位相群における Sierpinski の性質について

山　田　深　雪

第一可附番性公理が成立する T_0- 位相群は左不変な（即ち $\rho(ax, ay)=\rho(x,y)$ なる）距離 $\rho(x,y)$ により距離付け可能である事が角谷, G. Birkhoff 両氏によつて示されている。[(1)] それ故此の空間に於ける集合に対しては Sierpinski の性質を考える事は可能である。然しながら一般の位相群に対しては従来の距離的な概念よりなる Sierpinski の性質を考える事は不可能であろう。依つて或る適当な性質 S を一般の位相群に対して定義し，第一可附番性公理が成立する T_0- 位相群に対しては性質 S と Sierpinski の性質とが全く同値になる様に出来ないだろうかと云ふ事が問題になつてくる。筆者にはかゝる性質が既に定義されているか否かについては明らかでない。従つて先づ § 1 において上記の性質 S を位相群に対し導入し，更に § 2 において之と位相群に於ける局所連結性，一様局所連結性との間の諸関係について調べてみたいと思ふ。

§ 1. Property S

一般に位相群があたへられた時単位元に於ける近傍系として $V^{-1}=V$ なる開集合の族 $\{V\}$ をとつても同値な位相群となる故，始めから単位元に於ける近傍系は $V^{-1}=V$ をみたしているものと仮定して差支へない。よつて以下此の仮定の下に議論を進める事とする。

〔定　義〕

property S ： T- 群 G における集合 M が property S をもつとは，任意の単位元 e の近傍 $U(e)$ に対して有限個の連結集合 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots, M_n$ が存在し，次の条件 (1), (2), を満足する事を云ふ。

(1) $M=\sum_{i=1}^{n} M_i$

(2) $M_i^{-1}M_i \subset \mathrm{U}(e)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

先に述べた如く第一可附番性公理が成立する T_0- 位相群 G においては $V_n=V_n^{-1}$, $V_{n+1}^2\subset V_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n=e$ なる完全近傍系 $\{V_n\}$ に依り，

$$\rho(x,y)=o \rightleftarrows \forall_n,\ x\in yV_n$$

なる如き左不変な距離 $\rho(x,y)$ が付けられる事を角谷，Birkhoff 両氏は示されている。依つて従来の距離的な概念より成る Sierpinski の性質，即ち

property S_1 ： 距離空間 R における集合 M が property S_1 をもつとは，任意の $\varepsilon>o$ に対して有限個の連結集合 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots, M_n$, が存在し，次の条件 (1), (2) を満足する事を云ふ。

---

(1) 角谷静夫 ; über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Tokyo 12 (1936)
角谷静夫 : über ein Metrisationsproblem, Proc. Phy. Math. Soc. Japan 20 (1938)
G. Birkhoff : A note on topological groups, Comp. Math 3 (1936) 参照

$$(1)\ M=\sum_{i=1}^{n} M_i$$

$$(2)\ \delta(M_i)\leqq\varepsilon\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$ [1]

と property S との関係を此の空間について調べると，先づ G を第一可附番性公理をみたす T_0- 位相群とし，M を Sierpinski の性質をもつ $M\subset G$ なる集合とする時，任意の単位元近傍 $U(e)$ をとれば或る単位元近傍 $U_\varepsilon(e)$ が存在して $U_\varepsilon(e)\subset U(e)$，$\varepsilon'<\varepsilon$ なる ε' につき

$$M=\sum_{i=1}^{n} M_i\quad;\quad M_i\ \text{連結且つ}\ \delta(M_i)\leqq\varepsilon'\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

となる。此の時 $M_i\ni x, y$ とすれば $\rho(x^{-1}y, e)=\rho(y,\ x)<\varepsilon$ 故に $M_i^{-1}M_i\subset U_\varepsilon(e)\subset U(e)$ となり M は property S をもつ事がわかる。

