導波管による誘電測定の理論的考察

森　　　弘　　竹　本　將

1. 緒　　　言

19 世紀末葉から分子構造及び電氣材料の研究を対象として物質の ε 及び $\tan\delta$ を測定すること所謂誘電測定が盛に行われて來た。

電波の波長が短くなりマイクロ波領域になると輻射による損失が大きくなる爲に，從來の方法で誘電測定を行うことが不可能になる。この様な場合には光学的方法 (optical method) を用いるか，或は導波管法 (hollow pipe method, 導波管，空洞共振器等を用いる方法) に依らなければならない。導波管の一端を反射板で閉し，この部に誘電体を詰めた場合の理論の一般解は 1946 年 Roberts-Hippel に依て與えられた。翌 1947 年 Dakin-Works が損失の少い誘電体について上の理論に補正を加えている。更に 1948 年 Surber-Crouch が Roberts-Hippel の理論を発展，簡易化することに成功した。筆者等は此等の理論に二三の考察を加え紹介をなし，且つ特別の場合に就いての測定理論を導入した。此の理論の妥当性について現在実験中である。

2. 測　定　理　論

一様な導波管中の定在波は管軸に平行に進む入射波と反射波の和として表わすことが出來る。媒質 1 (空氣) に於ける電場及び磁場の管軸に垂直な成分を夫々 $E(x)_1$, $H(x)_1$ とする。x は誘電体表面から管軸に沿って，波源の方向へ測った距離を表わす。時間因子 $e^{j\omega t}$ を省略して考えると

$$E(x)_1 = A_{i1}\exp(\gamma_1 x) + A_{r1}\exp(-\gamma_1 x) = A_{i1}[\exp(\gamma_1 x) + \Gamma_0\exp(-\gamma_1 x)] \qquad (1)$$

これを Maxwell の方程式に入れて計算すると

$$H(x)_1 = \frac{A_{i1}}{Z_1}\exp(\gamma_1 x) - \frac{A_{r1}}{Z_1}\exp(-\gamma_1 x) = \frac{A_{i1}}{Z_1}[\exp(\gamma_1 x) - \Gamma_0\exp(-\gamma_0 x)] \qquad (2)$$

A_{i1} 及び A_{r1} は誘電体表面($x=0$)に於ける入射波及び反射波の振巾を表わす。$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\lambda_g}{\lambda}$ (λ_g = 管内波長，λ = 眞空中に於ける波長) で空氣の在る部分の導波管の Wave impeance である。

Γ_0 は誘電体表面に於ける反射係数で

$$A_{r1}/A_{i1} = \Gamma_0 = e^{-2\phi} \qquad (3)$$

反射に際して位相変化があるために Γ_0 は複素数となり

$$\phi = p + jq \qquad (4)$$

(3) は誘電体を含む導波管の特性を示すものであって，この部分の Wave impedance Z(0) は誘電体表面上の管軸に垂直な電場と磁場との比として與えられる。即ち

$$Z(0)=\frac{E(0)}{H(0)}=Z_1\frac{1+\Gamma_0}{1-\Gamma_0}$$

$$=Z_1\frac{1+e^{-2\phi}}{1-e^{-2\phi}}=Z_1\coth\phi \tag{5}$$

空氣の在る部分の減衰は無視して差支えないから傳播定数 $\gamma_1=\alpha_1+j\beta_1$ に於て $\alpha_1=0$ となって

$$\gamma_1=j\beta_1=j\frac{2\pi}{\lambda_g} \tag{6}$$

λ_g は空氣の在る部分の管内波長である。(6) から $|\exp(\pm\gamma_1 x)|=1$ となるから (1) は次の様に変形される。

$$E_{max}=|A_{i1}|(1+|\Gamma_0|=|A_{i1}|(1+e^{-2p})$$
$$E_{min}=|A_{i1}|(1-|\Gamma_0|=|A_{i1}|(1-e^{-2p}) \tag{7}$$

従って

$$E_{min}/E_{max}=(1-e^{-2p})/(1+e^{-2p})=\tanh p \tag{8}$$

誘電体表面からの 1st min. は x_0 の位置でおこり，この点では入射波と反射波の位相差が π である。従って

$$2\pi x_0/\lambda_g=-2q-2\pi x_0/\lambda_g+\pi$$

或は

$$q=\pi/2-2\pi x_0/\lambda_g \tag{9}$$

(8) (9) に依て p, q 即ち反射係数 Γ_0 が測定可能な量 x_0, λ_g, E_{min}/E_{max} で表わされることが分る。従って (5) から Wave impedance Z(0) が測定し得る量に依て決められる。(5) の Coth ϕ を展開し，(8) (9」を用いると

$$Z(0)=Z_1\mathrm{Coth}(p+jq)=Z_1\frac{\tanh p-j\cot q}{1-j\tanh p\cot q}$$

$$=Z_1\frac{E_{min}/E_{max}-j\tan(2\pi x_0/\lambda_g)}{1-jE_{min}/E_{max}\cdot\tan(2\pi x_0/\lambda_g)}$$

$$=Z_1\frac{\frac{1}{\rho}-j\tan(2\pi x_0/\lambda_g)}{1-j\frac{1}{\rho}\tan(2\pi x_0/\lambda_g)} \tag{10}$$

