

固定周辺に剪断力が作用している場合 の正方形平板の挫屈について

長谷川 節

(昭和27年10月日本物理学会年会講演)

I. 序 論

正方形平板が、その周辺に於いて、その平面内で作用する剪断力を受ける場合の弾性安定の問題は、一つの固有値問題として、理論的に興味あるばかりでなく、実際問題としても構造力学上重要な問題であるから、今までにも既に多くの人々によつて論じられている。この問題は偏微分方程式

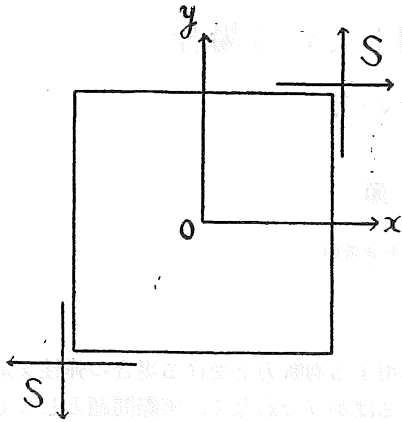
$$\Delta \Delta w - 4\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$$

を指定された境界条件の下に解いて λ なる固有値を定めれば解決されるのであるが、周辺が支持されている場合は、E. Trefftz 及び A. Willers, J. S. Newell 等によつて論じられており、又相対する二辺が固定されていて他の二辺が支持されている場合は H. J. Pollard 等によつて論じられている。然し、周辺が固定されている場合を解く事は、周辺が支持されている場合にくらべて非常にむづかしい。従つて固定周辺の場合に対して今までに得られている解はいずれも近似解である。すなわち日高・大久保両氏は偏微分方程式の数値解法に関する L. Collatz の方法を用いて λ の最小値を求め、友近・今井両教授及び S. Timoshenko は Rayleigh-Ritz の原理を用いて λ の最小値を求めた。また井口教授は境界条件を満たすような w の適当な表示式を用い、偏微分方程式をみたすように常数を決定するという方法を採用して、 λ の最小値を求めている。その他 H. J. Pollard, S. C. Redshaw, A. Kromm, 藤田諸氏もまたそれぞれの最小値を求めている。ところが、これ等の諸氏の求めた λ の最小値は互にかなり相違しているのであつて、果していずれが一番真値に近いかを判定することが困難である。

本論文では、先ず前出の偏微分方程式の特解を求め、それらのあらゆる線型的な組合せによつて得られる解が境界条件を満たすように λ の最小値及諸常数を決めるという方法を採用して、問題の厳密解を求めようと試みたのであるが、挫屈した状態で平板が釣合うために剪断力が採らなければならない最小の臨界値として著者が算出したものは、数値計算の収斂状況から判断して、殆んど真値に近いもののように思われる。実際 MIT の E. Reissner 教授が友近教授宛の私信で知らして来たところによると、最近 B. Budiansky 及び R. W. Connor が固有値 λ の最小値に対する上限及び下限を求めたが、著者の求めた λ の最小値は実に彼等の上下両限の間にちょうど挟まれているのである。

II. 基礎偏微分方程式の解

正方形平板の厚さ一様で且つ薄いものとする。変形を受けない場合における平板の中正平面を x, y 平面として、その中心を原点に、且つ正方形の辺にそれぞれ平行に x, y 両軸を、 z 軸を x, y 平面に垂直方向にとるとする。今剪断力がこの平板の周辺において、平板の平



面内で辺にそれぞれ平行に作用するとすれば、辺の単位長当りの剪断力の強さを S 、辺の長さを a 、平板の厚さを h 、変形して釣合いの状態にある場合の板の中正平面上の任意点の z 軸方向の変位を w で表わすとき、次の偏微分方程式が成り立つ：

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - 2S\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad \dots\dots\dots(2)$$

は撓み剛性率、 E 及び σ はそれぞれ平板をつくっている物質の Young 率及び Poisson 比である。

平面の周辺は固定されているから、境界条件は次のように表わされる：

$$\left. \begin{aligned} x = \pm a \text{ において } w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ y = \pm a \text{ において } w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

今

$$\xi = \frac{\pi}{2} \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{\pi}{2} \frac{y}{a} \quad \dots\dots\dots(4)$$

なる変換を施せば、微分方程式(1)は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - 4\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

のように変形され、また境界条件は次のようになる：

$$\left. \begin{aligned} \xi = \pm \frac{\pi}{2} \text{ において } w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \\ \eta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ において } w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

但し、ここに

$$\lambda = \frac{2Sa^2}{D\pi^2} \quad \dots\dots\dots(7)$$

容易に知られるように、(5)を満たす特解は

$$e^{(a_n+ni)\xi+(-c_n+ni)\eta}, \quad e^{(a_n+ni)\xi+(a_n-ni)\eta},$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} \cosh \sigma_n(\xi - \eta) \sin n(\xi + \eta), \\ \sinh \omega_n(\xi + \eta) \cos n(\xi - \eta). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

で与えられる。ここに

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n^2 &= \left(n^2 - \frac{\lambda}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - 2\lambda n^2} \\ \omega_n^2 &= \left(n^2 + \frac{\lambda}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

(n = 0, 1, 2, \dots)

ところが、問題の性質上最初から知れるように、方程式 (5) の解は次の対称性を満足しなければならない。すなわち、

$$w(\xi, \eta) = w(\eta, \xi) = w(-\xi, -\eta) = w(-\eta, -\xi). \dots\dots\dots(10)$$