逆に $M\subset G$ なる M が property S をもつと仮定すれば，任意の $\varepsilon>o$ に対し $U(e)\subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(e)$ なる $U(e)$ が存在して

$$M=\sum_{i=1}^{m} M_i\quad;\quad M_i\ \text{連結且つ}\ M_i^{-1}M_i\subset U(e)$$

となる。$M_i\ni y,\ z$ とすれば $x\in M_i$ なる任意の x 及び適当な $y_1,\ z_1\in U(e)$ なる $y_1,\ z_1$ により $y=xy_1,\ z=xz_1$ となる。$\rho(xy_1,\ xz_1)=\rho(y_1,\ z_1)\leqq\rho(y_1,e)+\rho(e,z_1)<\varepsilon$ より M は Sierpinski の性質をもつ事がわかる。以上により次の定理を得る。

〔定理 1〕 第一可附番性公理が成立する T_0- 位相群に於ける集合 M に対しては Serpinski の性質と property S とは全く同値である。

上の定理より property S は或意味において T-群 G に於ける Sierpinski の性質とみなして差支えないが，更に T-群に対しては左不変な一般距離の有向集合 $\{\rho_\alpha(x,\ y)\}$ が存在し，単位元の完全近傍系として $V(\alpha,\varepsilon)=\{x\,|\,\rho_\alpha(e,x)<\varepsilon\}$ なる $\{V(\alpha,\ \varepsilon)\}$ を採用する事が出来るから[2] property S と一般距離の有向集合 $\{\rho_\alpha(x,y)\}$ との間の関係について調べてみれば，次の定理が成立つ事がわかる。

〔定理 2〕 T-群 G に対し左不変な一般距離の有向集合 $\{\rho_\alpha(x,\ y)\}$ が定義されているものとする。

単位元の完全近傍系を $\{V(\alpha,\ \varepsilon)\}$ とし，$M\subset G$ なる集合 M の一般距離 ρ_α による直径を $\delta_\alpha(M)$[3] にて表はすとすると，

T-群 G における集合 M が property S をもつために必要且つ充分なる条件は M が property S_2： 任意の $\varepsilon>o$，及び α に対し，有限個の連結集合 $M_1,\ M_2,\ M_3,\ \cdots\cdots,\ M_n$ が存在し，次の条件 (1)，(2) を満足する。

$$(1)\ M=\sum_{i=1}^{n} M_i$$

$$(2)\ \delta_\alpha(M_i)\leqq\varepsilon\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

なる性質をもつ事である。

〔証　明〕 必要性。任意の $\varepsilon>o$，及び α を与えれば或る単位元近傍 $U(e)$ が存在し，$U(e)\subset V(\alpha,\ \varepsilon)$ となる。M は property S をもつ故，有限個の連結集合 $M_1,\ M_2,\ M_3,$

---

(1) $\delta(Mi)$ は集合 Mi の直径を意味する

(2) 淡中忠郎；位相群論，岩波（1949）

(3) 一般距離 ρ_α による直径とは，距離による直径と同様 $\delta_\alpha(M)=\inf\{\rho_\alpha(x,y)\,|\,x,y\in M\}$ を意味する

……, M_n が存在し，

$$M=\sum_{i=1}^{n} M_i \ , \ M_i^{-1} M_i \subset \mathrm{U}(e), \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

となる。$x, y \in M_i$ とすれば

$\rho_\alpha(x,y)=\rho_\alpha(x^{-1}x, x^{-1}y)=\rho_\alpha(e,x^{-1}y)<\varepsilon$。依つて M は property S_2 をもつ。

充分性。任意の単位元近傍 $\mathrm{U}(e)$ を与える時或 $V(\alpha, \varepsilon)$ が存在し，$\mathrm{V}(\alpha, \varepsilon) \subset \mathrm{U}(e)$となる。$M$ は property S_2 をもつ故，α 及び $\varepsilon'<\varepsilon$ なる ε' に対し，連結集合 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_m$, が存在し

$$M=\sum_{i=1}^{m} M_i \ , \ \delta_\alpha(M_i) \leqq \varepsilon' \ (i=1,2,\cdots\cdots, m)$$

となる。 $z \in M_i^{-1} M_i$ とすれば $x, y \in M_i$ なる x, y が存在し，$z = x^{-1}y$ となる。よつて

$$\rho_\alpha(e, x^{-1}y) = \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon$$

即ち $M_i^{-1} M_i \subset \mathrm{U}(e)$ である。故に M に対し property S が成立する。

以上により第一可附番性公理が成立する T_0-位相群における Sierpinski の性質と property S との関係及び T-群における property S と一般距離との関係については大体明らかになつたわけであるが，次に T-群自身について考える場合の便宜上，他の一つの性質 S^* について附記しておく事にする。

