ある Order Statistics の極限分布に就いて （I）

田　村　亮　二

Order statistics に関する分布に就いては，Wilkes[1] Mosteller[2] 等によつて数々の結果が出されており，特に任意個数の λ_i-quantile の同時的確率分布の極限形式は Mosteller[2] の定理として，Order statistics を利用しての推定論並に検定論の基礎的な役割を果している。

本論文に於いては，§ 1. で Mosteller の定理の別証明を与え，§ 2. で mean と median の同時分布の極限形式を誘導する。

§ 1. Mosteller の定理に就いて

確率変数 X の連続的分布函数を $F(x)$，密度函数を $f(x)$ とする。且 λ_i-quantile を θ_i で表わす。

即ち

$$\int_{-\infty}^{\theta_i} dF(x) = \lambda_i$$

〔定　理〕　(Mosteller)

大きさ n の Order statistics を $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n$，この Sample の k 個の λ_i-quantile $i=1, 2, \cdots\cdots, k$ を $x(n_1), x(y_2), \cdots\cdots, x(n_k)$ で表わすと，之等の同時分布は漸近的に正規分布になる。

Mosteller は本定理を初め一様分布に対して行い，而後巧妙な変換により一般の分布の場合に拡強している。ここでは初めから分布型を仮定しないで証明する。

（証明）$x(n_1), x(n_2), \cdots\cdots, x(n_k)$ の同時的確率密度を $g(x(n_1), x(n_2), \cdots\cdots, x(n_k))$ とすれば

$$(1)\quad g(x(n_1), x(n_2), \cdots\cdots, x(n_k)) \prod_1^k dx(n_i) = \frac{n!}{(n_1-1)!\,(n_2-n_1-1)!\cdots\cdots(n-n_k)!}$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{x(n_1)} dF(x)\right)^{n_1-1}\left(\int_{x(n_1)}^{x(n_2)} dF(x)\right)^{n_2-n_1-1}\cdots\cdots\left(\int_{x(n_k)}^{\infty} dF(x)\right)^{n-n_k}$$
$$\times\ dF(x(n_1))\ dF(x(n_2))\cdots\cdots dF(x(n_k))$$

但　$n_i = [n\lambda_i] + 1$

便宜上　$x(n_i) = x_i,\ n_i - n_{i-1} - 1 = m_i\ (i = 1, 2, \cdots\cdots, k+1)$ とする。

但　$n_0 = 0\ n_{k+1} = n+1$

$$(2)\quad g(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k)\prod dx_i = \frac{n!}{\prod\limits^{k+1} m_i}\prod_{i=1}^{k+1}(F(x_i)-F(x_{i-1}))^{m_i}\prod_{i=1}^{k} dF(x_i)$$

但　$F(x_0) = 0,\ F(x_{k+1}) = 1$ とす。

$$y_i = \sqrt{\frac{n}{\lambda_i\mu_i}}f(\theta_i)(x_i-\theta_i)\quad (i=1, 2, \cdots\cdots, k)\quad \mu_i = 1-\lambda_i$$

なる変換により，（2）は

（1）　Wilks: Mathematical Statistics. 1943.

（2）　Mosteller: On some useful "inefficient" statistics. Annals of Math. Statist Vol. 17. 1946.

(3) $$g(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots\ y_k)\ |J|\prod_{i=1}^{k} dy_i = \frac{n!}{\prod m_i}\prod\sqrt{\frac{\lambda_i\mu_i}{n}}\frac{f(x_i)}{f(\theta_i)}$$

$$\times\ \prod\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big)^{m_i}\prod dy_i$$

但　J は Jacobian　且式中の x には y を代入するものとす。

$$= \frac{n!}{\prod_1^{k+1} m_i}\prod_1^{k+1}\left\{(\lambda_i-\lambda_{i-1})^{m_i}\sqrt{\frac{\lambda_i\mu_i}{n}}\frac{f(x_i)}{f(\theta_i)}\right\}\left(\frac{F(x_i)-F(x_{i=1})}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)^{m_i}\prod_1^k dy_i$$

$$\lambda_0=0\quad \lambda_{k+1}=1$$

上の式の極限形式を求めれば,

$$\frac{n!}{(\prod m_i)n^{\frac{k}{2}}}\prod\ (\lambda_i-\lambda_{i-1})^{m_i}\ \longrightarrow\ \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\prod(\lambda_i-\lambda_{1-1})}}$$

