或る種の性質をもつ metric space に就いて

山 田 深 雪

§ 1. この小論では，metric space に関する二つの問題について述べる。第一は complete metric space の任意の closed subset が compact となるために空間のもつべき性質 P を求め，此の性質 P をもつ n dimensional metric space が Euclidean $2n+1$ dimensional space に位相的に imbedding されうるかどうかと云う問題であり，第二は Whyburn, G. T. に依りあたえられた connected set に関する junction property と性質 P との間の関係についてである。

§ 2.

〔補助定理 1〕 距離空間 R の任意の点列 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$, が fundamental sequence を subsequence として含む為に必要なる条件は，

性質 (A)； 任意の $\varepsilon>0$ に対して $d(x_i, x_j)\geqq\varepsilon$, $i\neq j$ なる如き infinite sequence $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ が存在しない。

を空間 R がもつ事である。

証明。必要性は明らかである。故に充分性のみ証明すればよい。

与えらた点列を $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ とする。

仮定より，互いの距離が 1 より大なる点は高々有限個なる故，適当に x_K 及び subsequence $x_{i1}, x_{i2}, \cdots\cdots, x_{in}, \cdots\cdots$ を選べば，$d(x_K, x_{in})\leqq 1$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ ならしめうる。此の際 $K\neq in$ と仮定して差支えない。x_K を改めて y_1 とし，$x_{i1}, x_{i2}, \cdots\cdots, x_{in}, \cdots\cdots$ を改めて $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ とすれば，上と同様にして，適当に x_j 及び subsequence $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots\cdots, x_{\nu_n}, \cdots\cdots$ を選べば，$d(x_j, x_{\nu_n})\leqq\dfrac{1}{2}$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ ならしめうる。j は各 ν_n と異なると仮定して差支へない。x_j を y_2 とし，$x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots\cdots, x_{\nu_n}, \cdots\cdots$ を改めて $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ として同様の事を順次$\dfrac{1}{2^n}$に対してくりかえせば，これによつて得られる sequence $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n, \cdots\cdots$ は元の sequence $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ の subsequence で且つ fundamental sequence をなす。

次に性質 (B) を導入する。

性質 (B)； 空間 R に対して実数 $K>1$ が定まり，任意の点列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ をとる時，$\inf\limits_{i\neq j} d(x_i, x_j)=\varepsilon$ なれば $d(x_k, x_{\nu_n})\geqq K\varepsilon$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ なる如き sequence の一点 x_k, 及び subsequence $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots\cdots, x_{\nu_n}, \cdots\cdots$ が存在する。

〔補助定理 2〕 距離空間 R は性質 (B) をもつているものとす。R に於ける集合 M が性質 (A) をもつために必要にして且つ充分なる条件は M が有界である事である。

証明。 必要性。 M が性質 (A) を満し，而も有界でないとする。しかる時は，任意の $K>0$ に対し，$d(x, y)>K$ なる x, y が存在する故 $d(x_1, x_2)=S_1>1$, なる x_1, x_2 及び $d(y_1, y_2)\geqq 3S_1+2$ なる y_1, y_2 が存在する。

$$d(y_1, y_2) \leqq d(y_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2)$$

$$(3S_1 + 2) - S_1 \leqq d(y_1, x_1) + d(x_2, y_2)$$

故に $d(y_1, x_1)$ 亦わ $d(x_2, y_2)$ は $S_1 + 1$ より小ではない。

一般性を失う事なく $d(x_1, y_1) \geqq S_1 + 1$ と仮定してよい。

$$d(x_1, y_1) \leqq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_1)$$

故に $$1 \leqq d(x_2, y_1)$$

故に $y_1 = x_3$ とおけば，x_1, x_2, x_3 は互に巨離が1より小ではない。

一般に，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ が

$$d(x_i, x_j) \geqq 1,\ i \neq j$$

をみたすとして，次の如く x_n を定める。即ち，$d(x_i, x_{i+1}) = S_i$ とすれば$d(y_1, y_2) \geqq 3\sum_{i=1}^{n-2} S_i + 2$ なる y_1, y_2 が存在する。

$$d(y_1, y_2) \leqq d(y_1, x_1) + d(x_{n-1}, y_2) + \sum_{i=1}^{n-2} d(x_i, x_{i+1})$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{n-2} S_i + 1\right) \leqq d(y_1, x_1) + d(x_{n-1}, y_2)$$

