「論証のもつ一般性」の理解ついて

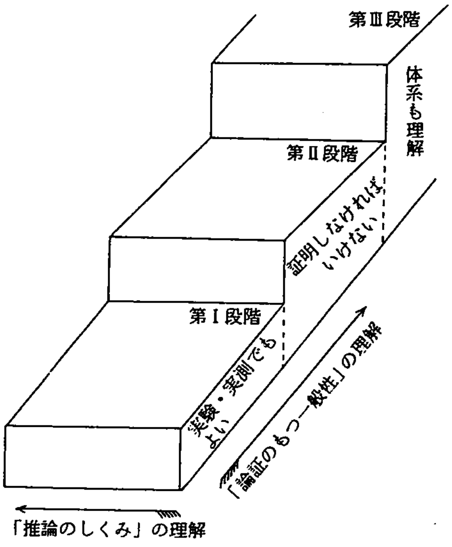
奥　村　泰　麿

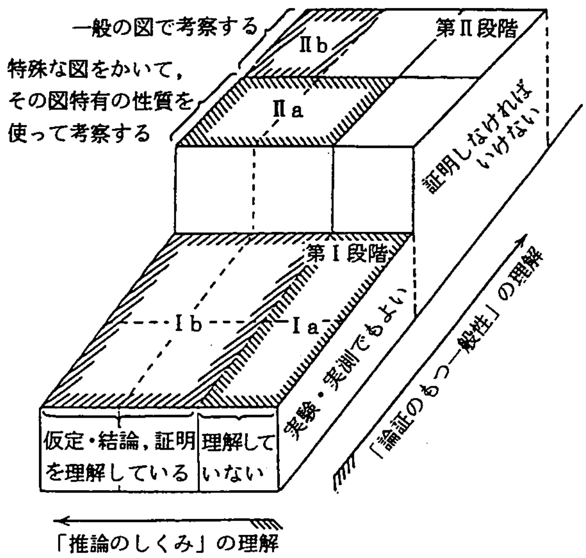
I　はじめに

数学の問題を長い時間考え、苦心惨憺の末やっと解けたときの喜びは、誰でも経験したことがあると思う。これを他の教科で味わうことは難しいのではないか。一つのことをじっと考えること、何時間でも何日でも考え続けること、その後で何かが衝撃的にひらめき、一気にすべてが氷解すること、その瞬間の鋭い喜び、これらはみな貴重な体験である。このように数学教育のめざすものとして「考える喜び」を育てることが提案されている[1]、私も同感である。そしてその最適な場として中学校では論証の学習が考えられる。論証の指導につては過去多くの研究がなされてきている[2]、それらを踏まえ、そのなかで証明の指導における最も基本的な問題として、証明とは何か、その必要性、価値、その意味を理解させることが残っている[3]、という指摘がある。これに関して、小関氏らの研究によると図形の性質を説明するのに実験・実測による方法でも十分であると考えている生徒は、中2で91%、中3でも77%いるという[4]、この結果は数学教育者にとってかなりショッキングである。

II　「論証の意義」の理解の発達段階について

小関氏らは「論証の意義」の理解の発達段階を様々な調査よって次のようにとらえている。





[図1・「論証の意義」の理解の発達段階]

このように「論証の意義」の発達を「推論のしくみ」の理解と「論証のもつ一般性」の理解の2面からアプローチしようとしている[5]。

Ⅲ　「論証のもつ一般性」の理解について

中学校で図形の論証を学習すると、「推論のしくみ」についての理解は深まる。しかし、「論証のもつ一般性」についての理解は特に深まるとはいえず、「論証の意義」についての生徒の理解を深めるには、「論証のもつ一般性」を理解させるための意図的な指導が必要である[6]。そして「段階Ⅰ」から「段階Ⅱ」への発達を促進させるためには「三角形の内角の和」についての指導を通して、実験・実測による方法の特徴を理解させ、平行線の性質などをもとに演繹的に証明することの意味を理解させることが有効である。その際、討論を取り入れた指導を行うことが有効であることが実証済みである[7]。

