

## 意欲的に学習する数学科学習指導法の研究

－小集団活動を取り入れた課題学習を通して－

西 田 修

### 1 主題設定の理由

#### (1) 社会的要請から

今日の社会は、急速な科学技術の進歩により、経済的発展・国際化や情報化の進展などの著しい変化を見せながら21世紀を迎えている。加えて、これらの発展の中にも最近の景気の低迷や金融不安などの問題を克服しながら、経済的にも技術的にも世界の牽引者として、我が国の一層の進展が望まれている。このような社会を発展させていくためには、これからの社会を担うであろう生徒が、困難な場面に直面してもその解決を目指し、意欲的に取り組むことが大切である。その際、仲間と協力しながら問題解決していく力も必要になってくる。また、問題を解決していく場面では、その問題が持っているいろいろな情報を取捨選択して有用な情報をいかに活用して解決へと結びつけるかといった情報活用能力や、その解決方法を効率よく見つけ出すために論理的に思考することが大切である。

このような状況から、知識・技能等を身につける過程において、自ら学ぶ意欲と自分で考え、判断し、行動できる力（いわゆる、[生きる力]）が、これからの社会を生きていく上で必要になってくると考えられる。以上のことより、本主題を研究することは意義があると考ええる。

#### (2) 数学科の目標から

平成14年（2002年）度から施行されている中学校学習指導要領の数学科の目標は「数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる」である。この中で、特に重視されなければならないことは、数学を進んで活用する態度をどのように育てていくかということである。そのためには、数学的な表現や処理、事象の数理的な考察の過程において生徒が数学的な見方や考え方のよさを知ることが大切であるとされている。

そこで、生徒一人一人の学ぼうとする意欲を高め、個性を生かしながら学習を進めていくことができる場面を設定する必要がある。さらに、問題解決の過程において、自分の考えで解決することを中心におきながらも、仲間の考えを参考にしながら自らの考えをより高いものへと磨き上げていくことにより、数学的な見方や考え方を育てていくことができると考える。

#### (3) 課題学習の指導法の課題から

これまでの授業においては、生徒の主体的な学習を促し、数学的な見方や考え方の育成を図るために、課題学習の機会を見つけ取り組んできた。その取組では、日常の事象を中心に課題として提示し、その事象の中の性質を既習の学習内容を使って追究することが中心であった。この取組を通して、身の回りの事象と数学の関係に興味や関心を持たせることができたと考えられる。しかし、生徒全員が意欲を持って問題解決にあたり達成感や成就感までは味わえたとはいえない。

これらの点をふまえ、意欲的に学習に取り組むことができる学習指導法を研究することは、自分にとって重要な課題である。

### 2 研究の目標

意欲的な学習活動が行える小集団活動を取り入れた課題学習のあり方を究明する。

### 3 研究の仮説

課題学習における発展の段階で、生徒自身に自らの課題を選択させ、同じ問題に取り組む生徒で小集団を編制し、問題の解決をさせれば、問題解決意欲が高まり数学的な見方や考え方を育てることができるであろう。

### 4 研究の構想

#### (1) 研究の内容

- 意欲的に学習が行える小集団編制のあり方
- 小集団活動を取り入れた課題学習の学習過程の確立

#### (2) 検証方法

- 小集団活動が、意欲的な学習を行うために有効に働いたことを学習プリントや授業後の感想を通して分析し検証する。
- 小集団活動を通して、生徒の数学的な見方や考え方が身についたことを学習プリントの分析より検証する。

#### (3) 研究の対象

島根大学教育学部附属中学校 2年3組 男子20名 女子20名 計40名

### 5 生徒の実態調査

#### (1) 学習意欲について

生徒の数学に関する意識を、4月当初まだ、数学の授業をする前に簡単なアンケートを行った。なお、この調査対象学級は、初めて受け持つクラスである。

○調査対象 2年3組 40名

表1 第1回意識調査

項 目	いいえ	はい
	1-2	3-4
1 数学は大切と思いますか。	3.2	
2 数学は好きですか。	2.7	

表2 学習内容の好き嫌い

単 元 名	好 き		嫌 い	
	(人)	(%)	(人)	(%)
正の数・負の数	26	65	4	10
文字の式	22	55	10	25
方程式	24	60	12	30
比例と反比例	13	33	13	33
平面図形	12	30	15	38
空間図形	8	20	23	58

「数学が大切と思う」理由として、生徒は、「日常の生活の中でかけ算やわり算や方程式も時々使うことがあるので、勉強していたら便利と思う」、「買い物するときなど頭の中で計算しながら買えるから」といった数学の実利的な面の理由で数学の大切さを意識しているが、思考力や論理性といった面から数学の有用性を意識している生徒は、わずか2名しかいない。

「数学が好きである」理由として、「計算が得意だから」、「必ず答えが出てくるから」といったものが多かったが、その反面「嫌いである」理由にも「計算がめんどくさい」、「じっくり時間をかけて考えるのが苦手」といったものが多かった。

以上のことより、生徒は数学の有用性についての認識が浅く、筋道を立てて自分の考えを大切にしながら、問題を解決していこうとする態度が身につけていないことが考察される。

また、表2より、生徒は、図形領域よりも数式領域を好むこととその学習内容からも、教えられた解法で問題解決することには慣れているが、図形領域で大切となる論理的な思考や判断することを苦手とする生徒が、多いことが予想された。

## (2) 小集団活動について

生徒からの聞き取り調査によれば、1学年時の数学授業では、班などで学習した経験はあるものの、それほど多くはない。座席の近い生徒同士での教え合いなどは、比較的行われていたようである。数学における班学習において、意図的に、かつ、継続的に編制された小集団での活動はないようだ。

## 6 実践にあたって

### (1) 学習過程について

小集団活動を取り入れた課題学習の学習過程における生徒の活動を表3のように考えている。

表3 小集団活動を取り入れた課題学習における学習活動

学習過程	学 習 活 動
課 題 把 握	○課題の意味を明確にとらえる。 ○試行錯誤しながら、操作的な活動をする。
自 力 解 決	○共通課題を生徒各自で解決する。
比 較 検 討	○生徒各自で見つけ出した解決方法を発表を通して、共通理解する。 ○多様な考え方を理解する。
発 展	○自分の問題を選択する。 ○小集団の中で、互いに協力しながら、問題解決を行う。

### (2) 小集団活動を取り入れた課題学習について

本研究では、「図形の調べ方」の単元において、小集団活動を取り入れた課題学習を設定する。

### (3) 手立てについて

小集団活動を取り入れた課題学習を、より効果的に進めるために、学習過程の各段階に、表4のような手立てをとっていくことにする。

表4 課題学習の学習過程における手立て

学習過程	手 立 て
課題把握	○学ぶことの楽しさや解決したときに成就感を味わわせることが可能な課題を取り扱う。 ○課題の意味の把握や課題の中の数学的な関係を見出しやすいように、操作的な活動を取り入れる。
自力解決	○共通課題を設定して、問題解決するための時間を十分確保する。
比較検討	○生徒各自が見つけ出した解決方法を解決に利用した手段の観点から整理して提示する。 ○それぞれの解法の利点を補説する。
発 展	○発展課題を生徒自ら選択させ、同じ問題を解決するもの同士で小集団を編制する。 ○各小集団に解法を発表させることを告げておく。

## 7 実践とその考察

### (1) 単元 (題材)

単元名 図形の調べ方 (課題学習「星形多角形の角の和」)

### (2) 指導計画

仮説検証の実践として、単元「図形の調べ方」において、課題学習として、次の課題をもとに4時間の授業を設定した。この学習のねらいは、多様な解決方法とそれに至る論理的な考え方のよさを味わわせることと、問題を発展的に取り扱うことを体験させることである。