故に $d(y_1, x_1)$ 亦わ $d(x_{n-1}, y_2)$ は $\sum_{i=1}^{n-2} S_i + 1$ より小ではない。

一般性を失う事なく $d(y_1, x_1) \geqq \sum_{i=1}^{n-2} S_i + 1$ と仮定してよい。今 $y_1 = x_n$ とおけば，任意の $x_i \neq x_n$ に対して，

$$d(x_1, x_n) \leqq d(x_i, x_n) + d(x_i, x_1) \leqq d(x_i, x_n) + \sum_{i=1}^{n-2} d(x_i, x_{i+1})$$

故に $$1 \leqq d(x_i, x_n)$$

即ち，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ は $d(x_i, x_j) \geqq 1,\ i \neq j$ をみたす。

無限回これをくりかえす事により，$d(x_i, x_j) \geqq 1,\ i \neq j$ なる infinite sequence $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ を得るが，これは仮定に反する故 M は有界でなければならぬ。

充分性。性質 (B) をもつ metric Space に於て，有界集合 M が性質 (A) をもたぬとする。而らば或る $\varepsilon > 0$ に対して，$d(x_i, x_j) \geqq \varepsilon,\ i \neq j$ なる infinite sequence$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ が存在する。

仮定により R は性質 (B) をもつ故

R に対して $K > 1$ が定まり，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ の点 x_i 及び subsequence $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots\cdots, x_{\nu_n}, \cdots\cdots$ があつて，而も $d(x_i, x_{\nu_n}) \geqq K\varepsilon,\ n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ となる。$x_i = x_1^{(1)}, x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots\cdots, x_{\nu_n}, \cdots = x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1n}, \cdots$ とおき $x_{11}, x_{12}, \cdots\cdots, x_{1n}, \cdots\cdots$ に対し同様の事を行えば x_{1i} 及び subsequence $x_{1\nu_1}, x_{1\nu_2}, \cdots\cdots, x_{1\nu_n}, \cdots\cdots$ が有り，$d(x_{1\nu}, x_{1\nu_n}) \geqq K\varepsilon,\ n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$ をみたす。依つて $x_{1i} = x_2^{(1)}, x_{1\nu_1}, x_{1\nu_2}, \cdots\cdots, x_{1\nu_n}, \cdots\cdots = x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots\cdots x_{2n} \cdots\cdots$ とおく。同様の事を無限回くりかえす事により

$d(x_i^{(1)}, x_j^{(1)}) \geqq K\varepsilon,\ i \neq j$ なる infinite sequence $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_n^{(1)}, \cdots\cdots$ を得る。

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_n^{(1)}, \cdots\cdots$ を最初に於ける $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ とみなし，且つ亦 $K\varepsilon$ を最初の ε とみなして同様の過程をくりかえせば，$d(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}) \geqq K^2\varepsilon,\ i \neq j$ なる $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_n^{(1)}, \cdots\cdots$ の subsequence $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots\cdots, x_n^{(2)}, \cdots\cdots$ を得る。同様に n 回の後にわ，

$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ の subsequence で $d(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}) \geqq K^n\varepsilon,\ i \neq j$ なる infinite sequence $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\cdots x_n^{(n)}, \cdots\cdots$ を得る。

一方 M は有界なる故

$$\sup_{x,y\in M} d(x, y) = N$$

なる N が存在する。而るに $K>1$ なる故 $K^m > \frac{N}{\varepsilon}$ なる m が存在し，此の m に対して，$d(x_i^{(m)}, x_j^{(m)}) \geqq K^m \cdot \varepsilon > N$, $i \neq j$ なる $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots\cdots, x_n^{(m)}, \cdots\cdots$ が存在する故不合理である。依つて M は性質 (A) をもたねばならぬ。