Ⅳ　研究の目的

段階Ⅱｂの準備期Ⅱｂ$_1$から段階Ⅱｂの完成期段階Ⅱｂ$_2$への発達を促進させる指導についての検討をする。

Ⅴ　研究の方法

段階Ⅱｂを２段階にわけ、それを段階Ⅱｂ$_1$と段階Ⅱｂ$_2$とする。そして学習者が段階のどこにあるか判断するために調査１を実施し、段階Ⅱｂ$_2$にはいたらないが段階Ⅱｂ$_1$にはある生徒を抽出する。それらの生徒にある課題を与え（調査２）、それによって段階Ⅱｂ$_2$へ発達が促進されないかを検討する。また段階Ⅱｂ$_2$にある学習者とまだ段階Ⅱｂにない学習者の特徴についても考察する。それらの題材を提供してくれる場として「平行四辺形になる条件」を考えた。

Ⅵ　調査１

１．調査問題

問題Ａ[8]

２つの四角形ＡＢＣＤと四角形ＢＥＦＣがともに平行四辺形である。このとき四角形ＡＥＦＤも平行四辺形になるか。

（Ａさんの解答）

右の図で四角形ＡＢＣＤは平行四辺形より

ＡＤ＝ＢＣ・・・①

ＡＢ＝ＤＣ・・・②

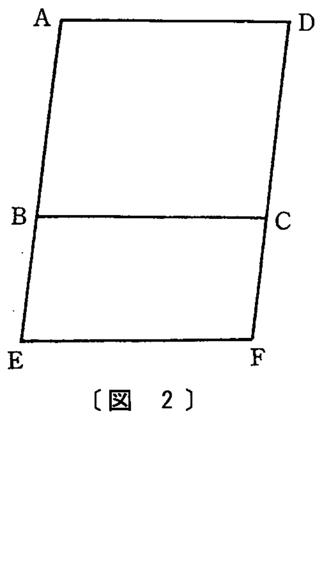
四角形ＢＥＦＣは平行四辺形より

ＢＣ＝ＥＦ・・・③

ＢＥ＝ＣＦ・・・④

①、③より

ＡＤ＝ＥＦ・・・⑤



〔図　２〕

②、④から

AB＋BE＝DC＋CF

ここで

AB＋BE＝AE

DC＋CF＝DF

だから　AE＝DF・・・⑥

⑤、⑥から四角形AEFDは2組の向かい合う辺がそれぞれ等しいので平行四辺形になることが証明できた。

Aさんの解答は

正しい　　正しくない　　どちらかに○をつけなさい。

正しくないに○をつけた場合、その理由を述べなさい。

問題B

四角形ABCDがある。そしてAB＝CDで∠B＝∠Dである。このとき四角形ABCDは平行四辺形になるか。

（Bさんの解答）

右の図で、AからBCに垂線をひきHとする。

CからもADに垂線をひきIとする。

△ABHと△CDIで

垂線だから∠BHA＝∠DIC＝90°

仮定より　AB＝CD

仮定より　∠B＝∠D

よって2つの直角三角形は斜辺と1鋭角が等しいので

△ABH≡△CDI

よって

AH＝IC・・・①

BH＝ID・・・②