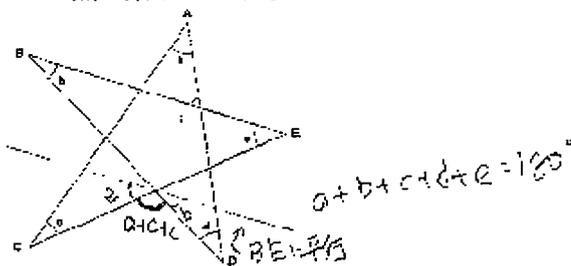
#### 【課題】

星形多角形の角の和を求めよう。

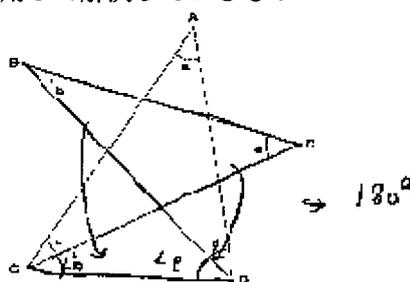
### (3) 授業の実際

まず、課題学習をはじめる前に、角度について復習を行った。ここでは、基本図形を板書しながら、生徒に発問して確認させた。次に、問題把握の段階として、星形五角形の角の和を予測させたり、分度器で実測させたりした。ここでは、生徒は $180^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $270^\circ$ といった角度を予測した。実際に実測して $180^\circ$ になることを不思議に感じ、すぐにその問題を解決しようとする生徒もおり、問題解決の意欲も高まっていた。そこで、「他の星形五角形でも角の和が $180^\circ$ であるか」といった発問を行い、問題解決の必要性を感じさせた。「星形五角形の角の和」を共通問題として提示し、生徒各自に自力解決させた。解決の見通しが見つからない生徒には、図形の根拠集をヒントカードで与えたり、着目する図形を示したりした。次の資料は、生徒の自力解決の一部である。

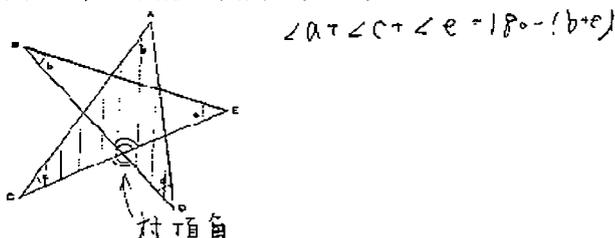
ア 平行線と角の性質を利用して、5つの角を1点に集めているもの



イ 「ちょうちょ形」を見つけ出し、その性質を利用して解決しているもの



ウ 「やじり形」の性質から、三角形の内角の和を考えているもの



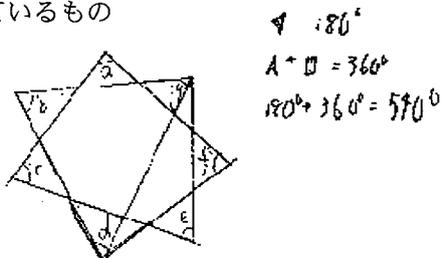
比較検討の段階として、以上のような多様な考えで解決した生徒の解法を画用紙にかかせ、前に提示させ説明させた。教師は、解決のための観点について目を向けられるよう支援していった。下は、授業後の生徒の感想である。

〇〇さん、人に教えながら、他の方法もいろいろと考えて頑張っていた。グループでやるので、自分で気づかないやり方がいろいろわかるので、楽しかったです。

小集団での活動を通して、多様な考え方や見方の存在に気づき、そのよさを感じていることがわかる。

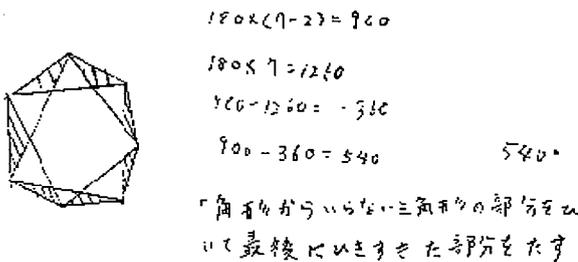
さて、発展を二段階とした。第一の段階では、星形多角形の頂点の数を1個ずつ増やした図形を提示し、生徒に自分の問題を選択させ、同じ問題を選択した生徒同士で小集団を編制し、解決を図らせた。その際、問題の難易について言及し、生徒の問題の選択の参考にさせた。ここでは、星形五角形の授業の際に出てきた多様な考え方の一覧をプリントして資料とさせた。生徒は、グループ内で意見を出しながら解決していった。早く解決した順に画用紙にその解法をかかせ前に提示していった。生徒は、その解法も参考にしながら、新しい解法を見つけ出そうとしていた。下は、生徒の解法の一部である。

ア 星形七角形を三角形と四角形と「やじり形」に分解し、それらの性質から頂角の総和を求めているもの



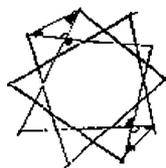
前時の授業の中で利用した「やじり形」を見つけ出すことが解法につながっている。

イ 同じ星形七角形を外側に作図した七角形の内角の和から不要な7枚の三角形の内角をひくことより求めているもの



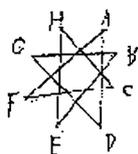
発展の第二段階として、星形多角形の頂点の数と頂点の結ぶ順序が異なる図形を提示し新たな問題とし、前回と同様に生徒に問題を選択させ、新たな小集団を編制し、解決させた。下は、生徒の解法の一部である。

ア 2本の補助線をひいて、3枚の四角形を考え、図の中に黒く印をつけた角をひいて求めているもの

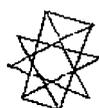


$360 \times 3 = 1080$   
 $1080 - (180 \times 2) = 720$   
 $720^\circ$   
 四角形を3つ書いて切り取った部分をひく。

イ 「ちようちよ形」の性質を2回利用して四角形の内角を考えて求めているもの



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$   
 $+ \angle H =$



$180(4-2) = 360^\circ$

このように、生徒は多様な観点から問題に取り組むことができ、多様な考え方や見方ができるようになってきたと考える。

最後に、これまで調べてきた「星形多角形の角の和」について表にまとめさせ、その表から気づいたことを発表させ、公式へと教師が誘導した。生徒は、多角形を星形多角形へ拡張したときに、多角形の内角の総和と一致することに気づき、しきりに感心していた。

### (3) 考 察

今回の実践では、角度の計算がかなり複雑になるので、課題学習の直前に角度の基本的な性質（やじり形やちようちよ形）を復習させて、共通問題に取り組ませた。次の資料は、1時間目終了後の生徒の感想である。

星形はいろいろなやり方を使って角度が出ることがわかった。楽しかった。やじり形、ちようちよ形でも計算ができた。星形に今まで学習したことが、いろいろ使われていたことに気づいた。

この感想より、問題解決の楽しさやおもしろさを感じている様子や今までに学んできたことを再認識し、価値についての変容がわかる。

また、次の資料は、比較検討したときの感想である。この感想から、この生徒は、自分の考えと異なる考え方のよさに気づき、思考の柔軟さに価値を見出していることがわかる。

今日は楽しかったです。早く気づいていればいいと思いました。もっと頭をやわらかくします。どんどんわかると楽しいです。  $180^\circ \times (n-2)$  などの式が使われました。同じような考え方がありました。でも、そこまでわからなかったので、みんなの考えを聞いてよかったです。

その後、発展の第一段階の問題を小集団活動を通して解決した後の生徒の感想が、次の資料である。

今日はいろいろな図形の角度を調べることをしたけれど、自分以外の考えが次々として出されて、いろいろな考え方があるということがわかりました。考えることは楽しいです。

小集団の中で、「…自分以外の考えが次々として出されて、いろんな考え方がある…」という記述から、小集団の中で活発な意見交換がなされ、意欲的に問題解決が図られたことがわかる。