〔定　義〕

property S* ： T-群 G における集合 M が property S* をもつとは，任意の単位元 e の近傍 $\mathrm{U}(e)$ に対し，$\mathrm{U}(e)$ に含まれ e を含む連結集合 A と有限個の点 $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots, x_n$ が存在し

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i A$$

と書かかれる事を云ふ。

明らかに T-群 G における集合が property S* をもてば亦 property S ももつけれども一般に其の逆は成立しない。然しながら T-群 G 自身を取扱ふ場合においては次の定理に示す如く，property S* と property S は全く同じ性質であるとみなして良い．即ち

〔定　理3〕 T-群 G が property S をもてば，G は亦 property S* をもち．其の逆も成立する。

〔証　明〕 任意の単位元近傍 $\mathrm{U}(e)$ を与へる時，G は property S をもつ故有限個の連結集合 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ が存在し

$$G = \sum_{i=1}^{n} A_i \ , \ A_i^{-1} A_i \subset \mathrm{U}(e) \ \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

となる． $x_i \in A_i$ とすれば $G = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^{-1} A_i$ で且つ $x_i^{-1} A_i \ni e$ なる故，e を含む $\mathrm{U}(e)$ における連結成分を A とすれば $x_i^{-1} A_i \subset A$。故に

$$G = \sum_{i=1}^{n} x_i A \ ; \ A \subset \mathrm{U}(e), \ A \text{ 連結}$$

となる。逆に G が property S* をもつとすれば，任意の単位近傍 $\mathrm{U}(e)$ に対し，$\mathrm{V}(e)^2 \subset U(e)$ なる単位元近傍 $\mathrm{V}(e)$ が存在し，$\mathrm{V}(e)$ に含まれ e を含む連結集合 A と有限個の点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ により

$$G = \sum_{i=1}^{n} x_i A$$

と書かれる。$x_i A=B_i$ とおけば明らかに B_i は連結で而も $B_i^{-1}B_i \subset V(e)^{-1}V(e)=V(e)^2 \subset U(e)$。故に G は property S をもつ。

§ 2. 局所連結性及び一様局所連結性と property S との間の関係

此の節においては前節に述べた property S と局所連結性及び一様局所連結性との関係をしらべる事に依り T- 群 G における完閉集合Mに対しては上記三性質が互に同値である事を示す. 但し T- 群 G における集合 M が局所連結であるとは位相空間として局所連結である事を云ふものにし,[1] 亦 T- 群に於ける一様局所連結性の定義は後に述べる事とする。

〔定　理 4〕 T-群 G が局所連結であるためには単位元において局所連結であれば充分である。

〔証　明〕 $G \ni x_0$ とすれば任意の x_0 の近傍 $x_0U(e)$ をあたへる時, e を含む $U(e)$ に於ける連結成分 A に含まれる単位元近傍 $V(e)$ が存在する。$x_0V(e) \subset x_0A$, 且つ x_0A は連結で $x_0U(e)$ に勿論含まれる故, $x_0U(e)$ の x_0 を含む連結成分 B に含まれる。x_0 は任意の点である故 G は局所連結である。

〔定　理 5〕 T-群 G における集合 M が property S をもてば, M は局所連結である。

〔証　明〕 $M \ni x$ とし, x の任意の近傍を $xV(e)$ とする. T-群は Separation axiom T_3 を満足する故 [2] $\overline{W(e)}=\overline{W(e)^{-1}}$, $\overline{W(e)} \subset V(e)$ なる $W(e)$ が存在し, $W(e)$ に関して property S が成立するから

$$M=\sum_{i=1}^{n} M_i \quad ; \quad M_i \text{ 連結且つ } M_i^{-1}M_i \subset W(e) \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