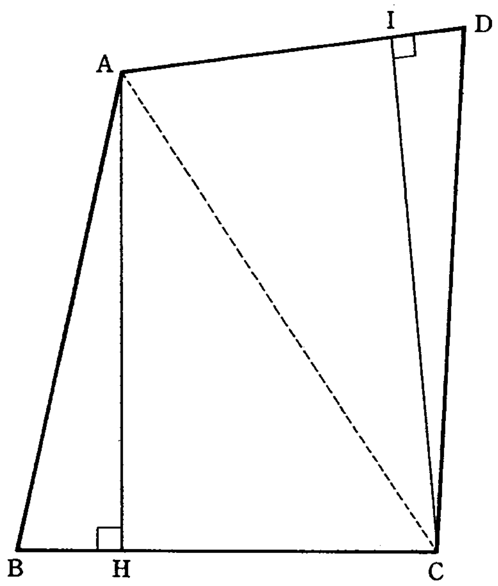
次にACを結んで

△AHCと△CIAで

垂線だから　∠H＝∠I＝90°

共通なので　AC＝AC

①から　AH＝IC



〔図　3〕

よって２つの直角三角形は斜辺と他の１辺が等しいので

△ＡＨＣ≡△ＣＩＡ

よって　ＡＩ＝ＨＣ・・・③

②、③より　ＡＤ＝ＢＣ・・・④

仮定より　ＡＢ＝ＣＤ・・・⑤

④、⑤から四角形ＡＢＣＤは２組の向かい合う辺がそれぞれ等しいので平行四辺形になることが証明できた。

Ｂさんの解答は

正しい　　正しくない　　どちらかに○をつけなさい。

正しくないに○をつけた場合、その理由を述べなさい。

２．調査対象

島根大学教育学部附属中学校第３学年１組、回答者37名

３．調査日・時間

平成６年１月21日・30分間

４．調査結果と抽出生徒

問題ＡでＡさんは正しくないと回答し、そのわけとしてＡＢＥとＤＣＦが一直線上にあるとは限らないからと正答した生徒は14名（37.8%）、これは小関氏らの調査対象よりかなり良い。またＡさんは正しいと回答した生徒は12名（32.4%）であった。また、問題Ｂで正解した生徒は５名（13.5%）である。このうち４名は問題Ａも正解している。あとの１名は問題Ａの図がＡさんが書いたものか問題から与えられたものか判断できず、無回答となっている。またＢさんを正しいと回答した生徒は19名（51.3%）であった。

この調査１の結果から段階Ⅱb_2に到達していると判断できる生徒を４人抽出し、P_1、P_2、P_3、P_4とした。また段階Ⅱb_2には到達していないが段階Ⅱb_1には到達している生徒を６人抽出しQ_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5、Q_6とした。そして段階Ⅱｂに到達していない（段階Ⅱａまたは段階Ⅰ）生徒７人をR_1、R_2、R_3、R_4、R_5、R_6、R_7とした。

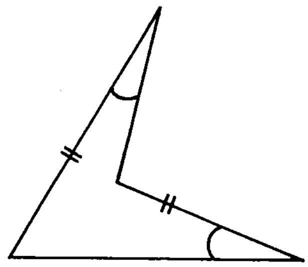
P_i $_{(i=1\sim4)}$の生徒がＢさんの解答を正しくないと判断した理由は次のとおりである。