発展の第二段階の問題を小集団活動を通して解決したときの感想が、次の資料である。

星形多角形にはたくさんの形がいろいろあることがわかった。また、グループに分けることでわからないことを補ったりし合って、とても楽しかった。

今日は、また別の星形多角形をやって、今までと違う方法で考えることができたので、良かったです。

新しい観点から問題を解決したり、グループでの学習のよさについて言及している。生徒自身にとっても、充実した意欲的な学習ができたことへの充実感を感じていることが推察できる。

今回の課題学習終了にあたって、次のような感想（わかったことや感じたこと）があった。

自分に合った多角形の解き方は、何通りもあるから、色々考えられたし、わからないときには、グループの中で発見したり、意見を出し合ったり、教え合ったりしたことで、自分自身のためになったな、と思いました。

そして、他の多角形のグループにも、それぞれのやり方があって、みんな納得のいくまで頑張っていたから、すごいと思いました。

自分自身の解法の多様さに気づくとともに、小集団の中で意見交換することにより、自分が気づかなかった解法を新たに見つけ出したり、考え合ったりすることにおもしろさを感じていることがわかる。また、その活動を通して、他の考え方のよさを認めようとしていることがわかる。

#### (4) 成果と課題

##### ア 成果

- 小集団で活動させ、その小集団同士で交流させれば、学級全体の活動が意欲的になることがわかった。
- 発展課題を提示する際に、難易について言及したので、小集団を編制するときスムーズに行えた。
- 小集団活動を行うことにより、数学的な見方や考え方が育ってきた。
- 発展の段階に、同じ問題を選択した生徒同士で小集団を編制し、活動させれば、生徒はより主体的に取り組むことがわかった。
- 発展段階を二段階にすることにより、かなり複雑な問題も生徒の力で解決できた。

## イ 課 題

- 同じ問題の生徒同士で小集団を編制する際に、スムーズに移動できるようにする必要がある。
- 生徒に問題を選択させる際に、やりたい問題を選ばずに、友達関係で選択する生徒がいた。
- 小集団活動の際、教師の関わり方が、まだ不十分である。

また、今回の課題学習終了にあたって、生徒へのアンケートを行った。次のような結果であった。

項 目	いいえ	はい
	1 - 2	3 - 4
1 意欲的に課題に取り組みましたか。	3.2	
2 今回の授業で、自分なりに考えることができましたか。	2.9	
3 班の中で、自分の考えを説明することができましたか。	3.1	
4 他の人の説明を理解することができましたか。	2.8	
5 今回の授業の満足度をおしえてください。	3.4	

## 8 研究の成果と今後の課題

「課題学習における発展の段階で、生徒自身に自らの課題を選択させ、同じ問題に取り組む生徒で小集団を編制し、問題の解決をさせれば、問題解決意欲が高まり数学的な見方や考え方を育てることができるであろう。」という仮説のもとに、第2学年の数学科学習で実践を行ってきた。第2学年で数学科で行った研究実践の課題学習は、「星形多角形の角の和」(図形の調べ方)である。

実践を通して、次のような成果と課題が明らかになった。

## (1) 研究の成果

実践から、次のような成果を得た。

- 課題把握の段階で、具体物で操作的な活動を行わせたことが、生徒の課題意識を高めることに有効であった。
- 自力解決した際の生徒の多様な考え方を参考資料として、生徒に返したことが、発展問題を解決するために役立った。
- 発展の段階で、同じ問題を選択した生徒で小集団を編制したことが、意欲的な学習につながり数学的な見方や考え方を育てる契機になった。
- 課題学習における小集団活動の位置づけが明らかになった。

## (2) 今後の課題

研究を進めていく上で、いくつかの解決すべき点があきりしてきた。それらについては、今後の研究課題として取り組んでいきたい。

- 小集団活動を行う際、教師の指導のあり方に工夫が必要である。
- 小集団活動行うのに適した、多様な「解き方」を考えることができる課題の発掘・開発が必要である。
- 生徒が意欲的に学習していることを客観的に評価する方法の開発が必要である。
- 課題学習を通して、生徒の数学的な見方や考え方が育っていることを評価する方法の開発が必要である。

【参考資料①】

第2学年3組数学科学習指導案

平成17年9月8日(木) 2校時

指導者 西田 修(T1)

石川勝志(T2)

(教育実習生)

1 単元 図形の調べ方

2 単元設定理由

本学級の生徒は、与えられた課題に対しては真面目に取り組もうとする。しかし、表現の面で、挙手発表の面では不十分な面がみられる。筋道を立てて物事を考えようとする姿勢はあるが、難しい課題にぶつかると諦めたり、課題を多様な方法で解決することを苦手としている生徒もいる。また、数学的思考が得意な生徒は多いのだが、その反面に数学を苦手とし、理解をするのに時間がかかる生徒も数名いる。

生徒たちは、第1学年では、小学校で学習した事柄を用い、図形の対称性や作図を取り扱っている。また、空間における直線や平面の位置関係を知り、空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されているものととらえたり、平面上に表現することを学習し、さらに基本的な柱体、錘体の体積、表面積が求められるようにして、図形に関する概念を豊かにしてきた。

第2学年では、小学校で学習した三角形などの多角形の角の大きさについての性質を、論理的に筋道を立てた推論を行って調べることができるようにする。その際、推論の根拠となる事柄や推論に用いる用語の定義を明確にし、仮定と結論の意味を明らかにして、論理的に筋道を立てて正しい推論を行い、その過程を的確に表現できるようにすることを目標としている。

これまでの学習では、主に、直感的・帰納的な方法によって図形の性質を調べてきたが、これからは、いくつかの基本性質をよりどころとした演繹的な推論によって図形の性質を調べていく。そのため、仮定や結論を混同して説明してしまったり、論証する意義を理解できなかったり、また証明の記述に抵抗を感じたりするなど、多様なつまずきが予想される。そこで、ていねいな指導が必要となるわけだが、これらの活動の中に、図形をよく観察したり、作図したりする操作や実験を多く取り入れ、自発的に問題解決に取り組む姿勢を養いたい。またT、Tで取り組むことによって、生徒のつまずきに対してより細やかな指導を行うようにしていきたい。

図形に対していろいろな角度から自主的に調べ、発見していく過程を大切に、集団での活動の中で、友達の意見を尊重し、認め合いながら話し合いができるように支援したい。また、いろいろな意見を取り入れながら、自分の考えをまとめ、考察し、発表する場面を多く設定したい。さらに、多様な意見を比較検討することで、さらに課題を深められるように指導していきたいと考えている。

3 単元の目標

- 観察、操作や実験を通して、数学的活動の楽しさや数学的に考察するよさに気づき、すすんで活用しようとする。
- 平面図形に関する基礎的な知識を身につけ、数学的な推論の方法を用いて図形の性質を論理的に考察することができる。
- 図形の性質の考察において推論の筋道を言葉で表したり、用語、記号など用いて簡潔に表現したりすることができる。
- 平行線や多角形などの性質やそれらを調べるときの証明の方法を理解する。

4 単元の観点別評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方・考え方	表現・処理	知識・理解
ア 図形の基本性質に関心を持ち、観察・実験・操作を通して、これらを進んで見い出そうとする。	ア 平行線の性質を使って、必要な角の求め方を考えることができる。 イ 演繹的な推論によって三角形の内角の和を求めることなどを通して、筋道を立てて説明する数学的な考え方を理解している。	ア 図形の基本性質を利用し、具体的な角の大きさを求めることができる。 イ 三角形を鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形に分類することができる。 ウ 三角形の合同条件をもとに、2つの三角形が合同であるかどうかを判断し、合同な図形を記号≡を用いて表すことができる。	ア 対角線の性質、平行線の性質、平行線になる条件、三角形の内角と外角の性質、多角形の内角の和・外角の和、合同な図形の性質、三角形の合同条件を理解している。 イ 鋭角・直角・鈍角の用語とその意味、三角形の分類の仕方を理解している。 ウ ある事象が正しいとき、その逆も必ず正しいとはいえないことがわかる。
イ 筋道立てた考え方の必要性を感じ取り、数学的な論証に関心をもつ。	ウ 図形の基本性質など、既知のことがらを推論のための根拠として、新たな図形の性質を見つけ、それを積み上げていくという数学的な考え方のよさがわかる。	エ 図形の基本性質を用いた簡単な証明をすることができる。	エ 仮定・結論・証明の用語とその意味、及び証明のしくみを理解している。