なる如く有限個の $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ を選びうる。$\{M_i\}$ の中 x を含むか亦わ x を集積点としてもつ M_i の和集合を K とすればKは明らかに連結集合である。一方任意の $z \in K$ なる z をとれば, $z \in M_i$ とする時, $\overline{M}_i^{-1}z \subset \overline{W(e)}$, $x^{-1} \in \overline{M}_i^{-1}$ より $x^{-1}z \in \overline{W(e)}$。即ち $x^{-1}K \subset V(e)$ となる。更に $M\text{-}K$ は x を集積点としてもたぬ故, 適当な近傍 $Q(e)$ をとれば,

$$M \frown xQ(e) \subset K \subset xV(e)。$$

〔定　理 6〕 T- 群 G における集合 M が property S をもてば $M \subset M_0 \subset \overline{M}$ なるM_0 も property S をもつ。

〔証　明〕 任意の $U(e)$ を与える時 $V(e)=V(e)^{-1}$, $V(e)^2 \subset U(e)$, $\overline{V_1(e)} \subset V(e)$ なる$V(e)$, $V_1(e)$ が存在する。

M は property S をもつ故,

$$M=\sum_{i=1}^{n} M_i \quad ; \quad M_i \text{ 連結}, \ M_i^{-1}M_i \subset V_1(e) \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

となる。而る時, $M_0=\sum_{i=1}^{n} M_0 \frown \overline{M}_i$。

各 $M_0 \frown \overline{M}_i$ は連結で而も $x \in M_i$ とすれば $x^{-1}M_i \subset V_1(e)$, 即ち $\overline{M}_i \subset x\overline{V_1(e)}$ である。依つて

$$(\overline{M_0 \frown M_i})^{-1}(\overline{M_0 \frown M_i}) \subset \overline{M}_i^{-1}\overline{M}_i \subset \overline{V_1(e)}^{-1}\,\overline{V_1(e)} \subset V(e)^{-1}V(e) \subset U(e)$$

故に M_0 は property S をもつ。

上の定理及び〔定理 5〕より直ちに次の結果が得られる。

---

(1) T-群の局所連結性については L. Pontrjagin ; Topological Group, Princeton (1939) 参照

(2) 淡中忠郎 ; 位相群論, 岩波 (1949) 参照

〔系 1〕 T- 群 G における集合 M が property S をもてば $M \subset M_0 \subset \overline{M}$ なる M_0 は局所連結である。

〔定　義〕 G を T- 群, G における集合を N とする。
任意に与えられた $V_i \subset V_{i+1}^2$ ($i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$) なる可附番個の単位元近傍の族 $V^*=\{V_i\}$ に対し, $L_1 \frown N \neq O$, $L_i \frown L_{i+1} \neq O$, $L_i^{-1}L_i \subset V_i$ なる連結集合の列 $L_1, L_2, L_3, \cdots\cdots L_n$. (有限個の) により N と結び得る G の点 x の集りを $G\,[T_V^*(N)]$ と書く。
亦若し G のかわりに G における $M \supset N$ なる集合 M について上記の様な集合を示す時には $M\,[T_V^*(N)]$ と書く。[1]

〔定　理 7〕 T- 群 G における集合 M が property S をもてば, $M \subset N$ なる N に対し $M\,[T_V^*(N)]$ は亦 property S をもつ。

但し, 単位元近傍の族 $V^*=\{V_n\}$ は次の条件をみたすものとす。

(1)　$V_i \subset V_{i+1}^2$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$)

(2)　任意に与えられた単位元近傍Uに対し, $V_i \subset$ U なる V_i が存在する。

〔註〕 上記の条件 (2) は G が単位元に於ける可附番完全近傍系を有する (即ち G に於て第一可附番性公理が成立する) 事を意味するものである。

〔証　明〕 W を任意に与えられた単位元の近傍とすれば $\mathrm{U}^4 \subset W$ なる単位元近傍 U 及びUに対し, $V_k \subset$ U なる如き V_k が存在する。而る時は

$$V_{k+1}V_{k+2}\cdots\cdots V_m \subset \mathrm{U} \quad (m=k+1,\ k+2,\ \cdots\cdots)$$

となる。 E を $M\,[T_V^*(N)]$ の点で高々 k 個の連結集合 $L_1, L_2, \cdots\cdots L_k$; $L_1 \frown N \neq O$, $L_i \frown L_{i+1} \neq O$, $L_i^{-1}L_i \subset V_i$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, k$) により結ばれるものの集合とし, V_{k+1} に対して M を有限個の連結集合 A_i の和として表わせば,

$$M=\sum_{i=1}^{n} A_i \quad ; \quad A_i^{-1}A_i \subset V_{k+1} \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$\{A_i\}$ の中Eの点を含む A_i の和集合を $B=\sum_{i=1}^{s} A_{ni}$ とし, 改めて $A_{ni}=B_i$ とおけば

$$B=\sum_{i=1}^{s} B_i \quad ; \quad B_i^{-1}B_i \subset V_{k+1} \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ s)$$