従つて、(8)に列挙した特解のうちで、今の問題に適するものは次の二つだけである。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \sigma_n(\xi - \eta) \cos n(\xi + \eta), \\ \cosh \omega_n(\xi + \eta) \cos n(\xi - \eta). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

(9)における σ_n は一般に複素数で、 ω_n は実数または純虚数である。ところで、Rayleigh の原理を用いて得られる固有値 λ の最小値は 8 より小さいことが知られているが、しかもこの原理によつて得られた固有値は常にその真値よりも大きいのであるから、 λ の真値は 8 より小さいことが知られる。従つて、 ω_n が純虚数になるのは複号のうちの負号を採り且つ $n=0, 1, 2$ とした三つの場合だけである。そこで改めて

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \left\{ \left(n^2 + \frac{\lambda}{2} \right) + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \nu_n &= - \left\{ \left(n^2 + \frac{\lambda}{2} \right) + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (n = 0, 1, 2) \\ \omega'_n &= \left\{ \left(n^2 + \frac{\lambda}{2} \right) - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (n = 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

のように置くと、 ω_n, ν_n および ω'_n はすべて正または 0 となる。

また、一方 $n=0$ のとき $\sigma_0 = 0$ または $\pm i\sqrt{\lambda}$ となり、 $n \geq 1$ に対しては

$$\sigma_n = (\pm a_n \pm i\beta_n), \quad (a_n > 0, \beta_n > 0)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} a_n^2 - \beta_n^2 &= n^2 - \frac{\lambda}{2}, \\ 4a_n^2 \beta_n^2 &= -\frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda n^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

斯様にして、結局条件 (10) を満たすような方程式 (5) の解は次のように表わされることになる：

$$\begin{aligned} w &= A_0 \cos \sqrt{\lambda}(\xi - \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh a_n(\xi - \eta) \cos \beta_n(\xi - \eta) \cos n(\xi + \eta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sinh a_n(\xi - \eta) \sin \beta_n(\xi - \eta) \cos n(\xi + \eta) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cosh \omega_n(\xi + \eta) \cos n(\xi - \eta) + \sum_{n=0}^2 B'_n \cos \nu_n(\xi + \eta) \cos n(\xi - \eta) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} B''_n \cosh \omega'_n(\xi + \eta) \cos n(\xi - \eta). \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

次に、境界条件について考える。辺 $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ における境界条件は

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

であるが、これ等の代りに次のものを境界条件として採用することにする：

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w \sin s\eta \, d\eta &= 0, \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial w}{\partial \xi} \sin s\eta \, d\eta &= 0, \\ &(s = 0, 1, 2, \dots) \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w \cos s\eta \, d\eta &= 0, \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial w}{\partial \xi} \cos s\eta \, d\eta &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

同様に、 $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$ における境界条件としては、 $w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$ の代りに次のものを採ることにする：

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w \sin s\xi \, d\xi &= 0, \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial w}{\partial \eta} \sin s\xi \, d\xi &= 0, \\ &(s = 0, 1, 2, \dots) \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w \cos s\xi \, d\xi &= 0, \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial w}{\partial \eta} \cos s\xi \, d\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

対称の条件 (10) によつて、境界条件 (15) を満たすものは必然的に境界条件 (16) を満たすことが理解される。従つて、(14) の解を用いて、条件 (15) を満たすようにすると、 A_n, A'_n, B_n, B'_n に関する次の連立一次同次方程式が得られる。すなわち、

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a_{n1s} + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n a'_{n1s} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n b_{n1s} + \sum_{n=0}^{\infty} B'_n b'_{n1s} = 0, \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a_{n2s} + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n a'_{n2s} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n b_{n2s} + \sum_{n=0}^{\infty} B'_n b'_{n2s} = 0, \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a_{n3s} + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n a'_{n3s} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n b_{n3s} + \sum_{n=0}^{\infty} B'_n b'_{n3s} = 0, \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a_{n4s} + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n a'_{n4s} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n b_{n4s} + \sum_{n=0}^{\infty} B'_n b'_{n4s} = 0. \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここに

* これ等の条件式を境界条件として採ることについては次のように考えればよい。すなわち、例えば $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ で w および $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ を η について $-\pi$ と π との間で Fourier 級数に展開したとすると、斯様な級数が (6) の最初の条件を満たすためには $\cos s\eta, \sin s\eta$ の係数がすべて同時に 0 でなければならぬことになるが、このようにして得られる条件式が (15) なのである。