〔定理1〕 完備な巨離空間 R に於ける有界閉集合が，すべてコムパクトなるための必要且つ充分なる条件は，空間 R が性質 (B) をもつ事である。

〔証明〕 充分性は〔補助定理2〕及び〔補助定理1〕より明らか。必要性は，若し R が (B) をもたねば，如何なる $K>1$ をとつても，或る $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ があつて，

$$\inf_{i\neq j} d(x_i, x_j) = \varepsilon$$

とすれば，任意の x_i に対して $d(x_i, x_{i_n}) < K\varepsilon$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ なる $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ の，x_i 及び K により定まる subsequence $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_n}, \cdots\cdots$ がある。

$$d(x_{i_i}, x_{i_j}) \leqq d(x_i, x_{i_i}) + d(x_i, x_{i_j}) < 2K\varepsilon$$

即ち $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots x_{i_n}, \cdots\cdots$ は有界である。明らかに $\{x_{i_n}\}$ は closed であるが $d(x_{i_i}, x_{i_j}) \geqq \varepsilon$ なる故 compact ではない。依つて R は (B) をもたねばならぬ。

〔系1〕 完備な性質 (B) をもつ巨離空間 R に於ける有界集合は conditionally compact である。

〔定理2〕 性質 (B) をもつ完備巨離空間 R は separable である。故に R は Hilbert fundamental parallelotope Q_ω に topologically に含まれる。[1]

証明。R を定理に於ける空間とする。$R \ni y$ とし

$$M_i = \{x \mid i \leqq d(x, y) \leqq i+1\}$$

とすれば $R = M_0 + M_1 \cdots\cdots + M_n + \cdots\cdots$

M_i は有界閉集合なる故〔定理1〕により Compact である。

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots\cdots > \varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n > \cdots\cdots, \ \varepsilon_\nu \to 0 \ (\nu \to \infty)$$

をとり，M_i の各点 x に対し R に於ける近傍 $U\varepsilon_\nu(x)$ を作れば有限個の x_{ij}^ν [但し $j = 1, 2, \cdots\cdots, n(i, \nu)$] に依り

$$M_i = \sum_{j=1}^{n(i,\nu)} U\varepsilon_\nu(x_{ij}^\nu) \cdot M_i$$

となる。故に $R \subset \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n(i,\nu)} U\varepsilon_\nu(x_{ij}^\nu)$

すべての ν に関して $\{x_{ij}^\nu\}$ は可附番なる故

$$P = \sum_\nu \{x_{ij}^\nu\} = \sum_\nu \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n(i,\nu)} x_{ij}^\nu$$

は可附番集合で，且つ P は R に於て dense である。何故ならば，$R \ni z$ とすれば，任意の近傍 $U\varepsilon(z)$ をとる時，$\varepsilon_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon$ なる ε_ν が存在し，或る x_{ij}^ν に対して $U\varepsilon_\nu(x_{ij}^\nu) \ni z$ となる。依つて $x_{ij}^\nu \in U_\varepsilon(z)$

即ち P は R で dense である。

〔補助定理3〕 巨離空間 R が性質 (B) をもてば complete enclosure $\tilde{R}$ も性質 (B) をもつ。

---

(1) Tychnoff; Über die Metrisatisationsatz von P. Urysohn, Mathematischen Annalen Vol. 95 (1926).

証明。性質 (B) を $\tilde{R}$ がもつ事を云うためには〔定理1〕より，すべての有界閉集合が Compact なる事を示せばよい。$\tilde{M}\subset\tilde{R}$ を任意の有界閉集合とす。$\tilde{M}\supset\{x_n\}$ infinite sequence をとれば，x_n は R に於ける fundamental sequence $\{x_n^i\}$ であり，且つ set $\{x_n^i\}$ の diameter $\delta\{x_n^i\}<\dfrac{1}{n}$ と仮定して差支えない。

而る時は set $\{x_1^1, x_2^2, x_3^3,\cdots\cdots, x_n^n,\cdots\cdots\}$ は有界である。

何故なら

$$d(x_i^i, x_j^j)\leqq d(x_i^i, x_i)+d(x_i, x_j)+d(x_j^j, x_j)$$
$$\leqq\frac{1}{i}+\delta(\tilde{M})+\frac{1}{j}\leqq\delta(\tilde{M})+2$$