ここに ρ は V.S.W.R. E_{max}/E_{min} を表わす。試料の表面から $n\frac{\lambda_g}{2}$ だけ離れた点から試料の在る方への 1st min. までの距離を x とすると

$$x_0=\lambda_g/2-x$$

従って

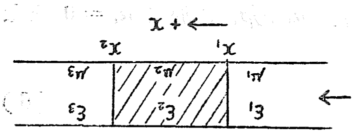
$$\tan\left(\frac{2\pi x_0}{\lambda_g}\right)=-\tan\left(\frac{2\pi x}{\lambda_g}\right)$$

故に

$$Z^{(1.2)}\equiv\frac{Z(0)}{Z_1}=\frac{\frac{1}{\rho}+j\tan(2\pi x/\lambda_g)}{1+j\frac{1}{\rho}\tan(2\pi x/\lambda_g)} \tag{11}$$

$Z_i^{12)}$ は試料の表面から負荷側を見た normalizld Wave impedance を與える。$\theta=\frac{2\pi}{\lambda_g}x$ とおくと (11) は

$$Z_i^{(12)} = \frac{\frac{1}{\rho} + j\tan\theta}{1 + j\frac{1}{\rho}\tan\theta} \tag{12}$$



第 1 図

次に導波管内に $1(\varepsilon_1, \mu_1)$ $2(\varepsilon_2, \mu_2)$ $3(\varepsilon_3, \mu_3)$ の三種の物質が充填されている場合（第一図）を考える。電磁場は時間空間的に $\exp(j\omega t - jkx)$ に従って変化するものと考えると（2）の領域の電磁場は

$$E_2 = [E_{i2}\exp(-jk_2x) + E_{\gamma 2}\exp(jk_2x)]\exp(j\omega t)$$
$$H_2 = [H_{i2}\exp(-jk_2x) + H_{\gamma 2}\exp(jk_2x)]\exp(j\omega t) \tag{13}$$

ここに E_{i2}, H_{i2} は 2 の領域を x の正方向に進行する電場，磁場であり，$E_{\gamma 2}$, $H_{\gamma 2}$ は x の負方向に進行する電磁場である。

媒質の境界面 $x = x_1$ の両側の電磁場の切線成分がこの面上で連続であることから

$$E_{t1} = E_{t2},\ H_{t1} = H_{t2}\ (x = x_1) \tag{14}$$

故に E 波について考えると，

$$H_{i1}\exp(-jk_1x_1) + H_{\gamma 1}\exp(jk_1x_1) = H_{i2}\exp(-jk_2x_1) + H_{\gamma 2}\exp(jk_2x_1) \tag{15}$$

又 $Z^{(1)}[H_{i1}\exp(-jk_1x_1) - H_{\gamma 1}\exp(jk_1x_1)$

$$= Z^{(2)}[H_{i2}\exp(-jk_2x_1) - H_{\gamma 2}\exp(jk_2x_1)] \tag{15}$$

今 $Z^{(12)} \equiv Z^{(2)}/Z^{(1)} = \dfrac{\varepsilon_1 k_2}{\varepsilon_2 k_1}$，反射係数 $\Gamma^{(12)} = \dfrac{H_{\gamma 1}}{H_{i1}}$ (16)

となるから（14）（15）（16）より

$$\Gamma^{(12)} = \frac{(1 - Z^{(12)}) + (1 + Z^{(12)})\Gamma^{(23)}\cdot\exp(j2k_2x_1)}{(1 + Z^{(12)}) + (1 - Z^{(12)})\Gamma^{(23)}\cdot\exp(j2k_2x_1)}\cdot\exp(-2jk_1x_1) \tag{17}$$

H 波の場合には $Z^{(1)}$ の代りに admittance $Y^{(1)}$ を用いると，以上の結果で H_t を E_t とし，ε と μ とを入れ換えることにより結果が求められる。