$$a_{01s} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{s^2-\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{2s}{s^2-\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda} \pi) \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_{n1s} = & - \left[a_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ & + \beta_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \left. \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + \left[(\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi - \cos n\pi) \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ & \left. + 2a_n \beta_n \sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2}, \\ & (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{n1s} = & - \left[a_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ & - \beta_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \left. \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + \left[\sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ & \left. - 2a_n \beta_n (\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi - \cos n\pi) \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2}, \\ & (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n1s} = & \sinh \omega_n \pi \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + (\cos n\pi - \cosh \omega_n \pi) \left\{ \frac{s+n}{\omega_n^2 + (s+n)^2} + \frac{s-n}{\omega_n^2 + (s-n)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'_{n1s} = & \sin \nu_n \pi \left\{ \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + (\cos \nu_n \pi - \cos n\pi) \left\{ \frac{s+n}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{s-n}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\ & (n=0, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'_{n1s} = & \sinh \omega'_n \pi \left\{ \frac{\omega'_n}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega'_n}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + (\cos n\pi - \cosh \omega'_n \pi) \left\{ \frac{s+n}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{s-n}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2} \\ & (n=3, 4, 5, \dots); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(n \pm s) = & \{a_n^2 + \beta_n^2 + (n \pm s)^2\}^2 + 4a_n^2 \beta_n^2; \\ & (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$a_{02s} = (\cos \sqrt{\lambda} \pi + 1) \frac{2\lambda}{s^2-\lambda} \sin \frac{s\pi}{2} + \sin \sqrt{\lambda} \pi \frac{2\sqrt{\lambda} s}{\lambda-s^2} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_{n2s} = & \left[-(\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi + \cos n\pi) \left(\frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n+s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n+s)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n-s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n-s)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2a_n \beta_n \sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)} + \frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\
& + \left[a_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\
& \left. + \beta_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2} \\
& \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
a'_{n2s} = & - \left[\sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left(\frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n+s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n+s)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n-s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n-s)} \right) \right. \\
& + 2a_n \beta_n (\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi + \cos n\pi) \left\{ \frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)} + \frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\
& + \left[a_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\
& \left. - \beta_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2} \\
& \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
b_{n2s} = & (\cos n\pi + \cosh \omega_n \pi) \left\{ \frac{\omega_n^2 - n(n+s)}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n^2 - n(n-s)}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2}, \\
& - \sinh \omega_n \pi \left\{ \frac{\omega_n(s+2n)}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n(s-2n)}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\
b'_{n2s} = & (\cos n\pi + \cos \nu_n \pi) \left\{ \frac{\nu_n^2 + n(n+s)}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n^2 + n(n-s)}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\
& - \sin \nu_n \pi \left\{ \frac{\nu_n(s+2n)}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n(s-2n)}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=0, 1, 2) \\
b''_{n2s} = & (\cos n\pi + \cosh \omega'_n \pi) \left\{ \frac{\omega_n'^2 - n(n+s)}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n'^2 - n(n-s)}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\
& - \sinh \omega'_n \pi \left\{ \frac{\omega'_n(s+2n)}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega'_n(s-2n)}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=3, 4, 5, \dots); \\
a_{03s} = & (1 + \cos \sqrt{\lambda} \pi) \frac{2s}{s^2 - \lambda} \sin \frac{s\pi}{2} + \sin \sqrt{\lambda} \pi \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - s^2} \cos \frac{s\pi}{2}, \\
a_{n3s} = & \left[(\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi + \cos n\pi) \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\
& + 2a_n \beta_n \sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \left. \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\
& + \left[a_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\
& \left. + \beta_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2},
\end{aligned}$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} a'_{n3s} = & \left[\sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ & - 2a_n \beta_n (\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi + \cos n\pi) \left. \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + \left[a_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ & \left. - \beta_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2}, \end{aligned}$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} b_{n3s} = & (\cos n\pi + \cosh \omega_n \pi) \left\{ \frac{s+n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{s-n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2}, \\ & + \sinh \omega_n \pi \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \end{aligned}$$

($n=0, 1, 2, 3, \dots$)

$$b'_{03s} = \begin{cases} \frac{\pi}{s} \sin \frac{s\pi}{2}, & (s=0) \\ \frac{2}{s} \sin \frac{s\pi}{2}, & (s=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b'_{n3s} = & (\cos n\pi + \cos \nu_n \pi) \left\{ \frac{-n-s}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{n-s}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + \sin \nu_n \pi \left\{ \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \end{aligned}$$

($n=1, 2$)

$$\begin{aligned} b'_{n3s} = & (\cos n\pi + \cosh \omega'_n \pi) \left\{ \frac{s+n}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{s-n}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + \sinh \omega'_n \pi \left\{ \frac{\omega'_n}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega'_n}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \end{aligned}$$

($n=3, 4, 5, \dots$) ;

$$a_{04s} = \sin \sqrt{\lambda} \pi \frac{2\sqrt{\lambda} s}{\lambda - s^2} \sin \frac{s\pi}{2} + (\cos \sqrt{\lambda} \pi - 1) \frac{2\lambda}{\lambda - s^2} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_{n4s} = & \left[a_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ & + \beta_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \left. \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ & + \left[(\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi - \cos n\pi) \left(\frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n+s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n+s)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n-s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n-s)} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. - 2a_n \beta_n \sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ \frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)} + \frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2},$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

$$a'_{n4s} = \left[a_n \cosh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_n \sinh a_n \pi \cos \beta_n \pi \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\
& + \left[\sinh a_n \pi \sin \beta_n \pi \left(\frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n+s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n+s)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n-s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n-s)} \right) \right. \\
& \left. + 2a_n \beta_n (\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi - \cos n\pi) \left\{ \frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)} + \frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
b_{n3s} &= \sinh \omega_n \pi \left\{ \frac{\omega_n(s+2n)}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n(s-2n)}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} + (\cosh \omega_n \pi - \cos n\pi) \\
& \times \left\{ \frac{\omega_n^2 - n(n+s)}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n^2 - n(n-s)}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\
b'_{n3s} &= \sin \nu_n \pi \left\{ \frac{\nu_n(s+2n)}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n(s-2n)}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\
& + (\cos \nu_n \pi - \cos n\pi) \left\{ \frac{\nu_n^2 + n(n+s)}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n^2 + n(n-s)}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=0, 1, 2) \\
b'_{n4s} &= \sinh \omega'_n \pi \left\{ \frac{\omega'_n(s+2n)}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega'_n(s-2n)}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\
& + (\cosh \omega'_n \pi - \cos n\pi) \left\{ \frac{\omega_n'^2 - n(n+s)}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n'^2 - n(n-s)}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=3, 4, \dots)
\end{aligned}$$