$$\frac{F(x_1)}{\lambda_1}=1+\sqrt{\frac{\mu_1}{n\lambda_1}}\,y_1+\frac{y_1^2}{2n}\frac{\mu_1}{f(\theta_1)^2}f'(\theta_1)+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}=1+\frac{1}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\left(\sqrt{\frac{\lambda_i\mu_i}{n}}\ y_i-\sqrt{\frac{\lambda_{i-1}\mu_{i-1}}{n}}\right)y_{i-1}$$

$$+\frac{1}{2n(\lambda_i-\lambda_{i-1})}\left(\lambda_i\mu_i\frac{f'(\theta_i)}{f(\theta_i)^2}\,y_i^2-\lambda_{i-1}\mu_{i-1}\frac{f'(\theta_{i-1})}{f(\theta_{i-1})^2}\,y_{i-1}^2\right)+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$i=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ k$$

$$\frac{1-F(x_k)}{1-\lambda_k}=1-\sqrt{\frac{\lambda_k}{n\mu_k}}\,y_k-\frac{y_k^2}{2n}\frac{f'(\theta_k)}{f(\theta_k)^2}\lambda_k+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

此等の式を m_i 乗して対数をとり y_i 等の係数を求めれば,

y_i の係数　$$\frac{m_i}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\sqrt{\frac{\lambda_i\mu_i}{n}}-\frac{m_{i+1}}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\sqrt{\frac{\lambda_i\mu_i}{n}}\longrightarrow 0$$

$\frac{y_i^2}{2}$ の係数　$$\frac{m_i\lambda_i\mu_i}{n(\lambda_i-\lambda_{i-1})}\frac{f'(\theta_i)}{f(\theta_i)^2}-\frac{m_{i+1}\lambda_i\mu_i}{n(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}\frac{f'(\theta_i)}{f(\theta_i)^2}-\frac{m_i}{(\lambda_i-\lambda_{i-1})^2}\frac{\lambda_i\mu_i}{n}$$

$$-\frac{m_{i+1}\lambda_i\mu_i}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)^2}\ \longrightarrow\ -\frac{\lambda_i\mu_i(\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1})}{(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}$$

y_iy_{i-1} の係数　$$\frac{m_i}{(\lambda_i-\lambda_{i-1})^2}\sqrt{\frac{\lambda_i\mu_i}{n}}\sqrt{\frac{\lambda_{i-1}\mu_{i-1}}{n}}\longrightarrow\frac{1}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\sqrt{\lambda_i\mu_i}\sqrt{\lambda_{i-1}\mu_{i-1}}$$

依つて求める極限分布は

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\frac{\prod_1^k\sqrt{\lambda_i\mu_i}}{\sqrt{\prod_1^{k+1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_1^k\frac{\lambda_i\mu_i(\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1})}{(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}\,y_i^2-2\sum_{i=2}^k\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{\lambda_i\mu_i}\sqrt{\lambda_{i-1}\mu_{i-1}}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}y_iy_{i-1}\right)\right\}.$$

y_i から x_i の変換で元にかえして,

$x(n_1)$, $x(n_2)$, ……, $x(n_k)$ の漸近的同時分布は,

$$\frac{n^{\frac{k}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\frac{\prod_1^k f(\theta_i)}{\prod_1^{k+1}\sqrt{\lambda_i-\lambda_{i-1}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_1^k\frac{(\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1})nf(\theta_i)^2}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}(x_i-\theta_i)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\sum_2^k\frac{nf(\theta_i)f(\theta_{i-1})}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x_i-\theta_i)(x_{i-1}-\theta_{i-1})\right)\right\}$$

即ち　mean ; θ_i　variance $\dfrac{\lambda_i(1-\lambda_i)}{nf(\theta_i)^2}$　$i=1, 2, \cdots\cdots, k$

covariance $\dfrac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{nf(\theta_i)f(\theta_j)}$, $1 \leqq i \leqq j \leqq k$

なる正規分布になることが証明された。

§ 2.　mean と median の同時分布の極限形式。

$E(X)=m,\quad V(X)=\sigma^2,$　median を θ で表わす。

大きさ $(2n+1)$ の Sample を $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{2n+1}$ とし Sample mean Sample median を夫々 $\bar{x}, \xi$ とする。然るとき ξ と他の $2n$ 個の x_i との同時分布は Order statistics の考えにより