となる。明らかに $B \supset E$ であるが $B \subset M\,[T_V^*(N)]$ も成立する。何故ならば $B \ni y$ とすれば $B_i \ni y$ なる B_i が存在し, $B_i \frown E \ni z$ とすれば z は N と $Q_i^{-1}Q_i \subset V_i$, $Q_i \frown Q_{i+1} \neq O$, ($i=1, \cdots\cdots, m$) なる高々 k 個の連結集合 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots\cdots, Q_m$ ($m \leqq k$) によつて結ばれる。よつて $B_i^{-1}B_i \subset V_{k+1}$ なる事より y は $M\,[T_V^*(N)]$ に含まれる事がわかる。以上より $E \subset B \subset M\,[T_V^*(N)]$ がわかつた。次に

W_i を $B_i \frown C \neq O$, $C^{-1}C \subset$ U なる M に含まれる連結集合 C に依り B_i と結ばれる $M\,[T_V^*(N)]$ の点の集合とすると

$$M\,[T_V^*(N)] = \sum_{i=1}^{s} W_i$$

となる事を証明する。

先づ $x \in B$ とすれば $x \in \sum_{i=1}^{s} W_i$ となる事は明らかであるから $x \in M\,[T_V^*(N)]$, $x \notin B$ なる場合を考える。 $M\,[T_V^*(N)]$ 及び B の定義より $L_1 \frown N \neq O$, $L_p \ni x$, $L_i \frown L_{i+1} \neq O$

(1) 即ち $L_1 \frown N \neq O$, $L_i \frown L_{i+1} \neq O$, $L_i^{-1}L_i \subset V_i$ なる M における連結集合の列 $L_1, L_2, L_3, \cdots\cdots, L_n$ (有限個の) により N と結び得る M の点の集合を $M\,[T_V^*(N)]$ とかく.

$(i=1, 2, \cdots\cdots, p-1)$ なる p 個の $(p>k)$ 連結集合 $L_1, L_2, \cdots\cdots, L_p$ が存在する。さて $L_k \frown L_{k+1} \ni y$ とし, $z_{k+t} \in L_{k+i}$, $z_{k+t'} \in L_{k+t'}$ $(t \geqq t' > 0)$, $L_{k+i} \frown L_{k+i+1} \ni z^*_{k+i}$ とすれば (但し, $i+k=k+1, \cdots\cdots, p-1$), y を含む B_j が存在し, 更に

$z^{-1}_{k+t} z_{k+t'} = z^{-1}_{k+t} z^*_{k+t} z^{*-1}_{k+t} z^*_{k+i+1} \cdots\cdots z^*_{k+t'} z^{*\,\prime -1}_{k+t} z_{k+t'} \subset V_{k+t} V_{k+t+1} \cdots\cdots V_{k+t'}$
$\subset V^2_{k+1} \subset \mathrm{U}.$

亦 $z^{-1}_{k+t'} z_{k+t} = (z^{-1}_{k+t} z_{k+i'})^{-1} \subset \mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}$

となる故 $(L_{k+1} \smile L_{k+2} \smile \cdots\cdots \smile L_p)(L_{k+1} \smile L_{k+2} \smile \cdots\cdots \smile L_p)^{-1} \subset \mathrm{U}$ なる事がわかる。よつて W_j が x を含む。