5 単元の指導計画（全16時間）

- (1) 平行線と角・・・5時間
  - 対頂角
  - 平行線と同位角・錯角
  - 三角形の内角と外角
  - 多角形の内角と外角
- (2) 三角形の合同・・・3時間
  - 合同な図形
  - 三角形の合同条件
- (3) 証明・・・4時間
- (4) 課題学習（星形多角形の角の和）・・・4時間（本時1/4）
  - 星形五角形（[5, 2] 星形多角形）の角の和を調べよう・・・(2)
  - [m, n] 星形多角形の和を調べよう・・・(2)

6 単元の指導計画と評価規準

節	学習内容	時	評 価 規 準					
			関	考	表	知	方 法	
平行線と角	直線と角	2	B 同位角・錯角・対頂角の性質を理解し、活用することができる。 A 対頂角が等しいことを理論的に説明できる。		○			発表
	三角形の角	1	B 三角形の内角・外角・平行線の性質・鋭角・鈍角について理解している。 A 三角形の内角・外角の性質を理解し、それを論理的に証明できる。			○	○	ノート
	多角形の角	2	B 外角・内角を求めることができる。 A n角形の内角・外角を求める中で公式を利用して、問題が解ける。	○	○			ノート
三角形の合同	合同な図形	1	B 合同の記号≡を知り、それを正しく使うことができる。 A 合同な三角形の対応の関係が理解できる。			○		ノート
	三角形の合同条件	2	B 三角形の合同条件を利用して、合同な2つの三角形を見つけことができる。 A 合同な三角形の作図のしかたを考え、三角形の合同条件を理解している。	○		○		ノート 発表
証 明	仮定と結論	2	B 仮定・結論の意味を理解している。 A 逆の考えが理解でき、ある事柄であっても、その逆は、真とは限らないことを理解している。				○	ノート
	証明のしくみ	1	B 三角形の合同を利用した具体例を通して、証明のしくみを理解している。 A 根拠を示しながら、筋道を立てて、仮定から結論を導くことを理解している。		○		○	ノート 発表
	証明の根拠	1	B 簡単な証明の記述ができる。 A これまでに学んだ基本性質をまとめ、証明の根拠としての確に使用できる。			○		発表 ノート
課題学習	星形多角形の角の和	4	B 星形多角形の角の和を求めることができる。 A いろいろな方法で星形多角形の角の和を求めることができ、比較検討することができる。	◎	○			学習シート 発表

7 本時の学習

- (1) 題材 星形多角形の角の和を調べよう

(2) 授業の視点

本時は、「星形五角形の角の和をいろいろな方法で求めてみよう」という課題を設定し、これまでに学習してきた、既存の知識を確認しながら、それを活用しようとする意識をもたせることで、理解を深めていきたい。また、生徒の実態から考えて、解法が一つ見つかりとそれでよしとしてしまう傾向が見られる。しかし、解答に至る道は一つではなく、いろいろ図形のとらえ方によって、多数あることを実感させたい。また、自ら課題を深めようとする姿勢が弱い面があるので、T・Tという形態をとり、その支援に努めていきたい。授業前半は、T1が全体指導と個別指導を、T2が個別指導を行う。また後半の班活動においては、教室を半分に分け、5班ずつ受け持ち支援をしていく。最後の解決の場面では、T1が全体指導を、T2は全体の支援という役割分担で行う。

(3) 目標

関心・意欲・態度	数学的な見方・考え方	表現・処理	知識・理解
星形の角の和について進んで調べようとする。班員と協力して調べようとする。	既習事項を使って、筋道を立てて説明することができる。	班の中で自分の意見を他の人の説明することができ、他の人の意見を聞いて理解することができる。既習の事項を活用できる。	対頂角の性質、平行線と角の関係、多角形の性質を理解している。

(4) 展開 (2時間分)

課題・発問	時間	生徒の学習活動	教師の手立て・支援		備考
			T 1	T 2	
<p>発問1 一筆がきで星の形をかいてみよう。</p> <p>本日の課題 星形五角形の角の和をいろいろな方法で、調べてみよう。</p> <p>発問2 角の和は、何度になるか予想し、その調べ方を考えよう。</p>	15分	<p>実際にかいてみる。</p> <p>発表する。</p> <p>自分でも星形n角形をかいてみようとする。</p> <p>角の和が何度になるか予想してみる。 その調べ方を考えてみる。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>予想される反応 180° , 360° , 540°</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・作図して実測し、予想を立てる。</li> <li>・切り取って並べてみる。</li> </ul> </div>	<p>発表をさせる。</p> <p>星形n角形をかいて見せ、興味・関心を高める。</p> <p>星形の図形に着目させ、今日は星形を勉強することを知らせる。この図形を星形五角形という。その中で、角について調べていくことを確認する。</p> <p>本日の課題を発表し、本時の課題を確認させる。</p> <p>学習シートを配布する。</p> <p>発問2 角の和が何度になるかを予想させる。 その調べ方を考えさせる。</p> <p>本当に180° ちょうどなのか、他の星形五角形でも言えるのか、と疑問を投げかける。生徒に揺さぶりをかけることによって、証明することの必要性や大切さを印象づける。</p>	<p>図形がかけているかを、T 1 に知らせる。</p> <p>作図して実測してみる。 切り取って並べてみる。 (少なくとも2種類)</p>	<p>星形五角形の紙</p> <p>はさみ</p> <p>分度器</p>
<p>発問3 今まで学習をしたことを使って、角度が出せない出せないだろうか。</p> <p>発問4 いろいろな方法で考えてみよう。 解決できた班は、その考え方を2人の先生に説明してみよう。</p>	35分	<p>&lt;個人で深める&gt;</p> <p>&lt;グループで深める&gt;</p> <p>自分の考えをグループで発表・相談する。 必要な班は、ヒントカードをT 1, T 2の先生から受け取る。</p> <p>次時の学習活動を聞き、期待感をもち。</p>	<p>「根拠集」を準備させる。</p> <p>個人・各班の相談にのり、解決の手助けをする。 (7) (1) (1) (カ)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>滞っている個人・班への補助 (例)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>①補助線をひいてみよう。</li> <li>②今まで学んだ根拠が使えないかな。</li> <li>③5つの角を1つの三角形に集められないかな。</li> <li>④三角形が組み合わさってできているので、三角形の性質が使えないだろうか。</li> </ol> </div> <p>解決できた班の解答を聞き、きちんと説明できた班には、別の方法で、180° と説明できないかと投げかける。 (1) (ウ) (オ)</p> <p>次時の学習活動を告げ、発表への期待感を高める。</p>	<p>根拠集</p> <p>ヒントカード</p>	

前時の続き	20分	<グループで深める> 発表の準備をする。	各班の相談にのり、スムーズにそして、他の人 にわかりやすい発表ができるように支援する。
まとめ	30分	各班の考えを聞く。  多様な考え方で、星形の 角の和を求めることができ ることを知る。	他の班の発表を真剣に聞 かせ、さまざまな考え方 を理解できるように支援 する。(I)  星形五角形の角の和が、 既存の知識を使って説明 できることを確認させる。

