Range に関する統計量に依る一様性検定について

田　村　亮　二

§ 1. は し が き

分散分析或は一様性検定は普通 F- 統計量を利用して行はれるが，最近種々の理由から Range を用ひての検定方法が研究されている。二つの母集団についての場合は夫々の Sample range の比によつて一様性検定が可能であることは既に証明されてゐる更に実用化もされてゐる。最近橋爪浅治氏は〔1〕で分散分析に於いて誤差項の一様分布を仮定して（之は正規分布の代用になりうる）$z=min(range)/max(range)$ によりF-検定に代えることを論じている。代し之は唯二つの range だけにしか関係がない。そこで本稿ではすべての range に関係した統計量 $z=\Sigma(range)/max(range)$ を採用することを提唱する。

先ず一様性分布を仮定して $z=\Sigma(range)/max(range)$ の確率密度函数を求めること。次に指数分布を仮定して $z=min\ (range)/max\ (range)$ による検定及びある対立仮説に対しての powerfunetion を求めることについての解析を行ふ。〔1〕では power funetion は求めてない。統計量 z が利用出来る数学的模型は次の二つ。(a) (o,a_i) で一様分布している m 個の母集団 π_i からの大きさ n_i の random sample を夫々 $O_{ni}^{(i)}$ $(z_{ia}\ a=1,2,\cdots\cdots,n_i)$ $i=1,2,\cdots\cdots,m$, とし之により歸無仮説 $H_o:\ a_i=a\quad i=1,2,\cdots\cdots,m$ を検定すという問題。

(b) 確率変数 x_{ij} は一般に.

$x_{ij}=m+U_i+V_j+\varepsilon_{ij}$ で表されるとする

m, U_i, は V_j 未知常数且 $\Sigma U_i=\Sigma V_j=o$（之は一般性を失うことなし）こゝで ε_{ij} は (o,a) で一様分布する確率変数。然るとき $H_o:U_i=o$ 又は $H_1:\ V_j=o$ といふ仮説を検定するといふ普通の実験計画の問題。

以上 (a) (b) に対しては全く同様に取扱ふことが出来るので一括して §2. では $Z=\Sigma$ $\lambda ange)/max(range)$ を利用しての問題を § 3. では橋爪氏の統計量を用ひた時の解析をする。

§ 2. Z の 分 布

母集団 π_i の分布型は $(o,\ a_i$ で一様分布しているとし，それからの大きさ n の random sample を 夫々

$O_{ni}^{(i)}$ $(x_{ia}\ a=1,2,\cdots\cdots,n_i)$ とす，然し各 sample size $n_i=n$ と考えても方法は全く同じから各 sample の大きさは n とす

$O_n^{(i)}$ の range R の確率密度函数は $\dfrac{n(n-1)}{a_i^n}R_i^{(n-2)}(a_i-R_i)$ $(=g_i(R_i))$

今 $\dfrac{R_i}{a_i}y_i$ とすれば y_i の密度函数は $n(n-1)\ y_i^{(n-2)}(1-y_i)$ となる

仮説 $H_o:\ a_i=a$ の下ではすべての y_i の密度函数は $g(y)=n(n-1y^{(n-2)}(1-y)$ となり，且 y_i は独立であるから $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_i$ は $g(y)$ なる密度函数をもつ母集団からの random sample と考えてよし。

$$Z=\sum_{i=1}^{m} R_i \;/ \max_i(R_i)=\Sigma\,(R_i/a_i)/\max_i\,(R_i/a_i)$$

依つて Z の分布を求めるのは $\Sigma y_i/max(y_i)$ の分布を求めることに帰着し，このために先ず特性函数を導く。特性函数 $\varphi(t)$ は

$$\varphi(t)=E(e^{itZ})=me^{5t}\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1 e^{lt\sum^{m-1} yi/y}\,g(y_1)\cdots\cdots g(y_j)\;g(y)dy_1\cdots\cdots dy_j dy$$

$$=me^{it}\int_0^1 g(y)dy\Big(\int_0^1 e^{it\frac{y_l}{y}}\,g(y_l)dy\;\Big)^{m-1}$$

$\dfrac{y_l}{y}=\alpha,\quad y=\beta$ なる変換で

$$=me^{it}\int_0^1 g(\beta)\,d\beta\,\Big(\beta\int_0^1 e^{itd}\;g(a\beta)da\Big)^{m-1}$$

後で Laplace 変換を利用するため，

$$\varphi(it)=me^{-t}\int_0^1 \varphi(B)^{m-1}\;g(\beta)\,a\beta$$

$$\psi(\beta)=\beta\int_0^1 e^{-at}g(a\beta)da$$

$\psi(\beta)$ を計算すれば

$$\psi(\beta)=n!\,t^{-(n-1)}\beta^{n-1}\Big\{1-p_{n-1}(t)e^{-t}\Big\}\Big\{\{1-(n-1)\;\frac{\beta}{t}\Big\}$$