以上何れの場合にしても $x \in M[T_V{}^*(N)]$ ならば

$x \in \sum_{i=1}^{s} W_i$ 即ち $M[T_V{}^*(N)] \subset \sum_{i=1}^{s} W_i$ 。$M[T_V{}^*(N)] \supset \sum_{i=1}^{s} W_i$ は明らかであるから

$$M[T_V{}^*(N)] = \sum_{i=1}^{s} W_i \text{ 。}$$

次に任意の W_i に含まれる2点を y_1, y_2 とし, B_i と y_1 が $C_1^{-1} C_1 \subset \mathrm{U}$ なる連結集合 C_1 により結ばれ, B_i と y_2 が $C_2^{-1} C_2 \subset \mathrm{U}$ なる連結集合 C_2 により結ばれて且つ $B_i \frown C_1 \ni z_1$, $B_i \frown C_2 \ni z_2$ とすると,

$$y_1^{-1} y_2 = y_1^{-1} z_1 z_1^{-1} z_2 z_2^{-1} y_2 \subset \mathrm{U} V_{k+1} \mathrm{U} \subset \mathrm{U}^3 \subset W \text{ 。}$$

即ち $W_i^{-1} W_i \subset W (i=1, 2, \cdots\cdots, s)$ が証明された。よつて $M[T_V{}^*(N)]$ は property S をもつ。

〔系2〕 第一可附番性公理が成立する T- 群 G における集合 M が property S をもてば M は任意に小なる property S をもつ連結集合の有限和として表わされる [1]

〔証 明〕 T- 群 G が第一可附番性公理をみたす故 $V_i^2 \subset V_{i-1}$, $V_i^{-1} = V_i$ である様な単位元における可附番完全近傍系 $\{V_i\}$ が存在する事が容易に知られる。さて任意の単位元の近傍 W を与える時, W に対し, $V_k^3 \subset W$ なる如き V_k が存在する事がわかる。今 V_{k+i} $(i \geqq 1)$ を改めて V_i^* とかけば, 比れにより得られる $V^* = \{V_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ は〔定理7〕の条件 (1), (2) を満足する事がわかる。V_k に対し,

$$M = \sum_{i-1}^{n} M_i \text{ ; } M_i \text{ 連結, } M_i^{-1} M_i \subset V_k \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

と M を有限個の連結集合の和に分解し, 各 M_i に対して $M[T_V{}^*(M_i)]$ を作ると前定理より $M[T_V{}^*(M_i)]$ は連結且つ property S をもつ。

$M[T_V{}^*(M_i)] \ni x, y$ とし, x が M_i と $L_1 \frown M_i \neq O$, $L_m \ni x$, $L_j^{-1} L_j \subset V_j^*$ $(j=1, \cdots\cdots, m)$ なる連結集合 $L_1, L_2, \cdots\cdots, L_m$ に依り結ばれるとし, y が M_i と $Q_1 \frown M_i \neq O$, $Q_n \ni y$, $Q_j^{-1} Q_j \subset V_j^*$ $(j=1, \cdots\cdots, n)$ なる連結集合で結ばれるとする。而る時は $L_j \frown L_{j+1} \ni x_j$ なる x_j 及び $Q_j \frown Q_{j+1} \ni y_j$ なる y_j が存在する。更に $L_1 \frown M_i \ni z_2$ とすると,

$x^{-1}y = x^{-1} x_{m-1} x_{m-1}^{-1} x_{m-2} \cdots\cdots x_1^{-1} z_1 z_1^{-1} z_2 z_2^{-1} y_1 y_1^{-1} y_2 \cdots\cdots y_{n-1}^{-1} y \subset V_m^* V_{m-1}^* \cdots\cdots V_1^* V_k \times$
$V_1^* \cdots\cdots V_{n-1}^* V_n^* \subset V_k^3 \subset W$。

即ち $(M[T_V{}^*(M_i)])^{-1}(M[T_V{}^*(M_i)]) \subset W$ である。よつて命題は証明された。

---

(1) M が任意に小なる集合の和として表はされるとは, 任意にあたえられた単位元近傍 U に対し M が $M_\alpha^{-1} M_\alpha \subset \mathrm{U}$ なる様な M_α の和として表はされる事を意味する。

上の〔系2〕の証明における $M[T_V^*(M_i)]$ は M が局所連結である事に注目すると M に於ける開集合となつている事は容易に知られるが，更に M $[T_V^*(M_i)]$ とする事に依り，M は任意に小なる property S をもつ連結な閉集合の有限和として表はされる事もわかる。即ち

〔系3〕 第一可附番性公理が成立する T- 群 G における property S をもつ集合 M の各点 p は任意に小なる property S をもつ M における region に含まれる。此処に region のかわりに連結な閉集合としてもよい。