(5) 評価

関心・意欲・態度	数学的な見方・考え方	表現・処理	知識・理解
(7) 星形の角の和について 進んで調べようとした か。(観察) (I) 班員と協力して調べ ることができたか。(観察)	(7) 既習事項を使って、筋 道を立てて説明するこ とができたか。 (観察・発表)	(I) 班の中で自分の意見を 説明することができ、 他の人の意見を聞いて 理解することができ たか。(観察) (I) 既習の事項を活用でき たか。(観察)	(7) 対頂角の性質、平行線 と角の関係、多角形の 性質を理解していたか。 (観察)

自己評価カード 組 番 氏名 \_\_\_\_\_

意欲的に課題に取り組みましたか。	4-3-2-1
今回の授業で、自分なりに考えることができましたか。	4-3-2-1
班の中で、自分の考えを説明することができましたか。	4-3-2-1
他の人の説明を理解することができましたか。	4-3-2-1
今回の授業の満足度をおしえてください。	4-3-2-1
今回の授業を受けてわかったことや感じたことを書きなさい。(上の理由も含めて)	
_____	
_____	
_____	

【参考資料②】

第2学年3組数学科学習指導案

平成17年9月15日(木) 3校時  
指導者 西 田 修

1 単元 図形の調べ方

2 単元設定理由

我々の身の回りには、平行線や合同な図形で構成されているものが多い。例えば、窓ガラスの辺やガラスの形、歩道や建物の壁、幾何学的なデザインの中のモチーフなどがある。これらは、単純な線の美しさとともに、合同な図形で敷き詰めた美しさや、合同な図形を繰り返した美しさなどをもっている。このような図形の性質は実測したり直観的に考えたりすることにより、容易にその性質を推し量ることができる。それらの性質を、定義から根拠を明らかにしながら、筋道立てて思考することは、論理的な思考力を培うこととなり意義深い。さらに、日常生活の中に見られる図形に関心を持ち、その性質を調べることを通して数学的な見方や考え方を養うことができる。

本単元では、論理の根拠となる定義を明らかにしていくとともに、図形の性質を定義を基にして、筋道立てて思考させることにより、論証の基礎を養うことをねらいとしている。学習内容としては、対頂角、同位角と錯角、三角形をはじめとする多角形の内角や外角の和、合同な図形の性質、三角形の合同条件などがある。このような学習を通して、日頃見慣れている図形の性質を再発見させたり、その理由を明らかにさせながら説明させたりすることにより、論理的な思考のよさや大切さを味わうことができる。

さらに、星形多角形の性質を発展的に探究させる課題学習を設定することにより、多様な見方・考え方や一般化の過程を体験することができる。

生徒たちは第1学年までに、基本的な作図、図形の移動、図形の基本的な記号の使い方、簡単な図形の計量などを学習している。その学習の中では、観察や操作に基づく直観的な考察を中心に行っており、そのため厳密な証明を経験したことがなく、直観的に正しいと認められることは、ほとんど疑問を差し挟むことはない。事前調査によれば、図形の学習を好む生徒は少なく、その理由として「図形は難しい」、「考えることが面倒だ」などと回答している生徒が多い。しかし、生徒たちは、以前と比べて数学に対して自信をもちはじめ、課題プリントに積極的に取り組む姿勢が出てきており、また、これまでの「課題学習」の中でグループ学習を経験している。

そのグループ学習の中で、互いに自分の考えを説明しあったり、同じ問題に協力して取り組み、主体的に課題に取り組もうとする姿も見受けられた。また、数学のおもしろさや多様な見方・考え方に気づき始めた生徒もいる。

指導にあたっては、生徒自らが図形の性質を予想し、確かめることができるように、学習過程に作図などの操作的活動を取り入れていく。また、課題学習では、グループ学習を取り入れ、自分たちが取り組みたい課題を選ばせることにより課題意識を高めさせていきたい。

まず、対頂角や平行線と角について調べさせる。ここでは、角の大きさを実測させたり、切り抜いた角を移動させたりする。また、同位角や錯角が等しくなるのは、2直線が平行である場合であることを確認させる。次に、三角形の内角の和について調べさせる。ここでは、角を実測させるとともに、切り抜いた三角形の角を移動させ、同位角や錯角と関連付けて説明させる。また、多角形の内角と外角の和について調べさせる。ここでは、自由に多角形を作図させ、その内角を実測結果から帰納的に一般化するとともに、多角形を三角形に分解して内角の和を考えさせていきたい。

さらに、合同な図形と三角形の合同条件について調べさせる。ここでは、直観によって合同な図形を見つけ出させ、着目した観点を発表させたり、実際に合同な三角形を作図させ、その作図で利用した三角形の構成要素（辺の長さ・角の大きさ）をまとめていきたい。

最後に、課題学習「星形多角形の角の和」を設定し、既習内容の定着を図るとともに、問題を発展的に取り扱うことを体験させる。ここでは、はじめに星形五角形の角の和を予測させ、その予測結果を課題として考えさせる。そして、その学習で得た多様な解決方法をヒントとして星形六角形・七角形・八角形へと問題を発展させていく。この学習の中で一般化した公式が、既習内容である多角形の内角の和と一致することを味わわせたい。

### 3 単元の目標 参考資料①と同じ

### 4 単元の観点別評価規準 参考資料①と同じ

### 5 単元の指導計画（全16時間） 参考資料①と同じ

#### (4) 課題学習（星形多角形の角の和）・・・4時間（本時3/4）

○ 星形五角形（[5, 2] 星形多角形）の角の和を調べよう・・・(2)

○ [m, n] 星形多角形の角の和を調べよう・・・(2)

### 6 単元の指導計画と評価規準 参考資料①と同じ

### 7 本時の学習

#### (1) 題材 [m, n] 星形多角形の角の和を調べよう

#### (2) 授業の視点

これまでに、生徒は平行線と角の関係や三角形の内角の和・多角形の内角や外角の和について学習し、練習問題を通して習熟してきている。さらに、星形五角形の角の和を平行線と角の関係・三角形の内角の和・多角形の内角や外角の和を使って $180^\circ$ であることを学んでいる。その学習の中で、一つの課題を多様な方法で解決できることに発表を通して気づいてきている。

本時では、前時内容の課題から発展させた課題をつくりその解決を通して、課題を発展的に取り扱うことを体験させることをねらいとする。また、同じ課題に取り組む小集団を編制し、その中で励ましあったり、協力したりする中から意欲的に課題解決させていきたい。

そのためにまず、前時学習課題である星形五角形の角の和の解決方法を想起させ、本時の課題を提示する。ここでは、前時発表した画用紙を再度提示し、それぞれの解決方法について確認させる。また、その他の星形多角形の存在を板書して気づかせ、本時の課題を解決する必然性を感じさせる。次に、課題解決に対する意欲を高めさせるために生徒自身に解決する課題を決定させる。さらに、同じ課題に取り組む生徒同士で小集団を編制させ、その小集団の中で課題を解決させる。ここでは、取り組みたい課題ごとに挙手させ、その傾向を把握して、活動場所などを指示していく。その際、1, 2名の生徒の集団とならないように例外的な配慮も行う。また、課題解決のために、前時で利用した考え方を図示したプリントを配布して解決のための手段とさせる。解決につまずいている生徒には、解決の方向性を示唆したり、同じ集団の生徒の考えを聞かせたり、ヒントを与えていく。最後に、小集団単位で各自の課題の解法を発表させる。ここでは、考え方が異なる解法を発表させるように事前に生徒の解法を確認しておく。また発表の最後には、その解法のポイントを解説し、考え方の違いに着目させる。

次時では、本時内容を受けて、[m, n] 星形多角形の角の和に関する式を導き出すとともに、[n, 1] 星形多角形の角の和がn多角形の内角の和と一致することに気づかせていきたい。