即ち

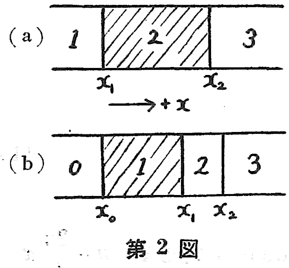
$$Y^{(12)} = Y^{(2)}/Y^{(1)} = \mu_1 k_2/\mu_2 k_1 \tag{18}$$

次に（3）の領域が金属ならば

$$E_{t2} = E_{t3} = 0$$

従って（15）より E 波については

$$\Gamma^{(12)} = H_{\gamma 2}/H_{i2} = \exp(-j2k_2x_2) \tag{19}$$



第 2 図

又 H 波では（15）式より

$$\Gamma^{(23)} = -\exp(-j2k_2x_2) \tag{20}$$

第二図（a）の如く（3）の領域が金属で（1）の領域が空氣の場合 (Short circuit) の H 波に対する impedance $Z_S^{(12)}$ は

$$Z_S = \frac{1 + \Gamma^{(12)}}{1 - \Gamma^{(12)}} = \left[\frac{1 - \exp(-j2k_2(x_2 - x_1))}{1 + \exp(-j2k_2(x_2 - x_1))}\right]\cdot Z^{(12)} \tag{21}$$

次に（3）の領域が金属で（0），（2）領域が空氣で（第二図 (b)），$x_2 - x_1 = \dfrac{1}{4}\lambda_g$ なる時 (effective open circuit) の impedance $Z_0^{(01)}$ を求めよう。

$$\Gamma^{(12)} = -\left[\frac{1-Z^{(12)}+(1+Z^{(12)})\exp\left(-j2\frac{2\pi}{\lambda_g}\frac{\lambda_g}{4}\right)}{1+Z^{(12)}+(1-Z^{(12)})\exp\left(-j2\frac{2\pi}{\lambda_g}\frac{\lambda_g}{4}\right)}\right]\exp(-2\,jk_1x_1),$$

となるから

$$\Gamma^{(01)} = -\left[\frac{(1-Z^{(01)})-(1+Z^{(01)})\exp(-jk_1x_1)}{(1+Z^{(01)})-(1-Z^{(01)})\exp(-jk_1x_1)}\right]$$

故に $$Z_0^{(01)} = \frac{1+\Gamma^{(01)}}{1-\Gamma^{(01)}} = \left[\frac{1+\exp(jk_1(x_1-x_0))}{1-\exp(-jk_1(x_1-x_0))}\right]\cdot Z^{(01)} \qquad (22)$$

又仮定から $Z^{(01)} = Z^{(01)}$, $k_1 = k_2$, 尚 $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ ならしめると

$Z_0^{(01)}Z_S^{(12)} = Z^{(01)}Z^{(12)} = (Z_i^{(12)})^2$ となる。

ここに $Z_i^{(12)} = Z^{(01)} = Z^{(12)}$

依て (12) より

$$Z_S^{(12)} = \frac{1+j\rho_S\tan\theta_S}{\rho_S+j\tan\theta_S} \qquad Z_0^{(01)} = \frac{1+j\rho_0\tan\theta_0}{\rho_0+j\tan\theta_0}$$

故に $$Z_i^{(12)} = (Z_S^{(12)}Z_0^{(01)})^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1+j\rho_S\tan\theta_S}{\rho_S+j\tan\theta_S}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{1+j\rho_0\tan\theta_0}{\rho_0+j\tan\theta_0}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (23)$$

一方 $Z_i^{(12)} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{k_1}{k_2} \fallingdotseq \dfrac{k_1}{k_2} \quad (\mu_1 = \mu_2)$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(k_2)^2 = \varepsilon\mu\omega^2\left\{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2\right\} = \varepsilon\mu\omega^2 = -\varepsilon\mu\omega^2\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2$$

$$= \varepsilon\mu\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_C}\right)^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon'-j\varepsilon'') - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left\{\varepsilon' - \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2 - j\varepsilon''\right\}$$

故に $$Z_i^{(12)} = \left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2}{\varepsilon' - \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2 - j\varepsilon',}\right]^{\frac{1}{2}}$$

従って $$\frac{\varepsilon' - \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2 - j\varepsilon''}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2} = \left(\frac{\rho_S+j\tan\theta_S}{1+j\rho_S\tan\theta_S}\right)\left(\frac{\rho_0+j\tan\theta_0}{1+j\rho_0\tan\theta_0}\right) \qquad (24)$$

(24)を real part と imaginary part に分け

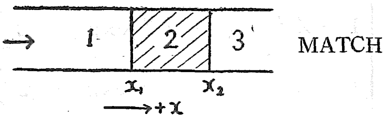
$$A = \rho_S\rho_0 - \tan\theta_0\tan\theta_S$$
$$B = 1 - \rho_S\rho_0\tan\theta_S\tan\theta_0$$
$$C = \rho_S\tan\theta_S + \rho_0\tan\theta_0$$
$$D = \rho_S\tan\theta_0 + \rho_0\tan\theta_S$$

