_1) をみたすから (A_1) を仮定する時 (B_1) の成立する事を云えばよい。(Ⅰ) 任意の a を与

える時 $aG\subset G$ は明らか。故に逆を云ふ。仮定より $aa^{-1}=e$（eはGに於ける左単位元の一つ）なる a^{-1} が存在する。$b\in G$ なる任意の b をとれば $aa^{-1}b=eb=b$。依つて $b\in aG$。即ち $aG=G$。

（Ⅱ） 先づ Ge が群をなす事を云う。

(a) $Ge\in ae,\ be$ ならば $aebe=abe\in Ge$

(b) $e=e\circ e\in Ge$。且つ $Ge\ni ae$ なる時 $ae\circ e=ae$ なる故 e は Ge に於ける単位元。

(c) $Ge\ni ae$ とする。$aa^{-1}=e$ なる a^{-1} に対し，$ae\circ a^{-1}e=aa^{-1}e=e$ なる故 $a^{-1}e$ は Ge に於ける右逆元である。

即ち Ge は群をなす。勿論 ae の逆元は $a^{-1}e$ である。さて $ax=ay$ なる時 $a(ex)=a(ey)$。これより $a^{-1}e\cdot aex=a^{-1}e\cdot aey$ よつて $ex=ey$。即ち $x=y$。

［Lemma 2］left (right) regular, left (right) coregular な準群Gに於ては次の条件が成立する。任意の a に対し a^* が定まり

$$(C_1)\cdot(\mathrm{I})\ (ab)^*=b^*a^*$$
$$,(\mathrm{II})\ (a^*a)b=(aa^*)b=b\ [b\,(a^*a)=b\,(aa^*)=b]$$

［証明］ dualに証明出来るから left regular, left coregular な時のみ証明する。任意の a に対し $aG=G$ なる事から $ae_a=a$ なる e_a が存在する。かゝる e_a の一つを特に e とかく事とする。$aea=a\cdot a$ なる故 $ea=a$。即ち e は $ea=ae=a$ を満足する元である。さて任意の $b\in G$ に対して $ac=b$ なる c が存在し，かゝる c について $eac=ac$。故に $eb=b$。之は e が左単位元なる事を示す。さて $x\in G$ なる x に対し，$xe_x=x$ なる e_x が唯一つ存在し，且つかゝる e_x に対して，$xx^{-1}_{e_x}=e_x$ なる $x^{-1}_{e_x}$ が unique に定まる事が容易にわかるから今 $x^{-1}_{e_x}\cdot e=x^*$ とおけば x^* は x によつて一意的に決定する元である。

（Ⅱ） $(b^*b)\,\mathrm{c}=(b^{-1}_{e_b}e\cdot b)\,\mathrm{c}=(b^{-1}_{e_b}\cdot b)\,\mathrm{c}$

さて $(b^{-1}_{e_b}\cdot b)=e_b$ である。何者。e_b は前述の e と同様左単位なる事は明らかである。$bb^{-1}_{e_b}=e_b$ なる故 $b(b^{-1}_{e_b}\cdot b)=e_b b=b_{e_b}$。即ち $(b^*b)\,\mathrm{c}=\mathrm{c}$ が成立す。又容易に $(bb^*)\,\mathrm{c}=\mathrm{c}$ なる事もわかる（省略）。

（Ⅰ） 次に $(ab)^*=b^*a^*$ を云う。

$$b^*a^*=(b^{-1}_{e_b}\cdot e)\,(a^{-1}_{e_a}\cdot e)=b^{-1}_{e_b}\ a^{-1}_{e_a}\cdot e=b^{-1}_{e_b}\cdot a^{-1}_{e_b}\cdot(e_{ab}\cdot e)=(b^{-1}_{e_b}\cdot a^{-1}_{e_a}\cdot e_{ab})\cdot e$$

一方 $(ab)\,(b^{-1}_{e_b}\,a^{-1}_{e_a}\,e_{ab})=a_{e_b}\,a^{-1}_{e_a}\,e_{ab}=e_{ab}$ 故に $b^{-1}_{e_b}\,a^{-1}_{e_a}\,e_{ab}=(ab)^{-1}_{e_{ab}}$