だから。

よつて〔補助定理2〕と $x_i^i\epsilon R$ 且つ R が性質 (B) をもつ事より infinite sequence $\{x_i^i\}$ は fundamental subsequence を含む。それを

$$x^*=\{x_{\nu_1}^{\nu_1}, x_{\nu_2}^{\nu_2},\cdots\cdots x_{\nu_n}^{\nu_n},\cdots\cdots\}\text{ とすれば } x^*\epsilon\tilde{R}$$

さて $x_{\nu_1}, x_{\nu_2},\cdots\cdots, x_{\nu_n},\cdots\cdots\epsilon\tilde{M}$ をとれば

$$d(x_{\nu_n}, x^*)=\lim_{m\to\infty} d(x_{\nu_m}^m, x_{\nu m}^{\nu m})\leqq\lim_{m\to\infty} d(x_{\nu_m}^m, x_{\nu_n}^{\nu_n})+\lim_{m\to\infty} d(x_{\nu_n}^{\nu_n}, x_{\nu_m}^{\nu_m})$$
$$\leqq\frac{1}{\nu_n}+\lim_{m\to\infty} d(x_{\nu_n}^{\nu_n}, x_{\nu_m}^{\nu_m})$$

故に，$n\to\infty$ の時 $d(x_{\nu_n}, x^*)\to 0$

即ち $\tilde{M}$ compact である。故に $\tilde{R}$ は性質 (B) をもつ。

〔定理3〕 性質 (B) をもつ n 次元巨離空間 R は高々 $2n+1$ 次元 Euclid 空間 E^{2n+1} の中に位相的に含まれる。

証明。R の complete enclosure を $\tilde{R}$ とすれば，$\tilde{R}$ は性質 (B) をもつ完備巨離空間なる故〔定理2〕に依り separable である。よつて R も separable であり且つ亦 n 次元なる故[(1)]，R は高々 E^{2n+1} の中に位相的に含まれる。

§ 3. この節に於ては Whyburn, G. T. により[(2)]与えられた connected, locally connected set の junction property に関する一定理の拡張と，その応用として上に挙げた性質 (B) をもつ complete metric Space が E^1 に於ける totally disconnected set の continuous image である事を示す。

〔補助定理4〕 R を separable metric space に於ける locally connected, nondegenerated connected set とし，P を R に於て dense な subset とする。

もし $M=\sum_{i=1}^{n} K_i$（但し，n は有限亦わ無限何れでもよく，K_i compact, $K_i\neq K_j$ for $i\neq j$）

が R の subset ならば，次の条件を満す P の部分集合 E が存在する。

(1) E は M に於て dense.

(2) closed interval $[2i, 2i+1]$（但し i は整数）を I_i とすれば，E は，$\sum_{i=0}^{n} I_i$ に含まれるすべての dyadic rational number D の上で定義され，且つ各 $I_i\cdot D$ の上

---

(1) Lefschetz; Topices in topology, Princeton Univ. Pr. (1942).

(2) Whyburn, G. T.; A junction property of locally connected sets, American Journal of Mathematics, Vol. 53 (1931).

で uniformly continuous な function f の image である。

（3） $E\ni x,\ f^{-1}(x)\ni y,\ y'$ ならば $y,\ y'$ を共に含む様な interval I_i は存在しない。

証明。$\varepsilon_i=\dfrac{1}{2^i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ とする。