次に距離空間における一様局所連結性の概念[1]と同様に T- 群に対しての一様局所連結性を次の如く定義する。

〔定 義〕 T- 群 G における集合 M が一様局所連結であるとは，任意の単位元の近傍 U に対し，或る単位元の近傍 V が定まり，M に含まれる任意の x, y に対し $x^{-1}y \in V$ が成立ならば $A^{-1}A \subset \mathrm{U}$ なる如き x, y を含む，M における連結集合が存在する事を云ふ。即ち

$\forall \mathrm{U},\ \exists V\ ;\ x, y \in M,\ x^{-1}y \in V \rightarrow \exists A \subset M,$ A連結且つ $A^{-1}A \subset \mathrm{U}, A \ni x \smile y$

上の定義より直ちに次の定理が成立する。

〔定 理8〕 T- 群 G における集合 M が一様局所連結ならば，M は局所連結である。

〔証 明〕 M の局所連結性を証明するため $x \in \mathrm{M}$ とし，x の近傍を $W(x)$ とする。然る時には或る単位元の近傍 U が存在し $x\mathrm{U} \subset W(x)$ となる。M が一様局所連結なる故，或る単位元近傍 V が定まり，$y, z \in \mathrm{M}$ なるy, z に対し，

$$y^{-1}z \in V \rightarrow \exists A \subset \mathrm{M}\ ;\ A^{-1}A \subset \mathrm{U},\ A \text{ 連結且つ } A \supset z \smile y$$

となる。今 $xy \in xV \frown \mathrm{M}$ とすると $(xy)^{-1}x \in V$ となる故，上に示した様な x と xy を含む A_y[2] が存在する。

$$A = \sum_{y \in V \frown x^{-1}M} A_y$$

とすれば $A \supset xV \frown \mathrm{M}$, 且つ各 A_y について $x^{-1}A_y \subset \mathrm{U}$ なる故 $A_y \subset x\mathrm{U}$. よつて $A \subset x\mathrm{U} \subset W(x)$ となる。即ちMは局所連結である。

〔定 理9〕 T- 群 G が局所連結ならば G は一様局所連結である。

〔証 明〕 U を任意に与えられた単位元近傍とすれば，$V^2 \subset \mathrm{U}$ なる単位元近傍 V が存在する。

V における単位元 e を含む連結成分を A とすると G は局所連結であるから或る単位元近傍 W が存在して $W \subset A$ となる。さて $x^{-1}y \in W$ とすれば $x^{-1}y \in A$ なる故 $y \in xA$。よつて xA は x 及び y を含み，且つ

$$(xA)^{-1}xA = A^{-1}A \subset \mathrm{V}^{-1}\mathrm{V} = \mathrm{V}^2 \subset \mathrm{U}$$

が成立する。明らかに xA は連結であるから G が一様に局所連結なる事がわかる。

上の定理より T- 群 G 自身に対しては局所連結性と一様局所連結性とが，全く同値になる事がわかつたわけであるが，G における集合 M に対して上記の二性質が同値になるためには如何なる条件があれば充分であるかと云ふ事が問題として生じる。之について調べて見ると M が完閉であれば局所連結性と一様局所連結性とが同値な性質となる事が次の定理により知られる。

---

(1) G. T. Whyburn : Analytic topology (1942) 参照

(2) A_y は A と y の積を意味しない.

〔定　理10〕 T- 群 G における集合 M が完閉な局所連結集合ならば，M は一様局所連結である。

〔証　明〕 U を単位元 e の任意の近傍とすれば $V^2 \subset \mathrm{U}$ なる単位元近傍 V が存在し，x を M の任意の点とする時 xV における x を含む M の連結成分を A_x とすれば，M は局所連結なる故 A_x に含まれる $xW_x \frown \mathrm{M}$ が存在する。此処に W_x は e の近傍とす。さて M は完閉であるから，かゝる W_x に対して $V_x^2 \subset W_x$ なる e の近傍 V_x を選び $\{xV_x\}_{x\in M}$ にて M を覆えば M は有限個の $x_1 V_{x1}, x_2 V_{x2}, \cdots\cdots, x_n V_{xn}$ により覆はれ得る．即ち

$$\mathrm{M}=\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{V}_{xi} \frown \mathrm{M}$$