よつて $b^*a^*=(ab)^{-1}_{e_{ab}}\cdot e=(ab)^*$

［註］ Lemma 2 より $\varphi(a)=a^*$ とすれば φ はGからGの中への一意写像で且つ

$$\varphi(ab)=(ab)^*=b^*a^*=\varphi(b)\varphi(a)$$

なる故，φ は dual endomorphism である。又かゝる dual endomorphism φ は

$$a\cdot\varphi(a)=aa^*,\quad \varphi(a)\,a=a^*a$$

であるから $a\varphi(a)$ 及び $\varphi(a)a$ が共に左単位元となる。此の様な φ を left unitary dual endomorphism と云う。逆に準群Gに対して，GからGの中への left unitary dual endomorphism φ があるとすれば任意の $a\in G$ に対して $\varphi(a)=a^*$ とおけばかゝる $*$—operator は Lemma 2 を満足する。よつて Lemma 2 は次の様に言換えられる。即ち

left (right) regular, left (right) coregular な準群 G に於ては left (right) unitary dual endomorphism が存在する。

[Lemma 3] 準群Gが条件 (C_1) を満せば right (left) $\mathfrak{T}$-group である。換言すればGに於ける left (right) unitary dual endomorphism が存在すれば G は right (left) $\mathfrak{T}$-group である。

[証明] Gの任意の元 a について，aa^* 及び a^*a が左単位元となる場合 right $\mathfrak{T}$-group に G がなる事を云う。(aa^* 及び a^*a が右単位元となる場合，G が left $\mathfrak{T}$-group となる事の証明は全くdualに出来るから)。

(a) 先づ $G\ni a$ なる一つの a を fix して考える。
a^*a は左単位元である故之を e とす。

(b) $b\in G$ なる任意の b をとれば
$b(b^*a^*a)=(bb^*)(a^*a)=a^*a=e$。即ち$G$は b に対する右逆元を持つことになる。

(a), (b)によりGには左単位元eがあつて，任意の a に対し右逆元が存在する事が云われたから従つて条件 (A_1) が成立する事となり Gは right $\mathfrak{T}$-group である。

[註] 実際には (C_1) の (Ⅱ) のみを仮定すればGが right (left) $\mathfrak{T}$-group となると云う事が云われる。

以上 [Lemma 1], [Lemma 2], [Lemma 3] をまとめて次の [Theorem 1] を得る。

[Theorem 1] 準群Gに関しては次の3条件は equivalent である。

(A_1); (Ⅰ) G には少なくとも一つ左 (右) 単位元が存在する。その一つをeとすれば
(Ⅱ) G に含まれる任意の a に対して $aa^{-1}=e\,(a^{-1}a=e)$ なる右 (左) 逆元が存在する。

(B_1); (Ⅰ) $G\ni a$ なる任意の a に対して $aG=G\,(Ga=G)$
(Ⅱ) $G\ni a$ なる任意の a に対し，$ax=ay\ (xa=ya)$ ならば $x=y$ が成立す。

任意の a に対し a^* が定まり

(C_1); (Ⅰ) $(ab)^*=b^*a^*$
(Ⅱ) $(a^*a)b=(aa^*)b=b\,[b(a^*a)=b(aa^*)=b]$

更に上の [Theorem 1] を言換えれば次の如くなる。

[Theorem 1′] 準群Gに関しては次の3条件はequivalentである。

Ⅰ Gは right (left) $\mathfrak{T}$-group

Ⅱ Gは left (right) regular 且つ left (right) coregular

Ⅲ Gに於ける left (right) unitary dual endomorphism が存在する。

§ 3. quasi-γ-group と $*$-monoid

〔Definition〕 $*$-operator の定義せられた準群 G が

(Ⅰ) 任意の $a\in G$ なる a に対し，$(a^*)^*=a$

(Ⅱ) 任意の $a,b\in G$ なる a,b に対し，$(ab)^*=b^*a^*$

を満足する時，G を $*$-monoid と云う。

特に，任意の $a\in G$ なる a に対し，aa^* が常に middle unit をなす様な $*$-monoid G を semi-unitary $*$-monoid と云う(4)。

