三つの仮説に対する Sequential Test

田　村　亮　二

§1 序　　論

確率変数Xが分散既知，平均未知なる正規分布に従っているとき平均に関する三つの仮説の検定の問題は1949年，A. Wald* によって，Sequential analysis の立場から論ぜられている。

今，確率変数が Poisson 分布に従っているとき，A. Wald の問題はどうなるか考察してみる。

Xの分布法則を

$$D_r(X=x)=\frac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!},\ \lambda:\ 未知\ \text{parameter}.$$

とする。

未知常数に関する仮説として，次の三つを考える。任意に与えられた常数 a<b に対して

H_1: $\lambda<a$ を主張する仮説

H_2: $a\leqq\lambda\geqq b$ を主張する仮説

H_3: $\lambda>b$ を主張する仮説

この三つの複合仮説 H_1, H_2, H_3 に対する検定を考える。このような問題は実際に屡々起ることで例えば大量生産に於いて品質 λ が a 以下なら市場に出さないで廃棄し，a と b の間ならば値下げを断行して市場に出し，b 以上ならそのまま市場に出すという如き。

このとき λ に関する parameter space を五つの zone に分つ，即 $\lambda_0<a<\lambda_1<\lambda_2<b<\lambda_3$ なる λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 をとり，

$\pi_1=\{\lambda;\ \lambda\leqq\lambda_0\}$. $\pi_2=\{\lambda;\ \lambda_0<\lambda<\lambda_1\}$; $\pi_3=\{\lambda;\ \lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2\}$

$\pi_4=\{\lambda;\ \lambda_2<\lambda<\lambda_3\}$; $\pi_5=\{\lambda;\ \lambda_3\leqq\lambda\}$

とす。

π_1 は H_1 を採択することを強く好む zone

π_2 は H_1, H_2 の採択はどちらを強く好むというわけではないが H_3 を棄却することを強く好む zone

π_3 は H_2 を採択することを強く好む zone

π_4 は H_2, H_3 の採択はどちらを強く好むというわけではないが H_1 を棄却することを強く好む zone

π_5 は H_3 を採択することを強く好む zone

H_1, H_2, H_3 に対する test は次の二段階に分つ。

1 $\lambda\leqq\lambda_0$, $\lambda_0<\lambda<\lambda_1$, $\lambda\geqq\lambda_1$ なる複合仮説に対する test. 之は $\lambda=\lambda_0$, $\lambda=\lambda_1$ なる単純仮説に対する Sequentia probability ratio test を行えばよい。之を R_1 とす。

---

*A. Wald: A Sequential decision procedure for Choosing one of three hypothesis concering the unknown mean of a normal distribution. Annals of Math. Stat. 20. No. 4 (1949).

2　$\lambda \leqq \lambda_2$, $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$, $\lambda_3 \leqq \lambda$ に対する test を R_2 とす。

この両者を綜合した H_1, H_2, H_3' に対する test を R としその rule を次の如くきめる。

即ち

	R_1		R_2		R
	$\lambda=\lambda_0$ を採択	且	$\lambda=\lambda_2$ を採択	$\longrightarrow$	H_1 を採択
	$\lambda=\lambda_1$ を採択	且	$\lambda=\lambda_2$ を採択	$\longrightarrow$	H_2 を採択
	$\lambda=\lambda_1$ を採択	且	$\lambda=\lambda_3$ を採択	$\longrightarrow$	H_3 を採択

上の外に R_1 で $\lambda=\lambda_0$ を採択し R_2 に $\lambda=\lambda_3$ を採択する場合が考えられるが之は妥当的な少しの條件の下で決して起らないことが証明される。この rule の下で各仮説に対する採択域，更に OC-function はどうなるか。

§2　採　択　域

$\lambda_0 < a < \lambda_1 < \lambda_2 < b < \lambda_3$　なる λ を

$$\lambda_0+\lambda_1=2a,\qquad \lambda_2+\lambda_3=2b,\qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_0}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2}=(d)$$

なる如くとる，

1　R_1 に於いて，

λ_i が眞なるときの確率比を p_{im} で表すと

$$p_{im}=\frac{\exp(-m\lambda_i)\lambda_i^{\sum_1^m x_j}}{\prod_1^m x_j\,!}\qquad 但\quad i=0,1$$

$\sum_1^m x_j = X_m$　とすれば

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}}=e-m(\lambda_2-\lambda_0)\ d^{x_m}$$

今第一種，第二種の error をおかす確率を α,β とすれば，之に対して $A\sim\dfrac{1-\beta}{\alpha}$，

$B\sim\dfrac{\beta}{1-\alpha}$　が定り，

$\lambda=\lambda_i$　$(i=0,1)$ に対する test は

(i)　$\dfrac{p_{1m}}{p_{0m}}\geqq A$　ならば，$\lambda=\lambda_1$ を採択して観測は m で終了

(ii)　$\dfrac{p_{1m}}{p_{0m}}\leqq B$　ならば，$\lambda=\lambda_0$ を採択して観測は m で終了

(iii)　$B<\dfrac{p_{1m}}{p_{0m}}<A$　ならば更に $m+1$ 回目の観測を続行。之等をかきなおすと，

(i)　$X_m \geqq \dfrac{\log A + m(\lambda_1-\lambda_0)}{\log \alpha} = r_m$　:　$\lambda=\lambda_0$ を棄却