但　$p_n(t)=\displaystyle\sum_{ljo}^{n}\frac{t^j}{j!}$，　且 $p_{n-2}(t)\fallingdotseq p_{n-1}(t)$ とす，

$p_{n-2}(t)\fallingdotseq p_{n-1}\,(t)$ としない時も全く同様にして解析出来る。

$$\varphi(\imath t=mn(n-1)\;(n!)^{m-1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}(n-1)^{j-1}\binom{m-1}{j-1}\big(1-e^{-t}p_{n-1}(t)\big)^{m-1}e^{-t}$$

$$\times\int_0^1\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{(n-1)(m-1)+j-1}(1-\beta)\,\beta^{n-2}\;da$$

$$=mn\,(n-1)\,(n!)^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\,(-1)^{j-1}(n-1)^{j-1}\binom{m-1}{j-1}\frac{1}{\{m(n-1)+j-1\}\{m(n-1)+j-2\}}$$

$$\times\frac{e^{-t}}{t^{(n-1)(m-1)+j-1}}\big(1-e^{-t}p_{m-1}\;(t)\big)^{m-1}$$

故に Z の密度函数 $f(Z)$ は

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\imath}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\varphi(it)e^{Zt}\;dt$$ 　　c は 収斂座標

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{Z(1-r)}Z^{-r}\,dZ=\begin{cases}\dfrac{(1-r)^{\alpha-1}}{\Gamma\,(\alpha)} & o\leqq r<1\\[2ex] o & r>o\end{cases}$$

に注意すれば

$$f(Z)=mn(n!)^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{r=0}^{(n-2)(l-1)}(-1)^{j+1}(n-1)^{j-1}a_r^{(l-1)}\binom{m-1}{j-1}\binom{m-1}{l-1}$$

$$\times \frac{Z^{(n-1)(m-1+(j-1)-r-1}}{\{m(n-1)+j-1\}\{m(n-1)+j-2\}} \cdot \frac{(1-\frac{l}{Z})^{(n-1)(m-1)+j-r-2}}{\Gamma((n-)(m-1)+j-1-r)}$$

但し　$a_r^{(l)}$　は　$P_{n-2}^{l-1}(t) = \sum_{r=o}^{(n-2)(l-1)} a_r^{(l-1)} t^r$　で定まる常数，

この $f(Z)$ は形は相当複雑なものであるが実際問題では m, n 共に小さい（1桁が普通）から比較的簡単になる。

依つて，　$\int_o^{z\alpha} f(Z)dZ = \alpha$　により棄却域 w を求め，之により検定を行ひ得る。

§ 3. min (range) / max (range) による検定

§2. と同様な模型で今 π_i の分布型を

$$f_i(x;\ ai) = \begin{cases} a_i e^{-aix} & for\quad x \geqq o \\ o & for\quad x < o \end{cases} \qquad a > o$$

とする。

然るとき π_i からの *random sample* O_n の *range* の密度函数を $g_i(R_i)$ とす

$u = \max_i x_i$　，　$v = \min_i x_i$　の同時分布は

$$n(n-1)\ f(u)\ f(v)\ (\int_v^u f(x)\,dx)^{n-2}$$

$u-v=R,\ v=s$ で変換し，s で *integnate* することにより

$$g_1(R) = (n-1)a_i\ e^{-a_iR}\ (1-e^{-a_iR})^{n-2}$$

aR を考えることにより　$g_1(R)$ は $g(R)=(n-1)\,e^{-R}\,(1-e^{-R})^{n-2}$ に変る，

今　H_o ： $a_i = a$ といふ仮説の下で $z = \min R_i / \max R_i$ は $\min_i a_i R_i / \max\ a_i R^i$ を同じから $R_1, \cdots\cdots, R_m$ は $g(R)$ なる密度函数をもつ母集団からの *random sanple* と考えられる。

$\max R_i = \beta,\ \min R_i = \alpha$　とし，α, β の同時分布 $f(\alpha, \beta)$ は

$$f(\alpha,\ \beta) = m(m-1)g(\alpha)g(\beta)\{\int_\alpha^\beta (n-1)e^{-y}(1-e^{-y})^{n-2}\alpha y\}^{m-2}$$

$$= m(m-1)(n-1)^m e^{-(\alpha+\beta)}\ (1-e^{-2})^{n-2}(1-e^{-\beta})^{n-2}\{\int_\alpha^\beta e^{-y}(1-e^{-y})^{n-2}ay\}^{m-2}$$