〔Lemma 4〕 準群 G が quasi-γ-group ならば G は次の条件を満足する。

(C_2)；任意の a に対して a^* が定まり

(Ⅰ) $G\ni x$ ならば $xx^*x=x$

(Ⅱ) $G\ni x,y,z$ ならば $x(yy^*)z=x(y^*y)z=xz$

〔証明〕 G が quasi-γ-group であるから

(Ⅰ) G には少なくとも一つ middle nuit が存在し，その一つを e とすれば

(Ⅱ) 任意の a に対して $eay=yae=e,\ aya=a$ なる y が存在する。

が成立している(2)。さて $x\in G$ とすれば上より，

$$exz=zxe=e,\ xzx=x$$

なる z が存在する故，$eze=x^*$ とおけば x^* は x により一意的に定まる。何者。今他の一つの z' により $exz'=z'xe=e,\ xz'x=x$ となつているとすれば $z(exz')=ze$ よつて $zxz'=ze$。即ち $(zxe)z'=ze$ よつて $ez'=ze$ 之は $ez'e=eze$ を意味する。故に x^* は x により一意的に定まる。

(Ⅰ) $xx^*x=x(eze)x=xzx=x$ (但し上の如き z)

(Ⅱ) $a(xx^*)b=a(xeze)b=a\,xzb=a(exz)b=aeb=ab$

$a(x^*x)b=a(ezex)b=azxb=a(zxe)b=aeb=ab$

よつて〔Lemma 4〕は成立する。

〔Lemma 4〕と逆に

〔Lemma 5〕 準群 G が条件 (C_2) を満足すれば G は quasi-γ-group である。

〔証明〕 $G\ni a$ なる a をとり，$a^*a=e$ とおく。而る時は

(Ⅰ) $(a^*a)(a^*a)=a^*(aa^*a)=a^*a$ (巾等元)

而も，$b,c\in G$ なる b,c に対し $b(a^*a)c=bc$ だから e は middle unit である。

(Ⅱ) $b\in G$ なる時，$eb^*e=y$ とすれば

$$eby=ebeb^*e=ebb^*e=e^2=e$$

$$ybe=eb^*ebe=eb^*be=e^2=e$$

$$byb=beb^*eb=bb^*b=b$$

よつてGは(A_2)をみたすから quasi-$\mathcal{T}$-group である。

〔Lemma4〕,〔Lemma5〕より直に次の〔Theorem2〕を得る。

〔Theorem2〕 準群Gが quasi-$\mathcal{T}$-group である時，その時に限り(C_2)が成立する。

〔Definition〕 準群Gが群 G' と right singular monoid I 及びそれと dual isomorphic な left singular monoid J の直積に同型なる時，Gを symmetric quasi-$\mathcal{T}$-group[4] と云う。

〔Theorem3〕 Semiunitary*-monoid G において，任意の a に対し常に $aa^*a=a$ が成立するならばGは symmetric quasi-$\mathcal{T}$-group である。

〔証明〕〔Theorem2〕よりGが quasi-$\mathcal{T}$-group なる事は明らか。symmetric なる事は次の通りである。Gは quasi-$\mathcal{T}$-groupなる故任意のGに含まれる maximal group G'，maximal right singular monoid R, maximal left singular monoid L の直積(G', R, L)に同型である[2]。

さて $R^*=\{x^*|x\in R\}$ とすれば R^* はGに於ける maximal left singular monoid とる。何者。$R^*\ni x^*$, y^* とする時 $x^*y^*=(yx)^*=x^*$。よつて left singular 更に今 $A\supset R^*$ なる，Gに含まれる left singular monoid A があるとすれば $A^*=\{x^*|x\in A\}$ とする時，上と同様 A^* は right singular monoid となる事が容易に知られる。$A^*\supset R$ なる故，Rが maximal な right singular monoidである事と考え合せて$A^*=R$を得る。よつて$A=R^*$。即ち之はR^*が maximal left singular monoid である事を示す。故にGは G',R,R^* の直積(G',R,R^*)に同型となる。然るに一方RとR^*は$R\ni x$ に対し $x^*\in R^*$ を対応させる対応関係により dual isomorphic である事が容易に知られるから結局Gは symmetric quasi-$\mathcal{T}$-group である。

文　　献

〔1〕 増田勝彦；群についての二，三の注意　全国紙上談話第2輯，11号

〔2〕 山田深雪； ある準群の構造について　数学紙上談話 No21 (1954)

〔3〕 木村直樹； *—manoid について　数学紙上談話 No18 (1954)

〔4〕 山田深雪； Semiunitay*—monoid について　数学紙上談話 (1955) (近刊)