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}dF(x_1)\cdots\cdots dF(\xi)\cdots\cdots dF(x_{2n+1})$$

〔定　理〕　$(\bar{x}-m)\sqrt{2n+1},\ (\xi-\theta)\sqrt{2n+1}$ の同時分布は漸近的に正規分布になる。

（証明）　$(\bar{x}-m)\sqrt{2n+1},\ (\xi-\theta)\sqrt{2n+1}$ の characteristic function を $\varphi(t_1, t_2)$ とすれば

$$\varphi(t_1, t_2)=E\left(\exp\left\{it_1(\bar{x}-m)\sqrt{2n+1}+it_2(\xi-\theta)\sqrt{2n+1}\right)\right.$$

$$=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{it_1(\xi-\theta)\sqrt{2n+1}+it_2\frac{\xi-m}{\sqrt{2n+1}}\right\}dF(\xi)$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\xi}\exp\left\{\frac{it_1}{\sqrt{2n+1}}(x-m)\right\}dF(x)\right)^n\left(\int_{\xi}^{\infty}\exp\left\{\frac{it_1}{\sqrt{2n+1}}(x-m)\right\}dF(x)\right)^n$$

変換　$\xi=\theta+\dfrac{y}{\sqrt{2n+1}}$ により

$$\varphi(t_1, t_2)=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2\sqrt{2n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{it_, y+it_2\left(\frac{\theta-m}{\sqrt{2n+1}}+\frac{y}{\sqrt{2n+1}}\right)\right\}$$

$$dF\left(\theta+\frac{y}{\sqrt{2n+1}}\right)\times\left\{\left(\int_{-\infty}^{\xi}\exp\left\{\frac{it_1}{\sqrt{2n+1}}(x-m)dF(x)\right)\right.\right.$$

$$\left(\int_{\xi}^{\infty}\exp\left\{\frac{it_1}{\sqrt{2n+1}}(x-m)dF(x)\right\}^n\right.$$

x に関する積分は　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\theta}+\int_{\theta}^{\theta+\frac{y}{\sqrt{2n+1}}}$ 及び $\displaystyle\int_{\theta}^{\infty}-\int_{\theta}^{\theta+\frac{y}{\sqrt{2n+1}}}$

の変形且，指数函数の展開等より

$$\frac{1}{2^{2n}}\left\{1-\frac{2t_1^2}{n+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\theta}(x-m)dF(x)\int_{\theta}^{\infty}(x-m)dF(x)\right)-\frac{\frac{t_1^2}{2}\sigma^2}{n+\frac{1}{2}}+\frac{2it_1yf(\theta)}{n+\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_{\theta}^{\infty}(x-m)dF(x)-\int_{-\infty}^{\theta}(x-m)dF(x)-\frac{2y^2f^2(\theta)}{n+\frac{1}{2}}+\frac{0(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left(1-\frac{\alpha}{n+\frac{1}{2}}+\frac{0(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n}\right)\ \text{とおく。}$$

被積分函数の一様収斂性より

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_1,\ t_2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} f(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha + it_2 y\right)\ \alpha y$$

$$= \exp\left\{-\frac{t_1^{\,2}}{2}\sigma^2 - \frac{t_2^{\,2}}{8f^2(\theta)} - \frac{p_1 - p_2}{2f(\theta)}\, t_1 t_2\right\}$$

但

$$p_1 = \int_{\theta}^{\infty} (x - m)\, dF(x)$$

$$p_2 = \int_{-\infty}^{\theta} (x - m)\, dF(x)$$

依つての Lévy 定理により　$(\bar{x} - m)\sqrt{2n+1}$, $(\xi - \theta)\sqrt{2n+1}$
の極限分布は

mean が 0，　variance $\dfrac{1}{4f^2(\theta)}$，　covariance が $\dfrac{p_1 - p_2}{f(\theta)}$

なる正規分布になる。換言すれば
$\bar{x}$ と ξ との同時的極限分布は　mean　が夫々
$m,\ \theta,$　variance が夫々　$\dfrac{\sigma^2}{2n+1}$，$\dfrac{1}{4(2n+1)f^2(\theta)}$　covariance が $\dfrac{p_1 - p_2}{(2n+1)f(\theta)}$

なる正規分布になる。

この問題を一般化して　mean　と　λ_ξ-quantile　との同時分布については次の機会にのべたい。