連立方程式 (17)–(20) は λ の特定の値以外の任意の値に対しては一般に $A_n = A'_n = B_n = B'_n = 0$ の時にだけ満たされるのであるが、この場合は z 方向の変位が全然起らないことになる。従つて、平板が挫屈した状態で釣合い得るためには、この連立方程式から A_n, A'_n, B_n, B'_n を消去して得られる無限行列式 Δ の値が 0 にならなければならない。そして斯様な行列式の値を 0 にするような λ の最小値に対する剪断力 S がわれわれの求めようとしてゐる剪断力の最小臨界値を与えるものである。そして、このように求められた λ の値を (17)–(20) に代入すればある一つの常数に対する他のすべての常数の比がきまることになり、結局平板中正面上の各点の相対変位がきまることになるのである。

今、連立方程式 (17)–(20) の各式中の A_n, A'_n, B_n, B'_n の配列の順序を $A_0, B_0, A_1, B_1, A'_1, B'_1, A_2, B_2, A'_2, B'_2, \dots$ の順に変え、また式の配列順序を同一の s に対して (17), (18), (19), (20) の順に採るものとする。そして s に対して順次 0, 1, 2, 3, …… の値を与えることにすれば、行列方程式 $\Delta(\lambda) = 0$ は次のようになる：

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{0:0} & b_{0:0} & a_{1:0} & b_{1:0} & a'_{1:0} & b'_{1:0} & a_{2:0} & b_{2:0} & \dots \\ a_{0:40} & b_{0:40} & a_{1:40} & b_{1:40} & a'_{1:40} & b'_{1:40} & a_{2:40} & b_{2:40} & \dots \\ a_{0:11} & b_{0:11} & a_{1:11} & b_{1:11} & a'_{1:11} & b'_{1:11} & a_{2:11} & b_{2:11} & \dots \\ a_{0:21} & b_{0:21} & a_{1:21} & b_{1:21} & a'_{1:21} & b'_{1:21} & a_{2:21} & b_{2:21} & \dots \\ a_{0:31} & b_{0:31} & a_{1:31} & b_{1:31} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0:41} & b_{0:41} & a_{1:41} & b_{1:41} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0:12} & b_{0:12} & a_{1:12} & b_{1:12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (21)$$

III. $\Delta(\lambda) = 0$ の根の計算

今、次のように新しい係数 c_{nrs} , c'_{nrs} , d_{nrs} , d'_{nrs} を導入する：

$$\left. \begin{aligned} a_{0rs} &= 2\cos^2 \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} c_{0rs}, \\ a_{nrs} &= 2\cosh^2 a_n \frac{\pi}{2} \cos^2 \beta_n \frac{\pi}{2} c_{nrs}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ a'_{nrs} &= 2\cosh^2 a_n \frac{\pi}{2} \cos^2 \beta_n \frac{\pi}{2} c'_{nrs}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ b_{nrs} &= 2\cosh^2 \omega_n \frac{\pi}{2} d_{nrs}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ b'_{nrs} &= 2\cos^2 \nu_n \frac{\pi}{2} d'_{nrs}, \quad (n=0, 1, 2) \\ b''_{nrs} &= 2\cosh \omega'_n \frac{\pi}{2} d'_{nrs}, \quad (n=3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