こゝで　$\int_\alpha^\beta$　内を二項展開することにより

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{(n-1)(m-j)} \sum_{l=1}^{j(n-1)} (-1)^{j+k+l-1} \binom{m-2}{l-1} \binom{(n-1)(m-i)-1}{k-1} \binom{j(n-1)-1}{l-1} e^{-(k\beta+l\alpha)}$$

依つて　$\frac{\alpha}{\beta} = Z,\ \beta = u$ なる変換により Z の密度函数は

$$m(m-1)(n-1)^2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{(n-1)(m-i)} \sum_{j-1}^{j(m-)} (-1)^{j+k+l-1} \binom{m-2}{j-1} \binom{(n-1)(m-j)-1}{k-1} \binom{j(n-1)-1}{l-1} \frac{1}{(k+lZ)^2}$$

§2. と同様に z の棄却域を作ることに依り，検定が可能になる。

§ 4. Power function

sample range を大きさの順に並べ記号を書きかえて

$R_1 \leqq R_2 \leqq \cdots\cdots \leqq R_m$ とする，そのとき R_i の同時分布は，

$$m!\,(n-1)^m \prod_{n=1}^{m} a_i \quad e^{-\sum\limits_{1}^{m} a_i R_i} \prod_{i=1}^{m} (1-e^{-a_i R_i})^{n-2}$$

今対立仮説 H^1 ： $a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a^{m-1} \neq a_m$

に対する H_0 の test の power function を求める，他の無数の対立仮説に対しても解析は同じ方法である，R_1, R_m の同時分布を $f(R_1, R_m)$とすると

$$f\,(R^1, R_m) = m!\,(n-1)^m\, a^{m-1}\, am\, e^{-a\,R1 - am\,Rm}\, (1e^{-aR6})^{n-2}\, (1-e^{-amRm})^{n-2}$$

$$\times \int_{R1}^{Rm} \cdots\cdots \int_{R1}^{Rm} e^{-\sum\limits_{2}^{m-1} aR_{m-2}} \prod_{2} (1-e^{-aRi})^{n-2} dR_2 \cdots\cdots dR_{m-1}$$

$$= Ce^{-aR1-amRm}\, \{(1-e^{-aR1}(1-e^{-amRm})\}^{n-2} \{(1-e^{-aRm})^{n-1} - (1-e^{-aR1})^{n-1}\}^{m-2}$$

$\dfrac{R_1}{R^m} = z$ とおけば Z の分布 $f(Z)$ は

$$f(Z) = C\int_0^\infty u\, e^{-auZ-amu} \{(1-e^{-auZ})^{n-2}(1-e^{-amu})^{n-2}\} \{(1-e^{-au})^{n-1} - (1-e^{-auZ})^{n-1}\}^{m-2} du$$

$P\,(u,\ a) = (1-e^{-au})$ とおく，

$$I_n\,(u,\ a) = \int_0^\infty u\, P^n\,(u,\ a)\, du = \frac{1}{a^2} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

$$I^{\lambda\mu\nu}(u,\ a,\ u,\ a_m,\ uZ,\ a) = \int_0^\infty u P^\lambda(u,\ a) P^\mu(u,\ a_m) P^\nu(uZ,\ a) au$$

$$= \sum_{\lambda=o}^{\lambda} \sum_{l=o}^{\mu} \sum_{r=o}^{\nu} \binom{\lambda}{k}\binom{\mu}{r}\binom{\nu}{r} \frac{(-1)^{k+l+n}}{(ak+a_m l+arZ)^2}$$

故に

$$f(Z) = C \sum_{j=2}^{m} (-1)^j \binom{m-2}{j-2} \Big[I_{\lambda(j)\cdot\mu(j)\cdot(n-2)}\ (uZ,\ a,\ u,\ a,\ u,\ am) - I_{\lambda+i.\mu.(n-1)} - I_{\lambda.\mu.n-1}$$

$$+ I_{\lambda+1.\mu.n-2} \Big]$$

但 $\lambda(j) = (n-2) + (n-1)(j-2)$

$\pi(j) = (n-1)(m-j)$

この $f(Z)$ は parmetr を a, a_m と二つ含んでゐるが

H^l して $a = \sigma a_m$ の形を採用すれば σ だけとなる。

§3. からの棄却域 $(o,\ z_\alpha)$ を利用して power function $P(\sigma)$ は

$P(\sigma) = \displaystyle\int_0^{Z\alpha} f(Z) dZ$ で求められ σ の函数

として検定力曲線をかくことも可能になる。

最後に此の小論をかくに当つて助言をいたゞいた和歌山大学池田一貞氏に感謝いたします。

〔1〕 橋爪浅治：実験計画について，「数学」Vol3. No. 4. 1951.

〔2〕 D. A. Daring : Onthe test for homogeneity and extrme valve Ann. Math. Statit. Vol 23. No. 3. 1952.