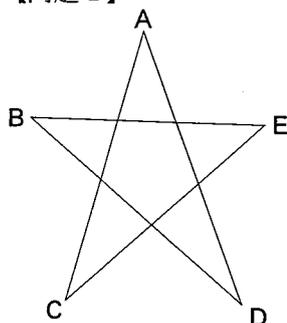


【参考資料③】

## 星形多角形の角の和に関する教材研究

星形多角形の角の和については、平成18年度以降使用される中学校教科書6社にも、取り扱いの軽重の差はあれ取りあげられている。証明の意味、数学的な見方・考え方の育成などこの教材のよさは、いろいろな視点から認められている。そこで、私なりにこの教材に関する教材研究を行ってみることにした。

【問題1】



左の図は、5つの点A, B, C, D, Eを1つ飛ばしに結んでできた星形五角形です。

このように、5つの点を1つ飛ばしで（最初の点から2つめの点を）順に結んでかいた星形多角形を（5, 2）星形多角形と呼ぶことにしましょう。

このとき、 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ は、何度になりますか。

ヒント：平行線の性質、三角形内角と外角の性質、多角形の内角の和・外角の和や特別な図形を利用しよう。

【問題1のヒントの与え方の例】

<その1>

### ヒントカード集

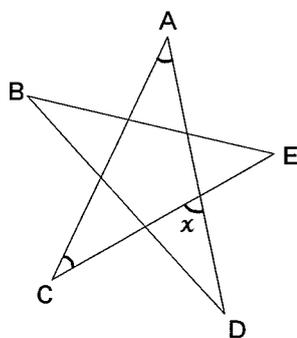
- ① 補助線をひいて考えてみよう。
- ② 平行線をひいて、角を集めて考えられないかな。
- ③  $180^\circ$  は平角だね。
- ④ 5つの角を1つの三角形に集められないかな。
- ⑤ 三角形が組み合わさってできているので、三角形の性質が使えるだろうか。
- ⑥ 今まで学んだ根拠が使えるかな。（根拠集を参考にしよう。）
  - ・対頂角は等しい。
  - ・平行ならば、同位角、または、錯角は等しい。
  - ・三角形の3つの内角の和は $180^\circ$ である。
  - ・三角形の1つの外角は、そのとなりにない2つの内角の和に等しい。
  - ・n角形の内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$ である。
  - ・多角形の外角の和は $360^\circ$ である。

<その2>

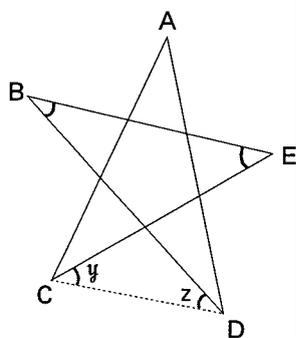
星形多角形には、たくさんの角があります。そこで、角の関係を式に表すことにしました。

(1) ~ (4) をヒントにして、 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ を求めてみよう。

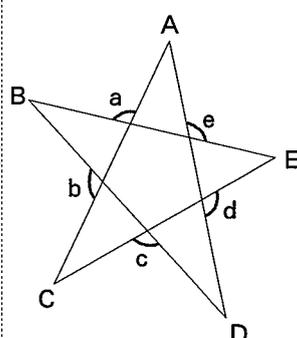
(1)  $\angle A, \angle C, \angle x$  の関係を式に表しましょう。



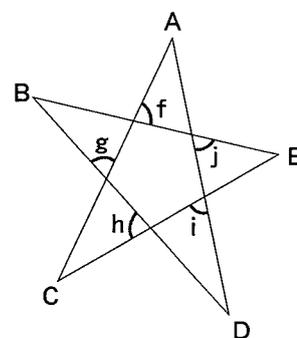
(2)  $\angle B, \angle E, \angle y, \angle z$  の関係を式に表しましょう。



(3)  $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e$  の関係を式に表しましょう。

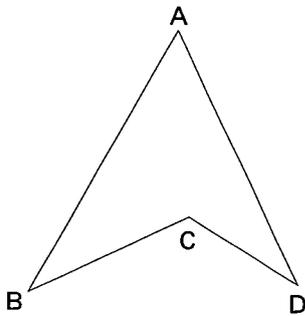


(4)  $\angle f, \angle g, \angle h, \angle i, \angle j$  の関係を式に表しましょう。



<その3> (基本的な図形)

やじり形

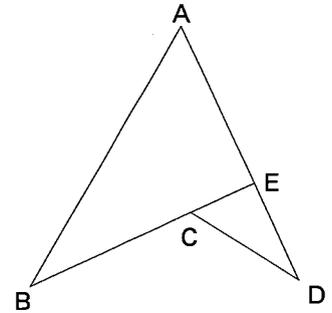


この「やじり形」を、図のように2つの三角形と考えると

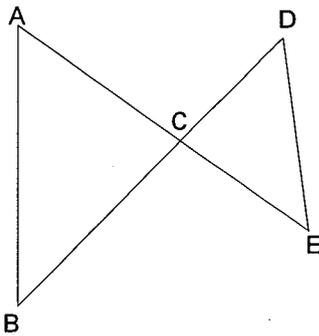
$$\angle A + \angle B = \angle DEC$$

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle D &= \angle DEC + \angle D \\ &= \angle BCD \end{aligned}$$

となっている。



ちょうちょ形



左の図のような多角形を「ちょうちょ形」と名づけることとする。この「ちょうちょ形」を、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEC$ と考えると、

$$\angle A + \angle B = \angle ACD$$

$$\angle D + \angle E = \angle ACD$$

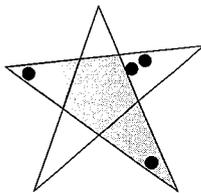
となっている。

つまり、 $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$ となっている。

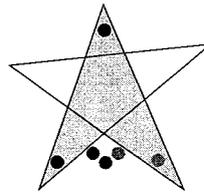
<その4>

次のヒントの図を参考に、角の和を考えてみましょう。

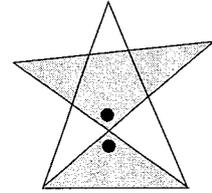
ヒント1



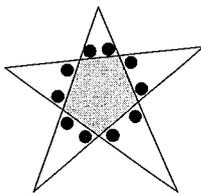
ヒント2



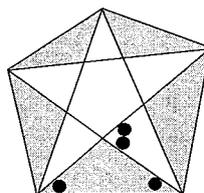
ヒント3



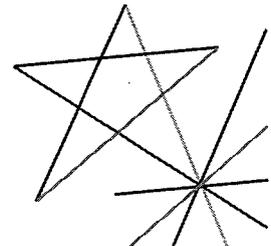
ヒント4



ヒント5



ヒント6



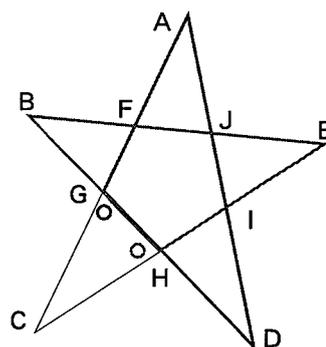
【問題1の解答例】

$\triangle AGD$ の外角 $\angle CGH = \angle A + \angle D$

$\triangle BHE$ の外角 $\angle GHC = \angle B + \angle E$

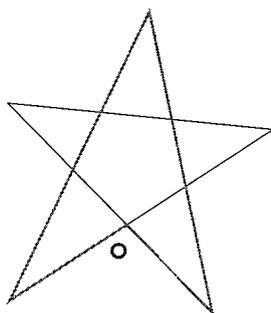
よって、

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle C + \angle CGH + \angle BHC = 180^\circ$$