そうすると、これらの係数 c_{nrs} , c'_{nrs} , d_{nrs} , d'_{nrs} は次のように表わされることになる。

$$\begin{aligned} c_{01s} &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{s^2-\lambda} \tan \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{2s}{\lambda-s^2} \tan^2 \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} \cos \frac{s\pi}{2}, \\ c_{n1s} &= - \left[a_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2} \right) \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \beta_n \left(1 + \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \right) \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ &\quad + \left[N(a_n, \beta_n) \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 4a_n \beta_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2}, \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ c'_{n1s} &= - \left[a_n \left(1 + \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \right) \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \beta_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2} \right) \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ &\quad + \left[2 \tanh a_n \frac{\pi}{2} \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2a_n \beta_n N(a_n, \beta_n) \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2}, \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ d_{n1s} &= \tanh \omega_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ &\quad + M(\omega_n) \left\{ \frac{s+n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{s-n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2}, \\ &\quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ d'_{n1s} &= \tan \nu_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +L(\nu_n)\left\{\frac{s+n}{\nu_n^2-(n+s)^2}+\frac{s-n}{\nu_n^2-(n-s)^2}\right\}\cos\frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=0, 1, 2) \\
d'_{n1s} & =\tanh\omega'_n\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\omega'_n}{\omega_n'^2+(n+s)^2}+\frac{\omega'_n}{\omega_n'^2+(n-s)^2}\right\}\sin\frac{s\pi}{2} \\
& +M(\omega'_n)\left\{\frac{s+n}{\omega_n'^2+(n+s)^2}+\frac{s-n}{\omega_n'^2+(n-s)^2}\right\}\cos\frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=3, 4, 5, \dots); \\
c_{02s} & =\frac{2\lambda}{s^2-\lambda}\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{2\sqrt{\lambda}s}{\lambda-s^2}\tan\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}\cos\frac{s\pi}{2}, \\
c_{n2s} & =-\left[N'(a_n, \beta_n)\left(\frac{\{a_n^2-\beta_n^2-n(n+s)\}\{a_n^2-\beta_n^2+(n+s)^2\}+4a_n^2\beta_n^2}{R(n+s)}\right.\right. \\
& \quad \left.+\frac{\{a_n^2-\beta_n^2-n(n-s)\}\{a_n^2-\beta_n^2+(n-s)^2\}+4a_n^2\beta_n^2}{R(n-s)}\right) \\
& \quad -4a_n\beta_n\tanh a_n\frac{\pi}{2}\tan\beta_n\frac{\pi}{2}\left\{\frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)}+\frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)}\right\}\sin\frac{s\pi}{2} \\
& \quad +\left[a_n\tanh a_n\frac{\pi}{2}\left(1-\tan^2\beta_n\frac{\pi}{2}\right)\left\{(s+2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2+(n+s)^2}{R(n+s)}+(s-2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2+(n-s)^2}{R(n-s)}\right\}\right. \\
& \quad \left.+\beta_n\left(1+\tanh^2 a_n\frac{\pi}{2}\right)\tan\beta_n\frac{\pi}{2}\left\{(s+2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2-(n+s)^2}{R(n+s)}+(s-2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2-(n-s)^2}{R(n-s)}\right\}\right] \\
& \quad \times\cos\frac{s\pi}{2}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
c'_{n2s} & =-\left[2\tanh a_n\frac{\pi}{2}\tan\beta_n\frac{\pi}{2}\left(\frac{\{a_n^2-\beta_n^2-n(n+s)\}\{a_n^2-\beta_n^2+(n+s)^2\}+4a_n^2\beta_n^2}{R(n+s)}\right.\right. \\
& \quad \left.+\frac{\{a_n^2-\beta_n^2-n(n-s)\}\{a_n^2-\beta_n^2+(n-s)^2\}+4a_n^2\beta_n^2}{R(n-s)}\right) \\
& \quad +2a_n\beta_nN'(a_n, \beta_n)\left\{\frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)}+\frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)}\right\}\sin\frac{s\pi}{2} \\
& \quad +\left[a_n\left(1+\tanh^2 a_n\frac{\pi}{2}\right)\tan\beta_n\frac{\pi}{2}\left\{(s+2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2+(n+s)^2}{R(n+s)}+(s-2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2+(n-s)^2}{R(n-s)}\right\}\right. \\
& \quad \left.-\beta_n\tanh a_n\frac{\pi}{2}\left(1-\tan^2\beta_n\frac{\pi}{2}\right)\left\{(s+2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2-(n+s)^2}{R(n+s)}+(s-2n)\frac{a_n^2+\beta_n^2-(n-s)^2}{R(n-s)}\right\}\right] \\
& \quad \times\cos\frac{s\pi}{2}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
d_{n2s} & =M'(\omega_n)\left\{\frac{\omega_n^2-n(n+s)}{\omega_n^2+(n+s)^2}+\frac{\omega_n^2-n(n-s)}{\omega_n^2+(n-s)^2}\right\}\sin\frac{s\pi}{2} \\
& \quad -\tanh\omega_n\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\omega_n(s+2n)}{\omega_n^2+(n+s)^2}+\frac{\omega_n(s-2n)}{\omega_n^2+(n-s)^2}\right\}\cos\frac{s\pi}{2}, \\
& \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\
d'_{n2s} & =L'(\nu_n)\left\{\frac{\nu_n^2+n(n+s)}{\nu_n^2-(n+s)^2}+\frac{\nu_n^2+n(n-s)}{\nu_n^2-(n-s)^2}\right\}\sin\frac{s\pi}{2} \\
& \quad -\tan\nu_n\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\nu_n(s+2n)}{\nu_n^2-(n+s)^2}+\frac{\nu_n(s-2n)}{\nu_n^2-(n-s)^2}\right\}\cos\frac{s\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$(n=0, 1, 2)$$

$$d'_{n2s} = M'(\omega'_n) \left\{ \frac{\omega_n'^2 - n(n+s)}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n'^2 - n(n-s)}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ - \tanh \omega'_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\omega_n'(s+2n)}{\omega_n'^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n'(s-2n)}{\omega_n'^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=3, 4, 5, \dots);$$

$$c_{0:s} = -\frac{2s}{\lambda-s^2} \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-s^2} \tan \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$c_{n3s} = \left[N'(a_n, \beta_n) \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ \left. + 4a_n \beta_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ + \left[a_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2} \right) \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ \left. + \beta_n \left(1 + \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \right) \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

$$c'_{n3s} = \left[2 \tanh a_n \frac{\pi}{2} \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ (s+n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-n) \frac{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ \left. - 2a_n \beta_n N'(a_n, \beta_n) \left\{ \frac{s+n}{R(n+s)} + \frac{s-n}{R(n-s)} \right\} \right] \sin \frac{s\pi}{2} \\ + \left[a_n \left(1 + \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \right) \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ \left. - \beta_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2} \right) \left\{ \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

$$d_{n3s} = M'(\omega_n) \left\{ \frac{s+n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{s-n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ + \tanh \omega_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