と置くと

$$\varepsilon' = \left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2\right]\left[\frac{AB+CD}{B^2+C^2}\right] + \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2 \qquad (25)$$

$$\varepsilon'' = \left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2\right]\left[\frac{AC-BD}{B^2+C^2}\right]$$

従って $$\tan\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \qquad (26)$$



第　三　図

特別の場合として(1)(3)が空氣で(3)は無反射端を有するとする。$x_1=0$ とおくと $x_2-x_1=x_2$

反射係数
$$\Gamma^{(12)}=\frac{1-Z^{(12)}+(1+Z^{(12)})\Gamma^{(23)}}{1+Z^{(12)}+(1-Z^{(12)})\Gamma^{(23)}}$$

$$\Gamma^{(23)}=\frac{1-Z^{(23)}}{1-Z^{(23)}}\cdot\exp(-2jk_2x_2)$$

又
$$Z^{(23)}=\frac{1}{Z^{(32)}}=\frac{1}{Z^{(12)}}$$

從って
$$\Gamma^{(23)}=\frac{1-\dfrac{1}{Z^{(12)}}}{1+\dfrac{1}{Z^{(12)}}}\cdot\exp(-2jk_2x_2)$$

$$\Gamma^{(12)}=\frac{1-[Z^{(12)}]^2-[1-(Z^{(12)})^2]\exp(-2jk_2x_2)}{[1+Z^{(12)}]^2-[1-Z^{(12)}]^2\exp(-2jk_2)}$$

依って E 波の impedance $Z_n^{(12)}$ は

$$Z_n^{(12)}=\frac{1+\Gamma^{(12)}}{1-\Gamma^{(12)}}=\frac{1}{Z^{(12)}}\left[\frac{1+Z^{(12)}-(1-Z^{(12)})\exp(-2jk_2x_2)}{1+Z^{(12)}+(1-Z^{(12)})\exp(-2jk_2x_2)}\right] \tag{27}$$

H 波では
$$Z_n^{(12)}=Z^{(12)}\left[\frac{(Z^{(12)}+1)-(Z^{(12)}-1)\exp(-2jk_2x_2)}{(Z^{(12)}+1)+(Z^{(12)}-1)\exp(-2jk_2x_2)}\right] \tag{28}$$

故に (28)式より
$$e^{-2jk_2x_2}=\left[\frac{Z^{(1,2)}-Z_n^{(1,2)}}{Z^{(1,2)}+Z_n^{(1,2)}}\right]\left[\frac{Z^{(1,2)}+1}{Z^{(1,2)}-1}\right] \tag{29}$$

又 $e^{-2jk_2x_2}=e^{-jk_1\frac{2x_2}{Z^{(1,2)}}}$ とおけるから (29) 式は

$$\exp\left(-jk_1\frac{2x_2}{Z^{(1,2)}}\right)=\left[\frac{Z^{(1,2)}-Z_n^{(1,2)}}{Z^{(1,2)}+Z_n^{(1,2)}}\right]\left[\frac{Z^{(1,2)}+1}{Z^{(1,2)}-1}\right] \tag{30}$$

(30) 式を次の近似式で置換える。

$$\exp\left(-jk_1\frac{2x_2}{Z_n^{(1,2)}}\right)=\left[\frac{Z_n^{(1,2)}-Z^{(1,2)}}{Z_n^{(1,2)}-2Z^{(1,2)}}\right]\left[\frac{2Z^{(1,2)}-Z_n^{(1,2)}+1}{2Z^{(1,2)}-Z_n^{(1,2)}-1}\right] \tag{31}$$

(31) 式を $Z^{(1,2)}$ に関して解き

$$Z^{(1,2)}=\left[\frac{1-\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_C}\right)}{\varepsilon'-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2-j\varepsilon''}\right]^{\frac{1}{2}}$$

とから ε' 及び $\tan\delta$ を求めることが出來る。

3. 結　言

今日よく知られている一般理論を用いて, Surber-Crouch の理論の解説をなし, 且つ無反射端による誘電測定の理論的考察を試みた次第である.

文　献

(1) Roberts & Hippel; J. App. Phys. 17, July, (1946).
(2) Surber & Crouch; J. App. Phys. 19. Dec. (1948).
(3) 電氣通信学会; 立体回路 (上)
(4) Montgomery: Technique of Microwave Measurements.

(1952. 3. 10 受理)