P_1；∠Ｃと∠Ａが色々と変えられるからである。ようするにＡＢ／／ＤＣになるとは限らない。

P_2；四角形が正方形や長方形の場合、垂線はどうするのか。

P_3；ＢＣがＢＨよりも短い四角形だった場合、四角形ＡＨＣＩが使えないので問題の条件にあったすべての四角形を証明したことにはならない。

P_4；こんな感じのときも？



〔図　4〕

Ⅶ　調査２

1．調査問題

問題Ｂ　　調査１の問題Ｂと同じ

問題Ｃ

四角形ＡＢＣＤがある。そしてＡＢ＝ＣＤで∠Ｂ＝∠Ｄである。このとき四角形ＡＢＣＤは平行四辺形になるか。

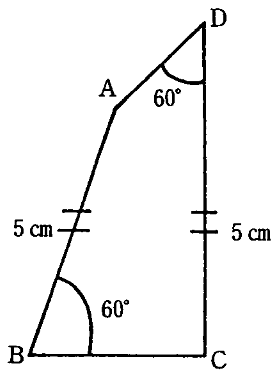
（Ｃさんの解答）

右の図で、∠Ｂ＝∠Ｄ＝60°

ＡＢ＝ＣＤ＝５㎝

よってこの図は平行四辺形ではないから

平行四辺形にならない。



〔図　5〕

Ｃさんの解答は

正しい　　正しくない　　どちらかに○をつけなさい。

正しくないに○をつけた場合、その理由を述べなさい。

問題ＢＣ

Ｂさんと Ｃさんの２人の解答をみて

Ⅰ　２人とも正しい

Ⅱ　Ｂさんは正しいがＣさんは正しくない

Ⅲ　Ｃさんは正しいがＢさんは正しくない

Ⅳ　２人とも正しくない

Ⅴ　よくわからない

どれかに○をつけ、その理由を述べなさい。

2．調査対象

島根大学教育学部附属中学校第３学年１組の抽出生徒17名

3．調査日・時間

平成６年１月22日・20分間

4．調査結果と考察

抽出生徒$Q_{i\,(i=1\sim6)}$（段階Ⅱb_1に到達している生徒）の結果は表１のとおりである。○は正答であったことを表し、×は誤答であったことを表す。また（○）ははじめは×であったがその後○に変わったことが検査用紙からわかったものである。たとえば、Q_1の生徒は調査１の問題Ａをはじめは誤答していたが正答に書き換えた。問題Ｂは書き換えることなく誤った。そして調査２になり今度は同じ問題Ｂを書き換えて正答した。問題BCははじめを選択していたがその後Ⅲに変えて正答に変わった、ということを意味している。

さて、この結果から、次のようなことが読み取れた。調査１の問題Ｂと調査２の問題Ｂは同一問題である。したがって変化した生徒は問題Ｃによって考えが変わったと考えられる。３つの異なった段階を比較してみると、段階Ⅱb_1に到達している生徒ではこの問題Ｃにより、問題Ｂの正答のみならず問題Ｃも正答し、両者の関係を正しくつかめる生徒が存在する。（表１）　ところが段階Ⅱb_2に到達している生徒は問題Ｃによって問題Ｂへの反応が変化した生徒はいなかった。（表２）　段階Ⅱｂに到達していない生徒は変化した生徒は存在するが問題Ｃとの関連までは正答するにはいたっていなかった。（表３）

〔表１・Ⅱb_1に達している生徒の結果〕

問題／生徒	調査１		調査２		
	問題Ａ	問題Ｂ	問題Ｂ	問題Ｃ	問題Ｂ・Ｃ・選択肢
Q_1	（○）	×	（○）	○	（○）（Ⅲ）←Ⅰ
Q_2	○	×	×	○	×　Ⅰ
Q_3	○	×	×	（×）	（×）（Ⅱ）←Ⅴ
Q_4	○	×	○	○	○　Ⅲ
Q_5	○	×	×	（×）	（×）（Ⅱ）←Ⅰ
Q_6	○	×	×	×	×　Ⅱ

〔表2・Ⅱ b_2に到達していると判断できる生徒の結果〕

生徒＼問題	調査1 問題A	調査1 問題B	調査2 問題B	調査2 問題C	調査2 問題B・C・選択肢
P_1	(○)	(○)	○	×	×　Ⅳ
P_2	○	(○)	○	(×)	(×)（Ⅳ）←Ⅲ
P_3	○	○	○	(×)	(×)（Ⅳ）←Ⅲ
P_4	(○)	○	(○)	○	○　Ⅲ

〔表3・Ⅱｂに到達していない生徒の結果〕

生徒＼問題	調査1 問題A	調査1 問題B	調査2 問題B	調査2 問題C	調査2 問題B・C・選択肢
R_1	(×)	×	(○)	×	×　Ⅳ
R_2	×	×	×	×	×　Ⅱ
R_3	×	×	(○)	×	×　Ⅳ
R_4	(×)	(×)	×	(×)	(×)（Ⅱ）←Ⅰ
R_5	×	×	(○)	×	×　Ⅳ
R_6	×	×	○	×	×　Ⅳ
R_7	×	×	×	(×)	×　Ⅱ