任意の i に対して K_j は R に於ける $\frac{\varepsilon_i}{4}$-region 有限個の和の中に含まれる。かかる region の中から P の点を一つずつ選び，其等の作る集合を P_{ij} とすれば P_{ij} は有限集合である。此の時任意の i に対し，K_j の各点は P_{ij} の或る点と共に $\frac{\varepsilon_i}{4}$-region の中に含まれ，且つ P_{ij} の各点は K_j の或る点と共に $\frac{\varepsilon_i}{4}$-region に含まれ，而も $i\neq K$ なる時，すべての j に対して $P_{ij}\cdot P_{Kj}=0$ なる如く P_{ij} は選び得る。$a,\ b\epsilon P$ とすれば a から b へ到る $\frac{\varepsilon_1}{2}$-chain C^{1j} で P_{1j} を含み two successive points が $\frac{\varepsilon_1}{2}$-region に含まれる様な P に於ける chain が存在する。此の際 chain の点の数は $2^{v_1(j)}+1$ 個と仮定してよい。この chain を

$$a=x_0^{1j},\ x_1^{1j},\cdots\cdots,\ x_{2^{v_1(j)}}^{1j}=b$$

とす。

すべての整数 $i,\ 0\leqq i\leqq 2^{v_1(j)}$ に対し，$\frac{\varepsilon_1}{2}$-region の中に x_i^{1j} と共に横わる P_{2j} の点の集合を F_i^{1j} とする。C^{1j} は P_{1j} を含くんでいる故，P_{2j} の点は F_i^{1j} の何れかに含まれる。すべての i に対して，$x_i^{1j}+F_i^{1j}+x_{i+1}^{1j}$ を含む ε_1-region R_i^{1j} がある。何故なら x_{i+1}^{1j} は x_i^{1j} と共に $\frac{\varepsilon_1}{2}$-region の中に含まれるからである。R_i^{1j} は而る時は locally connected, connected space となる故 $P\cdot R_i^{1j}$ は $F_i^{1j}-\sum_{K=0}^{i-1}F_K^{1j}$ を含む様な x_i^{1j} から x_{i+1}^{1j} への $\frac{\varepsilon_2}{2}$-chain C_i^{1j} を含み，而も C_i^{1j} の two succesive points が共に $\frac{\varepsilon_2}{2}$-region に含まれる様に出来る。(1) 更にここで，すべての i に対し C_i^{1j} は同数の $2^{v_2(j)}+1$ 個の点をもつているものと仮定して差支えない。C_i^{1j} を

$$x_i^{1j}=x_{i\cdot 2^{v_2(j)}}^{2j},\ x_{i\cdot 2^{v_2(j)}+1}^{2j},\ \cdots\cdots,\ x_{(i+1)\cdot 2^{v_2(j)}}^{2j}=x_{i+1}^{1j}$$

とする。この様にすれば $\{C_i^{1j}\}$ は全体として two succesive points が $\frac{\varepsilon_2}{2}$-region に含まれる様な P に於ける a から b への $\frac{\varepsilon_2}{2}$-chain となる。

我々はかかる方法をくりかえして行く。即ち一般に任意の K に対し，そして亦すべての $i,\ 0\leqq i\leqq 2^{v_1(j)+\cdots\cdots+v_{K-1}(j)}$ に対して，$\frac{\varepsilon_{K-1}}{2}$-region の中に $x_i^{K-1(j)}$ と共にある P_{Kj} の点全体の集合を $F_i^{K-1(j)}$ とする。

然る時は $x_i^{K-1(j)}+F_i^{K-1(j)}+x_{i+1}^{K-1(j)}$ を含む ε_{K-1}-region $R_i^{K-1(j)}$ がある。$P\cdot R_i^{K-1(j)}$ は，$F_i^{K-1(j)}-\sum_{s=0}^{i-1}F_s^{K-1(j)}$ を含み $x_i^{K-1(j)}$ から $x_{i+1}^{K-1(j)}$ への two succesive points が共に $\frac{\varepsilon_K}{2}$-region に含まれる様な $\frac{\varepsilon_K}{2}$-chain $C_i^{K-1(j)}$ を含む。更にこれ等の chain の点の個数は j を fix して

（1） Whyburn; A junction property of locally connected set, American Journal of Mathematics, Vol. 53 (1931).