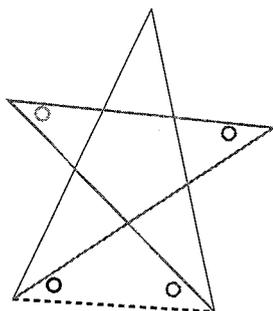
<別解1>

「やじり形」を考える。



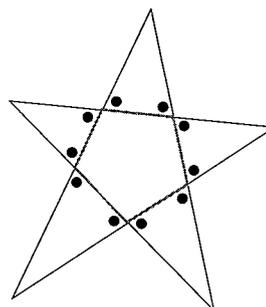
<別解2>

隣り合う2つの頂点を結んで、「ちょうちょ形」を考える。



<別解3>

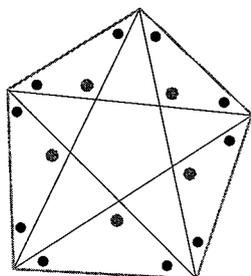
5つの小さな三角形の内角の総和から印のついた角の和をひく。  
(内部の小さな五角形の内角の和を利用する。)



<別解4>

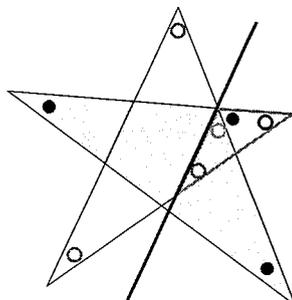
5つの頂点を結び大きな五角形を考え、印のついた角の総和をひく。

(内部の小さな五角形の内角の和を利用する。)



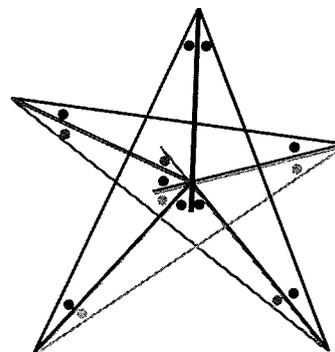
<別解5>

星形の1つの辺と平行な直線を考えて、塗りつぶした三角形に角を集める。



<別解6>

星形の内部に1点を取り、5つの頂点とそれぞれ結んで、5つの三角形を考える。  
(三角形の外角を利用する。)



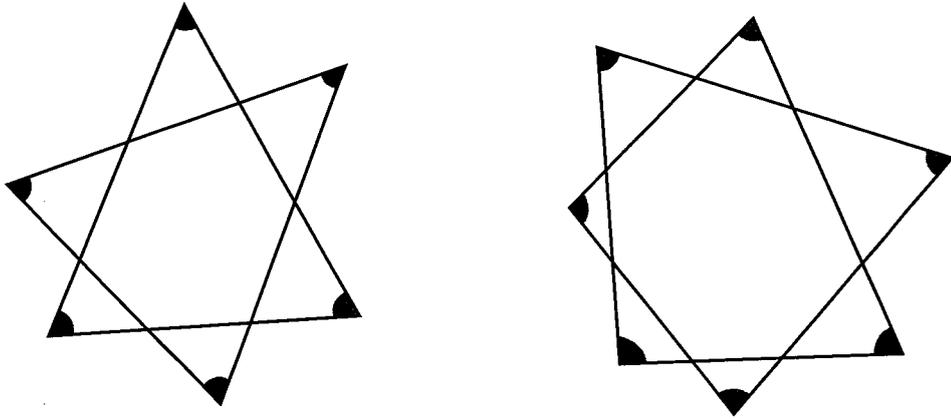
【問題 2】

n 個の点をまわるようにならべ、1つの点から1つ飛ばしで（最初の点から2つめの点を）順に結んでかいた星形多角形を (n, 2) 星形多角形と呼ぶことにしましょう。

もし、一筆でかけない場合は、星形になるように二筆、三筆でかくことにしましょう。

図は、(6, 2) 星形多角形と (7, 2) 星形多角形です。

このような、(n, 2) 星形多角形の角の和は、何度になるでしょうか。



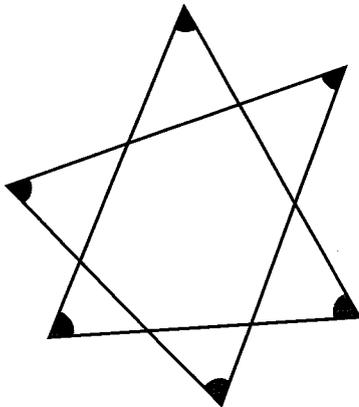
【問題 2 の解答例】

(n, 2) 星形多角形

(6, 2) 星形多角形の場合

2つの三角形の内角の和と考えられるので、

$$2 \times 180 \text{度} = 360 \text{度}$$



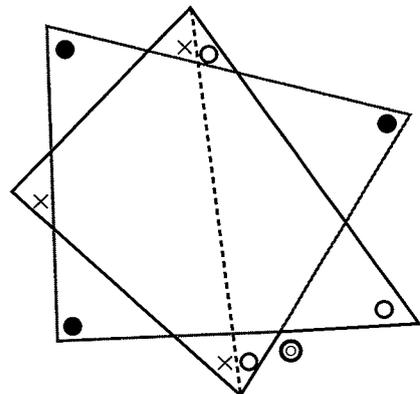
(7, 2) 星形多角形の場合

図のように2つの頂点を結ぶ。

やじり形より○の角の和が◎となる。

四角形の内角の和と三角形の内角の和より、

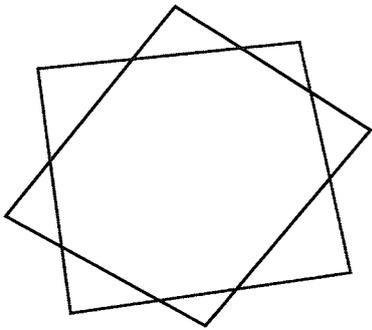
$$360 \text{度} + 180 \text{度} = 540 \text{度}$$



(8, 2) 星形多角形の場合

2つの四角形の内角の和と考えられるので,

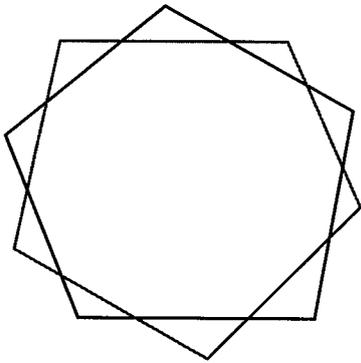
$$360\text{度} + 360\text{度} = 720\text{度}$$



(10, 2) 星形多角形の場合

2つの五角形の内角の和と考えられるので,

$$2 \times (5 - 2) \times 180\text{度} = 1080\text{度}$$

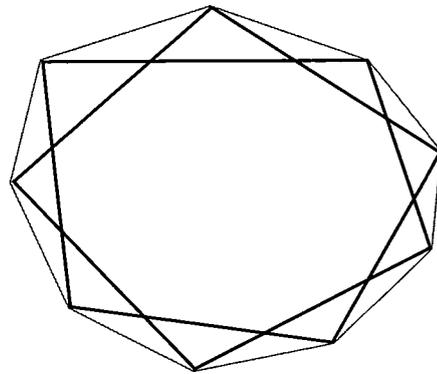


(9, 2) 星形多角形の場合

9つの頂点を図の線のように結ぶ。

九角形の内角の和から不要な角(9つの三角形の内角の和の総和)をひき, さらに, ひきすぎた角(内側の九角形の内角の和)を加える。

$$(9 - 2) \times 180\text{度} - 9 \times 180\text{度} + (9 - 2) \times 180\text{度} = 900\text{度}$$



以上のことより, 表を作ると,

(n, 2) 多角形	頂角の総和	一筆がき
(5, 2)	180°	できる
(6, 2)	360°	2つの三角形
(7, 2)	540°	できる
(8, 2)	720°	2つの四角形
(9, 2)	900°	できる
(10, 2)	1080°	2つの五角形
...	...	...
(n, 2)	$180n - 720 (^{\circ})$	

【問題2についてのまとめ】

表をよく見ると、 $n$ が1つ増加すると $(n, 2)$ 星形多角形の頂角の総和は、 $180^\circ$ ずつ増加している。

つまり、 $(n, 2)$ 星形多角形の角の和は、 $180n - 720 (^\circ)$ という関係があることがわかる。

さらに、一筆がきは、 $(5, 2)$ 、 $(7, 2)$ 、 $(9, 2)$ のときできて、 $(6, 2)$ 、 $(8, 2)$ 、 $(10, 2)$ のときできない。