(ii)　$X_m \leqq \dfrac{\log B + m(\lambda_1-\lambda_0)}{\log \alpha} = a_m$　:　$\lambda=\lambda_0$ を採択

(iii)　$a_m < X_m < r_m$ ならば　続行。

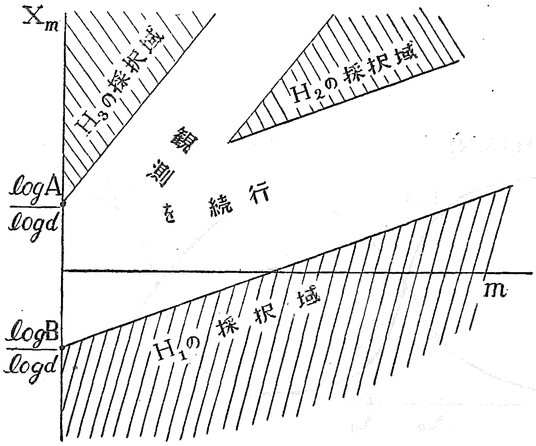
となる。

2　R_2 なる　sequential probability ratio test に於いても全く同様。

$(a, \beta, A, B,)$ の代りに $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{A}, \hat{B})$ を用う。

但し　$(\alpha,\beta)=(\hat{\alpha},\hat{\beta})$　は普通殆んど正しいように使用されるからこの仮定を用う。

而るとき，三つの仮説の採択域は次の如し。



§ 3 OC-function.

$L(H_i \mid \lambda, R)$ を λ が眞なるとき R なる Sequential test の下で H_i を採択する確率とする。

又 $\lambda = \lambda_i \quad i = 0, 1, 2, 3$ を主張する仮説を H_{λ_i} で表現する。而るとき

R で H_1 を採択するのは R_1 で $\lambda=\lambda_0$ 即 H_{λ_0} を採択するときに限るから

(i) $L(H_1 \mid \lambda, K) = L(H_{\lambda_0} \mid \lambda, R_1)$

同様に

(ii) $L(H_3 \mid \lambda, R) = L(H_{\lambda_3} \mid \lambda, R_2)$

而るに，A. Wald の基本定理[*]「Sequential probabilty ratio test がどれかの仮説を採択して有限回で観測を終了する確率は 1 である」により，

(iii) $L(H_2 \mid \lambda, R) = 1 - L(H_1 \mid \lambda, R) - L(H_3 \mid \lambda, R)$

以上三つを具体的に表現して OC-function を求めると，

$$L(H_1 1\lambda, R) = L(H_{\lambda_0} 1\lambda, R_1) - \frac{A^{h_1}-1}{A^{h_1}-B^{h_1}}$$

但 h_1 は $E(e^{zh}) = 1$ の 0 ならざる根

即ち $$\sum_{x=0}^{\infty} \{e^{-(\lambda_1-\lambda_0)h} d^{hx}\} \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = 1$$

$$\therefore \quad (\lambda_1 - \lambda_0)h + \lambda = d^h$$

h のいくつかの價に対する λ 及 $L(H_1 1\lambda, R)$ を求めると，

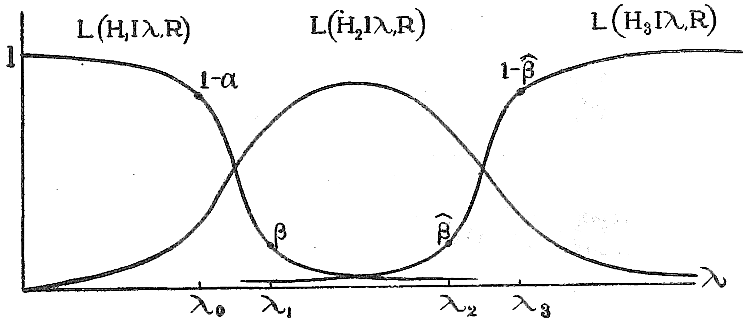
h	$-\infty$	-1	0	1	∞
λ	∞	λ_1	$\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\log a}$	λ_0	0
$L(H_1 1\lambda, R)$	0	b	$\frac{\log A}{\log A-\log B}$	$1-a$	1

$L(H_3 1\lambda, R)$ に対しては

h	$-\infty$	-1	0	1	∞

λ	0	λ_2	$\dfrac{\lambda_3-\lambda_2}{\log\alpha}$	λ_3	∞
$L(H_2 1\lambda,\ R)$	0	$\hat{\alpha}$	$\dfrac{-\log\hat{B}}{\log\hat{A}-\log\hat{B}}$	$1-\hat{\beta}$	1

(iii) より $L(H_3 1\lambda,\ R)$ も出てくる。之等を図示すれば次の如し。



以上は主として Poisson 分布に対して採択域と O.C function を考えたが次には A. S. N. function 更に仮説の数がふえたときはどうかという問題が残されている。
又確率変数の分布が二次分布或は分散未知の正規分布のときは同様な方法で解決できる。

(＊)　A. Wald: Sequential Analysis 1947