考えれば，すべての i に対して同数の $2^{v_K(j)}+1$ 個の点からなつているものと考えて差支えない。

$C_i^{K-1(j)}$ 全体の集合 $\{C_i^{K-1(j)}\}$ は，P_{Kj} を含み。two succesive points が $\frac{\varepsilon_K}{2}$-region に含まれる様な$2^{v_1(j)+\cdots+v_K(j)}+1$個の点からなる a から b へ到る chain $C^{K(j)}$

$$a = x_0^{K(j)},\ x_1^{K(j)}.\ \cdots\cdots\cdots x_{2^{v_1(j)+\cdots\cdots+v_K(j)}}^{K(j)} = b$$

をなす。更にかかる記号に於ては

$$x_{i\cdot 2^{v_K(j)}}^{K(j)} = x_i^{(K-1)(j)}$$

となつている。

さて　　$D = \{x \mid x \epsilon \sum_{i=0}^{\infty} I_i,\ x \text{ dyadic rational number}\}$

とおき，$D \ni t$ とすれば

$$t = 2j + \frac{i}{2^{v_1(j)+\cdots\cdots+v_K(j)}}\ ;\quad 0 \leqq i \leqq 2^{v_1(j)+\cdots+v_K(j)}$$

とかかれる。この時

$$f(t) = x_i^{K(j)}$$

として，f を D の上で定義すると，f は各 $D\cdot I_j$ の上では single value である。

今 $f(D) = E$ とおけば $E \supset \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}$, 即ち E は M で dense である。更に f は条件(3)を満している事は明かなる故 f が各 $I_i\cdot D$ の上で uniformly continuous である事さえ証明すればよい。

さて任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sum_{i=K}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$ なる如き K が存在する。

$\delta = \frac{1}{2^{v(j)}}$; $v(j) = v_1(j) + \cdots\cdots + v_K(j)$ とし $t_1, t_2 \epsilon I_j, |t_1 - t_2| < \delta$ なる2点 (dyadic rational number) t_1, t_2 をとれば t_1, t_2 は

$$2j + (i-1)/2^{v(j)},\quad 2j + i/2^{v(j)},\quad 2j + (i+1)/2^{v(j)}$$

の間の値である。

さて t_1 が $2j + i/2^{v(j)}$ 及び $2j + (i+1)/2^{v(j)}$ の間にあるものとすれば（この様に仮定して一般性失わぬ事は後程わかる）

$$t_1 = 2j + m/2^{v(j)+u(j)}\ ;\ u(j) = v_{K+1}(j) + \cdots\cdots + v_{K+w}(j)$$

とかかれる。故に　$f(t_1) = x_m^{(K+w)(j)}$

我々は最初 $x_i^{K(j)}, x_{i+1}^{K(j)}$ を結ぶ $C_i^{K(j)}$ chain を次の如く定義した。即ち $C_i^{K(j)}$ は $x_i^{K(j)}$ の ε_K-近傍内に含まれる様に作つた。次に $C_i^{K(j)}$ の任意の two successive points を結ぶ $C_{i\cdot 2^{v_{K+1}(j)}+S}^{(K+1)(j)}$ を，$C_{i\cdot 2^{v_{K+1}(j)}+S}^{(K+1)(j)}$ の任意の2点が全く ε_{K+1}-region $R_{i\cdot 2^{v_K(j)}+S}^{(K+1)(j)}$ の中に含まれる様に作つた。即ち $x_i^{K(j)}$ の $(\varepsilon_K + \varepsilon_{K+1})$-近傍内に全く $\{C_{i\cdot 2^{v_K(j)}+S}^{(K+1)(j)}\}_S$ 全部が含まれる様に作つた。同じ事を $w-1$ 回重ねて行えば，遂に $\{C_{i\cdot 2^{v_{K+1}(j)+\cdots+v_{K+w-1}(j)}+S}^{(K+w-1)(j)}\}_S$ の中に $x_m^{(K+w)(j)}$ が現われる。

而して　$\{C_{i\cdot 2^{v_{K+1}(j)+\cdots+v_{K+w-1}(j)}+S}^{(K+w-1)(j)}\}_S \subset U_{(\varepsilon_K+\cdots+\varepsilon_{K+w-1})}(x_i^{K(j)})$

よつて $x_m^{(K+w)(j)}$ は $x_i^{K(j)}$ の $\frac{\varepsilon}{2}$ 近傍内に含まれる。

故に　　　$d(f(t_1),\ x_i^{K(j)}) = d(x_m^{(K+w)(j)}, x_i^{K(j)}) < \frac{\varepsilon}{2}$