$$d_{0:s} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & (s=0) \\ \frac{1}{s} \sin \frac{s\pi}{2}, & (s=1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$d'_{n3s} = L'(\nu_n) \left\{ \frac{s+n}{(n+s)^2 - \nu_n^2} + \frac{s-n}{(n-s)^2 - \nu_n^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ + \tan \nu_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=1, 2)$$

$$d'_{n3s} = M'(\omega_n) \left\{ \frac{s+n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{s-n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2}$$

$$+\tanh \omega'_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\omega'_n}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega'_n}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=3, 4, 5, \dots);$$

$$c_{04s} = \frac{2\sqrt{\lambda}s}{\lambda-s^2} \tan \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} \sin \frac{s\pi}{2} - \frac{2\lambda}{\lambda-s^2} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$c_{n4s} = \left[a_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2} \right) \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ \left. + \beta_n \left(1 + \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \right) \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \\ \times \sin \frac{s\pi}{2} + \left[N(a_n, \beta_n) \left(\frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n+s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n+s)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n-s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n-s)} \right) \right. \\ \left. - 4a_n \beta_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)} + \frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

$$c'_{n4s} = \left[a_n \left(1 + \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \right) \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 + (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right. \\ \left. - \beta_n \tanh a_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2} \right) \left\{ (s+2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n+s)^2}{R(n+s)} + (s-2n) \frac{a_n^2 + \beta_n^2 - (n-s)^2}{R(n-s)} \right\} \right] \\ \times \sin \frac{s\pi}{2} + \left[2 \tanh a_n \frac{\pi}{2} \tan \beta_n \frac{\pi}{2} \left(\frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n+s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n+s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n+s)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\{a_n^2 - \beta_n^2 - n(n-s)\} \{a_n^2 - \beta_n^2 + (n-s)^2\} + 4a_n^2 \beta_n^2}{R(n-s)} \right) \right. \\ \left. + 2a_n \beta_n N(a_n, \beta_n) \left\{ \frac{(2n+s)(n+s)}{R(n+s)} + \frac{(2n-s)(n-s)}{R(n-s)} \right\} \right] \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

$$d_{n4s} = \tanh \omega_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\omega_n(s+2n)}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n(s-2n)}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ - M(\omega_n) \left\{ \frac{\omega_n^2 - n(n+s)}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n^2 - n(n-s)}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

$$d'_{n4s} = \tan \nu_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\nu_n(s+2n)}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n(s-2n)}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ + L(\nu_n) \left\{ \frac{\nu_n^2 + n(n+s)}{\nu_n^2 - (n+s)^2} + \frac{\nu_n^2 + n(n-s)}{\nu_n^2 - (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=0, 1, 2)$$

$$d'_{n4s} = \tanh \omega'_n \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\omega'_n(s+2n)}{\omega_n^2 + (s+n)^2} + \frac{\omega'_n(s-2n)}{\omega_n^2 + (s-n)^2} \right\} \sin \frac{s\pi}{2} \\ - M(\omega'_n) \left\{ \frac{\omega_n^2 - n(n+s)}{\omega_n^2 + (n+s)^2} + \frac{\omega_n^2 - n(n-s)}{\omega_n^2 + (n-s)^2} \right\} \cos \frac{s\pi}{2},$$

$$(n=3, 4, 5, \dots);$$

但しここに

$$L(\nu_n) = \frac{\cos \nu_n \pi - \cos n\pi}{2\cos^2 \nu_n \frac{\pi}{2}} = \begin{cases} -\tan^2 \nu_n \frac{\pi}{2}, & (n: 0 \text{ および偶数}) \\ 1, & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$L'(\nu_n) = \frac{\cos n\pi + \cos \nu_n \pi}{2\cos^2 \nu_n \frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 1, & (n: 0 \text{ および偶数}) \\ -\tan^2 \nu_n \frac{\pi}{2}, & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$M(\omega_n) = \frac{\cos n\pi - \cosh \omega_n \pi}{2\cosh^2 \omega_n \frac{\pi}{2}} = \begin{cases} -\tanh^2 \omega_n \frac{\pi}{2}, & (n: 0 \text{ および偶数}) \\ -1, & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$M'(\omega_n) = \frac{\cos n\pi + \cosh \omega_n \pi}{2\cosh^2 \omega_n \frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 1, & (n: 0 \text{ および偶数}) \\ \tanh^2 \omega_n \frac{\pi}{2}, & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$N(a_n, \beta_n) = \frac{\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi - \cos n\pi}{2\cosh^2 a_n \frac{\pi}{2} \cos^2 \beta_n \frac{\pi}{2}} \\ = \begin{cases} \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2}, & (n: \text{偶数}) \\ 1 - \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2}, & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$N'(a_n, \beta_n) = \frac{\cosh a_n \pi \cos \beta_n \pi + \cos n\pi}{2\cosh^2 a_n \frac{\pi}{2} \cos^2 \beta_n \frac{\pi}{2}} \\ = \begin{cases} 1 - \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2}, & (n: \text{偶数}) \\ \tanh^2 a_n \frac{\pi}{2} - \tan^2 \beta_n \frac{\pi}{2}, & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