個々の生徒に目をむけ、記述された理由を分析してみると、段階Ⅱ b_1に到達している生徒の中でQ_1とQ_4の生徒は反例を見て反例を支持し、変容したと思われる。あとの４名は次のように記述している。「平行四辺形になる場合とならない場合がある。(生徒Q_2)」、「反例の方は変形すると平行四辺形にできるので反例は正しくない。(Q_5、Q_6)」、生徒Q_3の考えは生徒Q_2に似ていて、「なる場合とならない場合があるかもしれない」としている。

このように段階Ⅱ b_1に到達している生徒では反例はその命題が正しくないことを証明する方法であることが理解されているかどうかが大きな問題であることが分かった。

段階Ⅱ b_2に到達している生徒でもこの反例の意味の理解は重要な鍵を握っている。調査１で反例やそれらしきことが記述できた生徒も調査２で４人中３人が変容している。これはまったく予想外であった。しかし記述をみると段階Ⅱ b_1に到達している生徒とはややニアンスは異なる。「四角形はどちらもつくれるのでどちらも違う。(生徒P_1)」、「両方ともすべてに通用するわけではないからどちらも違う。(生徒P_2)」、「条件だけではなるともならないともいいきれないのでどちらも違う、よってなるとは限らないが正しい。(生徒P_3)」　このように極めて本質はついた表現となっている。正しくないことの証明、さらにその判断をも生徒にまかせそれぞれが自分の判断が正しいことの証明をやり、お互いぶつけあうような授業が必要なのではないだろうか。そしてその場として平行四辺形になる条件は話題にあふれていることも事実である。ちなみにP_4の生徒は次のように記述している「この条件ではどちらの図もかけるが反例の方の図にＢさんの証明は対応していない。」

段階Ⅱｂに到達していない生徒は「平行四辺形になることもあるし、ならないこともある。(生徒R_1、R_3、R_5、R_6)」、「Ｃさんの図はおかしい。(生徒R_2)」、「平行四辺形になるからＣさんは正しくない。(生徒R_4)」、「無記入。(生徒R_7)」という記述であった。ただ生徒の中のR_1、R_3、R_5、R_6の生徒がⅡｂに到達したのかどうかは不明である。

Ⅷ　まとめと今後の課題

「論証の意義」についての生徒の理解を深めるため、「論証のもつ一般性」を理解させるてがかりをつかもうとした。そのため特に小関氏らの研究のⅡｂには段階が存在するのではないかという直感をもとに論を進めてきた。本稿では触れていないがⅡb_3も考えられるのでと思う。２つの補助線が１つの頂点を通ったとして証明するが、それでは証明したことにならないことを理解させることなどはなかなか難しい。本稿で問題としたのは反例の扱いである。この反例により、多くのまた色々な段階の生徒は迷いだしている。今回の調査ではただ単に提示したのみであった。さらにそれをもとに授業したら、また全く生徒にまかせ、証明と反例が対立してでるようにしたらと研究したいことはたくさんある。いずれにしても反例は段階Ⅱb_1から段階Ⅱb_2への発達を促進させる１つの材料となることは検証できたように思う。その材料をどう料理するかが今後の課題である。また段階Ⅲの体系も理解するという段階にするためにどうするかという課題もある。この段階に進めるためにも、現在軽い取扱いである反例による正しくないことの証明は大きな役割を担っていると思われる。

参考・引用文献

(1)　藤原正彦（1993),『数学者の休憩時間』東京：新潮文庫，pp. 103-104。

(2)　杉山吉茂（1986),『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』東京：東洋館，pp. 105-113。

(3)　上揚書(2)　p. 109。

(4)　小関熙純（編）(1987),『図形の論証指導』東京：明治図書，pp. 138-145。

(5)　上揚書(4)　p. 137。

(6)　上揚書(4)　p. 144。

(7)　上揚書(4)　pp. 145-156。

(8)　上揚書(4)　pp. 136-137。

（おくむら　やすまろ・数学科）