となる。

$$V_{x1} \frown V_{x2} \frown V_{x3} \frown \cdots\cdots \frown V_{xn} \supset Q$$

なる e の近傍 Q をとれば，$Q \ni x^{-1}y$，$x \smile y \subset \mathrm{M}$ とする時，x を含む $x_i V_{xi}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ が存在し且つ $x^{-1} y \in V_{xi}$ なる事より　　$y \in x_i V_{xi}^2 \subset x_i W_{xi}$ となる。

即ち　$x, y \in \mathrm{M}$ なる x, y をとる時

$$Q \ni x^{-1} y \rightarrow \exists\, x_i W_{xi} \;\; ; \;\; x \smile y \subset x_i W_{xi}$$

然して之は $Q \ni x^{-1} y \rightarrow \exists\, A_{xi}$　;　$x \smile y \subset A_{xi}$

を意味する。

$$A_{xi}^{-1} A_{xi} \subset (x_i V)^{-1} (x_i V) = V^{-1} V = V^2 \subset \mathrm{U}$$

なる故，一様局所連結なる事が証明された。

〔定　理11〕 T- 群 G における完閉局所連結集合 M は property S をもつ。

〔証　明〕 U を任意の単位元近傍とすれば $V^2 \subset \mathrm{U}$ なる単位元近傍 V が存在する。M は完閉局所連結集合なる故前定理により一様局所連結である。よつて適当に単位元近傍 W を定め，M に含まれる x, y に対し若し $x^{-1}y \in W$ ならば $A^{-1}A \subset V$なる x, y を含む連結集合 A が存在する様に出来る。

$Q^2 \subset W$ なる単位元近傍 Q をとり $\{xQ \mid x \in \mathrm{M}\}$ にて M を覆えば M は完閉なる故かゝる xQ 有限個にて覆はれ得る。即ち

$$\exists\; x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \; ; \; x_i \in \mathrm{M}\ (i=1, \cdots\cdots, n),\ \mathrm{M} \subset \sum_{i=1}^{n} x_i Q$$

x_i を含み $A_\alpha^{-1} A_\alpha \subset V$ なる如き M の連結部分集合 A_α の和集合を A_{xi} とする。而る時わ，$x_i z_1 \in x_i Q \frown \mathrm{M}$ とすると $x_i^{-1} x_i z_1 = z_1 \in W$　なる故 $A_\alpha^{-1} A_\alpha \subset V$ で且つ x_i，$x_i z_1$ を含む A_α が存在する。

$$\text{故に}\quad \mathrm{M} \frown x_i Q \subset A_{xi} \quad \text{即ち}\quad \mathrm{M}=\sum_{i=1}^{n} A_{xi}\,\text{。}$$

さて $A_{xi}^{-1} A_{xi} \subset \mathrm{U}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ が証明されさえすれば定理の真なる事がわかるから次に之を証明する。

$A_{xi} \supset z_1 \smile z_2$　とすると

$$\exists\; A_\alpha \; ; \; A_\alpha \supset x_i \smile z_1,\ A_\alpha \text{ 連結且つ } A_\alpha^{-1} A_\alpha \subset V,\ A_\alpha \subset \mathrm{M}.$$

$$\exists\; A_\beta \; ; \; A_\beta \supset x_i \smile z_2,\ A_\beta \text{ 連結且つ } A_\beta^{-1} A_\beta \subset V,\ A_\beta \subset \mathrm{M}.$$

故に $z_1^{-1} z_2 = z_1^{-1} x_i x_i^{-1} z_2 \subset A_\alpha^{-1} A_\alpha A_\beta^{-1} A_\beta \subset V^2 \subset \mathrm{U}$

よつて $A_{xi}^{-1} A_{xi} \subset \mathrm{U}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ である。

以上 § 2において述べた諸定理を総括する事により，T- 群 G における完閉集合 M に関する.次の如き定理を得る。即ち

〔定 理12〕 T- 群 G における完閉集合 M に対しては次の三つの関係は同値である。

(1) M は局所連結である。

(2) M は一様に局所連結である。

(3) M は property S をもつ。

亦局所完閉な property S をもつ T- 群が完閉な一様局所連結な T- 群と一致する事が，今迄述べた事から容易に知られる事を附記しておく。