従つて、 $\Delta(\lambda) = 0$ は次のように変形される：

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{0:0} & d_{0:0} & c_{1:0} & d_{1:0} & c'_{1:0} & d'_{1:0} & c_{2:0} & d_{2:0} & \cdots \\ c_{0:1} & d_{0:1} & c_{1:1} & d_{1:1} & c'_{1:1} & d'_{1:1} & c_{2:1} & d_{2:1} & \cdots \\ c_{0:11} & d_{0:11} & c_{1:11} & d_{1:11} & c'_{1:11} & d'_{1:11} & c_{2:11} & d_{2:11} & \cdots \\ c_{0:21} & d_{0:21} & c_{1:21} & d_{1:21} & c'_{1:21} & d'_{1:21} & c_{2:21} & d_{2:21} & \cdots \\ c_{0:31} & d_{0:31} & c_{1:31} & d_{1:31} & c'_{1:31} & d'_{1:31} & c_{2:31} & d_{2:31} & \cdots \\ c_{0:41} & d_{0:41} & c_{1:41} & d_{1:41} & c'_{1:41} & d'_{1:41} & c_{2:41} & d_{2:41} & \cdots \\ c_{0:12} & d_{0:12} & c_{1:12} & d_{1:12} & c'_{1:12} & d'_{1:12} & c_{2:12} & d_{2:12} & \cdots \\ c_{0:22} & d_{0:22} & c_{1:22} & d_{1:22} & c'_{1:22} & d'_{1:22} & c_{2:22} & d_{2:22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \cdots \cdots (23)$$

次に、斯様な行列方程式 $D(\lambda) = 0$ を満たす λ の値を求めなければならない。このために、この行列式の左上の要素 $c_{0:0}$ を基準として破線で示してあるように、右に向つて m 列を、下に向つて m 行を採つて作つた行列式を $D_m(\lambda)$ で表わすことにする。そして m を 1, 2, 3, \cdots としたとき $D_m(\lambda) = 0$ を満たす最小根 λ_m を求め、 m が大きくなると共にこの根 λ_m がある一定極限に近づくかどうかを調べる。もしもこのような一定極限值が存在すれ

ば、これがわれわれの求める固有値 λ の最小値を与えることとなるのである。この根を求めるために λ に適当ないろいろな値を代入したときの $D_m(\lambda)$ の値を求めると次の第1表のようになる。表の最後の行には Lagrange の内挿法により求められた λ_m の値が記されている。

第1表 $D_m(\lambda)$ および λ_m の値

$\lambda \backslash m$	1	2	3	4	6
6.5					7.2996
6.0				-0.4188	-1.5700
5.5				-0.2071	-5.1832
5.0				0.0513	
4.0	0	0	0		
λ_m	4.0	4.0	4.0	5.09	6.16
$\lambda \backslash m$	7	8	9	10	11
7.30				-2.0773×10^{-2}	-6.0860×10^{-4}
7.25			-8.5112×10^{-3}	-1.020×10^{-2}	-1.7468×10^{-4}
7.20		4.2772×10^{-2}	-3.5788×10^{-3}	1.2931×10^{-2}	5.3624×10^{-4}
7.15		1.4336×10^{-2}	1.3686×10^{-3}		
7.05	-0.41524	-4.1536×10^{-2}			
6.95	-1.9476×10^{-3}				
6.85	0.42424				
λ_m	6.945	7.125	7.164	7.247	7.234
$\lambda \backslash m$	12		13	14	
7.40	-2.6819×10^{-5}		-9.9404×10^{-7}	-7.0964×10^{-8}	
7.35	-3.570×10^{-6}		-2.8848×10^{-7}	-3.1248×10^{-8}	
7.30	1.7923×10^{-5}		3.9326×10^{-7}	6.8932×10^{-9}	
λ_m	7.342		7.329	7.322	

第1表より知られるように、 m の値が段々大きくなるに従つて λ_m の値は 7.32……に収斂する。従つて、行列方程式 $D(\lambda)=0$ を満たす λ の最小値の真値は恐らく 7.32……と思われる。

以上の計算においては、(17)–(20) の諸式から行列方程式を作るとき常数の配列順序を $A_0, B_0, A_1, B_1, A'_1, B'_1, \dots$ のように選んだのであるが、この順序を変更して得られる行列方程式の根を求める場合においても、その根の値は m の増加と共に前の場合と同じ極限值に近づく筈である。実際、常数の配列順序を $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots$ とする代わりに、 $B'_0, A_0, B_0, A_1, B_1, A'_1, B'_1, \dots$ のように配列順序を変更して得られる m 次の行列方程式の根を λ'_m で表わすことにすると、計算の結果 $m=13$ および $m=14$ の場合、第2表に示すようになる。

第2表 λ'_m の値

m	13	14
λ'_m	7.333	7.331

$\lambda_4=7.331$ は前の場合の結果 $\lambda_m=7.32\cdots$ と殆んど一致する。従つて、 λ の最小値の真値は $7.32\cdots$ と採ることが出来ると思われる。