同様に　　$d(f(t_2),\ x_i^{K(j)}) < \frac{\varepsilon}{2}$

依つて　$d(f(t_1),\ f(t_2)) < \varepsilon$　。即ち f は $D{\cdot}I_j$ の dyadic rational number の上で一様連続である。

〔定理4〕 R を性質（B）をもつ完備な巨離空間とすれば，R は Euclid 一次元空間 E^1 に含まれる totally disconnected set C の連続函数による image となる。

特に R が有界なる場合には C として Compact totally disconnected set をとりうる。[1]

証明。$p \epsilon R$ とする。

$$K_i = \{x \mid i \leqq d(x,\ p) \leqq i+1\}$$

とすれば K_i は〔定理1〕より Compact で

$$R = \sum_{i=0}^{n} K_i,\ (n \text{ は有限亦は無限},\ K_i \neq 0)$$

となる。

R は separable metric space なる故，R から Hilbert space H に含まれる Hilbert parallelotope Q_w の中への homeomorphic function φ がある。故に $\varphi(R) = R'$ とすれば

$$R' \subset Q_w \subset H$$

となる。　$\varphi(K_i) = K_i'$，$P = H - R'$ とおけば P は $\bar{P} \supset R'$ をみたす。何故ならば

若し $d > 0$ があつて，或る $x \epsilon R'$ に対し $U_{2d}(x) \subset R'$ となるならば φ は位相写像なる故 $\varphi^{-1}(x)$ の近傍 $V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))$ があつて $\varphi(\overline{V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))}) \subset U_{2d}(x)$ となる。

$\varphi(V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x)))$ は R' で開集合なる故，$U_{2d}(x)$ 従つて H で開集合である。故に $\xi > 0$ が定まり

$$V_{2\xi}(x) \subset \varphi(V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))) \subset U_{2d}(x) \subset R'$$

と出来る。　　$V_{2\xi}(x) \subset \varphi(\overline{V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))})$

$\varphi(\overline{V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))})$ は $\overline{V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))}$ が Compact なる故 Compact である。

而るに　　　$x = (x_1,\ x_2, \cdots\cdots,\ x_n, \cdots\cdots)$ とする時

$$y^{(n)} = (x_1,\ x_2, \cdots\cdots,\ x_n + \xi, \cdots\cdots)$$

とすれば $y^{(n)} \epsilon \varphi(\overline{V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))})$。一方は $\{y^{(n)}\}$ 互いの距離がξより大なる故 infinite Sequence $\{y^{(n)}\}$は集積点をもたぬ。これは $\varphi(\overline{V_\varepsilon(\varphi^{-1}(x))})$ Compact に反す。

よつて P は R' で dense である。

さて H は locally connected, nondegenerated connected set であるから，[2] $H,\ P,\ R'$, K_i' を各々〔補助定理4〕に於ける $R,\ P,\ M,\ K_i$ と考えれば，次の如き E が存在す。

（1） E は P に含まれ，R' で dense である。

（2） E は dyadic rational number D の上で定義され且つ各 $I_j{\cdot}D$ で uniformly continuous な function f の image である。即ち　$f(D) = E$

（1） P. Alexandroff and P. Uryshon; Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen der Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, vol. 14 (1929) 参照

（2） Whyburn, G. T.; Analytic Topology, (1942); reprinted (1948).

f を D から $\sum_{j=0}^{n} I_j = I$ の上に拡張すれば，[(2)]

$$f(I) = L \supset E + R'$$

$f^{-1}(E) = D$ なる故 $C = f^{-1}(R')$ は interval を含まない。

よつて $$g(C) = \varphi^{-1}f(C) = \varphi^{-1}(R') = R$$

故に g は totally disconnected set C の上の連続函数で，image は R である。

特に R が有界なる時は，R compact なる故，$K_0 = R$，且つ $i \neq 0$ に対しては $K_i = \phi$ として〔補助定理 4〕を使用する事により上と同様の議論を進めれば容易に C を Compact totally disconnected としてよい事がわかる。