$6$ と $2$ 、 $8$ と $2$ 、 $10$ と $2 \cdots$ 約分できる。ここにも、不思議な関係があることがわかる。

自分の実践では、星形五角形を調べる際に、生徒たちが見つけ出した角の調べ方をプリントして配布して、この $(n, 2)$ 星形多角形の頂角の総和を調べさせた。

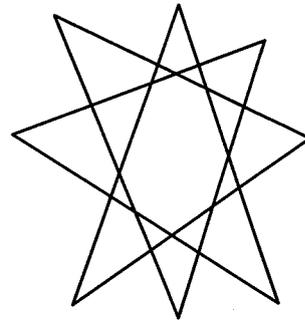
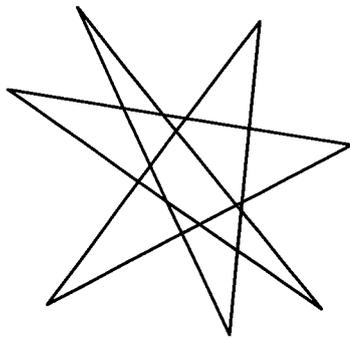
上のような表を作成して、生徒に気づいたことを発表させて、上のまとめを行った。

【問題3】

$n$ 個の点をまわるようにならべ、最初の点から $m$ つめの点を順に結んでかいた星形多角形を $(n, m)$ 星形多角形と呼ぶことにしましょう。

図は、 $(7, 3)$ 星形多角形と $(8, 3)$ 星形多角形です。

これらの $(n, m)$ 星形多角形の頂角の総和は、何度になるでしょうか。

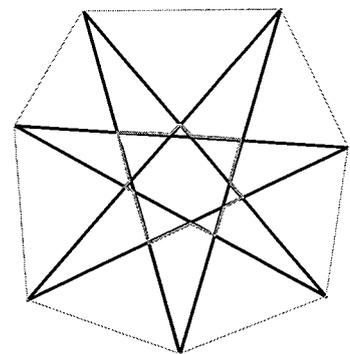


【問題3の解答例】

$(7, 3)$ 星形多角形の場合

七角形の内角の和から7つの三角形の内角の総和をひいて、ひきすぎた角である $(7, 2)$ 星形多角形の頂角の総和をたせばよい。

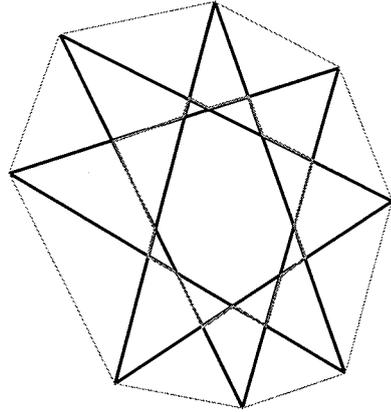
$$\begin{aligned} & (7-2) \times 180^\circ - 7 \times 180^\circ + 540^\circ \\ & = 180^\circ \end{aligned}$$



(8, 3) 星形多角形の場合

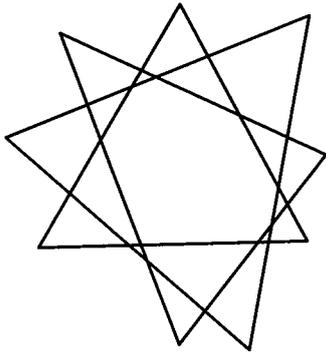
上と同様にして,

$$(8-2) \times 180 \text{度} - 8 \times 180 \text{度} + 720 \text{度} \\ = 360 \text{度}$$

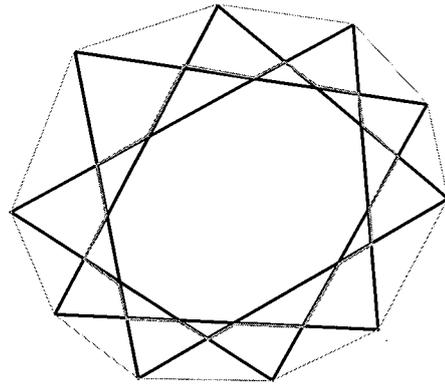


(9, 3), (10, 3) 星形多角形の場合

(9, 3) 星形多角形は, 図から3つの三角形の内角の和だから, 540度



(10, 3) 星形多角形は, (7, 3), (8, 3)と同様に考えると, 720度

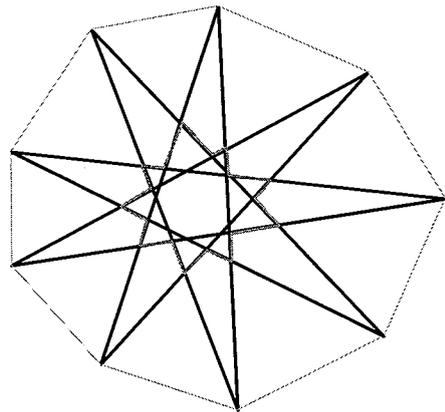


やはり, 問題2のようにnが1ずつ増加すると, 180度ずつ増加している。

(9, 4) 星形多角形の場合

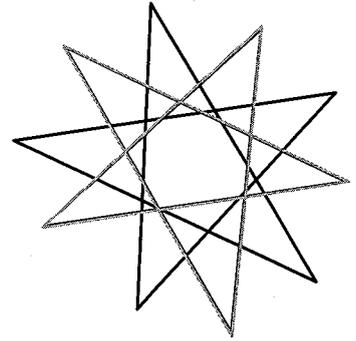
九角形の内角の和から9つの三角形の内角の総和をひき, ひきすぎた角である(9, 3)星形多角形の角の和を加える。

$$(9-2) \times 180 \text{度} - 9 \times 180 \text{度} + 540 \text{度} \\ = 1260 \text{度} - 1620 \text{度} + 540 \text{度} \\ = 180 \text{度}$$



(10, 4) 星形多角形の場合

図のように、2つの(5, 2) 星形多角形の頂角の  
 総和と考えると、 $180\text{度}+180\text{度}=360\text{度}$   
 さらに、10と4は約分できる。  
 どうも、約分できると一筆がきができないようだ。



【まとめ】

以上のことを表にまとめてみると、

(n, m)多角形	(n, 2)	(n, 3)	(n, 4)	...	(n, m)
(5, m)	180°			...	
(6, m)	360°			...	
(7, m)	540°	180°		...	$1260-360m(^{\circ})$
(8, m)	720°	360°		...	$1440-360m(^{\circ})$
(9, m)	900°	540°	180°	...	$1620-360m(^{\circ})$
(10, m)	1080°	720°	360°	...	$1800-360m(^{\circ})$
...	...	...	...	...	...
(n, m)	$180n-720(^{\circ})$	$180n-1080(^{\circ})$	$180n-1440(^{\circ})$	...	$180n-360m(^{\circ})$

ここで、普通のn角形を(n, 1) 星形多角形と考えると、  
 $180n-360=180(n-2)$

となり、みごとにn角形の内角の和の公式と一致してしまう。

また、(n, m) が割り切れると一筆がきができないらしいこともわかる。

	頂点は飛ばさない	頂点を1つ飛ばし	頂点を2つ飛ばし	...
頂点がnつ	$180^{\circ} \times (n-2)$	$180^{\circ} \times (n-4)$	$180^{\circ} \times (n-6)$	...

頂点がnつで、頂点をmつ飛ばした場合は、 $180^{\circ} \times (n-2m-2)$

このように、星形図形は奥が深い。また、私が以前研究した「スピログラフ」などとの関連など、  
 選択教科などではさらに発展的に扱うこともできる。いずれにしても一度は取りあげたい教材の一つ  
 といえる。