参考のために著者の得た値 $\lambda=7.32\cdots$ を今まで、多くの人々によつて得られた値と比較すると、次の第3表のようになる。

日高教授の値 7.44902

は、偏微分方程式の数値解法に関する

Collatzの方法を応用

して得られた値から

外挿法によつて求め

たものである。井口教

授の解法は境界条件

を満たすような適当

な w の表示式を採り、それらの一次結合が w に関する偏微分方程式(1)を満たすように固有値 λ を決定する方法であるが、数学的にいささか疑点があるばかりでなく、固有値の収斂性についても明瞭でない点がある。然し適当な w の表示式を使うことにすれば、かなり λ に対してよい近似値が得られるので実用的には興味ある方法である。このような方法で井口教授が求めた値が 7.29 である。一方、友近・今井両教授の値 7.74615 および S. Timoshenko の値 7.725 は共に Rayleigh-Ritz の原理を使つて算出したもので、両者は大体等しいとみなされる。周知のように、Rayleigh-Ritz の原理によつて得られる固有値の値は一般に真値に対する上限を与えるものである。われわれの問題に対する固有値の真値は当然これ等の値より小さいことが最初から予期される。そこで、本論文で偏微分方程式の解を求める時にもこのことを考慮に入れたのであつた。ところで、井口教授の値 7.29 は、計算の各段階で得られる近似値の収斂性から知られるように、かなり真値に近いものであらうと想像される。すなわち、井口氏は、第1近似値として 7.78、第2近似値として 7.53、第3近似値として 7.39、第4近似値として 7.29 を得られたのであるが、これら一連の近似値を互に比較してみると、その収斂性はかなり速いことが知られるのであつて、従つて最後の 7.29 という値(第4近似値)は相当真値に近いように思われるのである。然しながら、第3表に示している λ の色々な値のうちいづれが最も真値に近い値であるかを適確に判定する資料は今までになかつた。ところが、序論において既に述べたように、最近 MIT の E. Reissner 教授から友近教授宛に來た私信によると、B. Budiansky および R. W. Connor もまた同じ問題を論じ、固有値 λ の最小値の上限および下限として、それぞれ 7.396 および 7.319 という値を得ている。すなわち、 λ の真値は

$$7.319 \leq \lambda \leq 7.396 \quad (24)$$

という範囲にあるというのである。

そこで、この結果を第3表と比較してみると、Redshaw の値 7.37 は上の上限および下限の間に挟まれるが、他の人々の求めた値は、いずれも(24)における λ の存在範囲外にある。井口氏の値 7.29 およびこれと全く一致している Pollard の値もいささか小さ過ぎるようである。しかし、 λ の真値が(24)における下限 7.319の方に近いか或は上限 7.396の方に近いかはわからないから、Redshaw の値 7.37 と井口氏および Pollard の値 7.29 のうちいずれの方がすぐれているかを判断することは出来ない。仮りに λ の真値が下限 7.319 の

第3表 λ の 値

友近・今井	日高・大久保	井口	藤田
7.74615	7.44902	7.29	6.87
Timoshenko Krom	Pollard	Redshaw	長谷川
7.725	7.29	7.37	7.32

方に近い値であれば、井口氏および Pollard の値は (24) における λ の上下両限の間に存在しないにもかかわらず、Redshaw の値よりも近似度の高い値であるといえる。一方、筆者の得た λ の値 7.32……は (24) における λ の上下両限の間に存在し、しかも、その近似値の収斂状況も前述のように甚だ満足すべきものがあるのであつて、他の人々の求めた近似値の収斂状況に比べてはるかに優れているように思われる。そればかりではなく、著者の解の構成も他の人々の解に比べて厳密である。従つて、著者の得た λ の値 7.32 は恐らく固有値 λ の最小値の真値とみなすことが出来ると思われる。

IV. 結 語

本論文では、四辺が固定されている正方形平板の周辺に一律な剪断力 S がその平板の面内で作用する場合における弾性安定の問題を出来るだけ厳密に取扱うことを試みた。そして、挫屈した状態で平板が釣合い得るために、基礎の偏微分方程式における固有値 λ (従つて剪断力 S) が採らなければならない最小の臨界値を求めた。結果は次のようである：

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{2a^2 S}{D\pi^2} = 7.32 \dots\dots, \\ \text{あるいは} \\ S &= 3.66 \dots\dots \frac{D\pi^2}{a^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

今までに他の人々によつて得られた S の最小値と上の値とを比較し、種々詳しく検討した結果、 S の真値とみなして大過ないであろうと推論した。

本論文で取扱つた問題は友近教授から暗示を受けたものである。研究遂行の途中絶えず懇切な御指導と御激励を賜つた同教授に対し深甚の謝意を表わします。

文 献

1. E. Trefftz und A. Willers: Der Bestimmung die Schubbeanspruchung beim Ausbeulen rechteckiger Platten, Z. A. M. M. 16, (1936).
2. J. S. Newell: Note on the Design of Metal Plate for Use in Airplane Construction, Rep. Air. Mat. Res. Mass. Inst. Tech., 1931~32.
3. H. J. Pollard: Some Developments in Aircraft Construction, J. Roy. Aero. Soc., 38 (1934).
4. 日高孝次・大久保多津: 四辺に剪断力を受けた弾性板の歪曲, 海と空, 第18巻。
5. 友近晋・今井功: 固定周辺に剪断力を受ける正方形板の弾性安定に就いて, 海と空, 第18巻。
6. S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability, (1936).
7. S. Iguchi: Die Knickung der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte durch Schubkräfte, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. 20 (1933).
8. S. C. Redshaw: The Elastic Stability of a Curved Plate under Axial Thrusts, J. Roy. Aero. Soc., 42 (1933).
9. A. Krom: Einfluss der Niertverteilung auf die Druckfestigkeit versteifter Schalen aus Duralumin, Lufo., 14 (1937).
10. 藤田博: 固定周辺に剪断力を受ける正方形平板の挫屈に就いて, 京大友近研究室研究速報第15号。
11. B. Budiansky and R. W. Connor: Buckling Stress of Clamped Rectangular Flat Plates in Shear, N. A. C. A. T. N. 1559, (1948).