行列式乗法定理の一証明

新　谷　三　郎

行列式の乗法定理は Cauchy*以来多数あるが，次に述べる幾何学的方法は積の特異な形式へ直接到達するのを特色とする。**

n 次元ユークリッド空間に二つの座標系 $(0-y_1y_2\cdots y_n)$ 及 $(0-x_1x_2\cdots x_n)$ を考え前者を Γ 後者を Γ' と名づける両座標系の間の変換式は

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\\ &\ \vdots\\ y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n \end{aligned}\right\}\quad A=\left|a_{ik}\right|\neq 0$$

とする。$\Gamma\ \Gamma'$ 両系は斜交軸であってもよく又長さの単位は両系に於て必ずしも同一ではないとする。Γ' 系に於て，$P_1\ (1,0,0\cdots0)\ P_2\,(0,1,0\cdots0)\cdots\cdots P_n\,(0,0,\cdots0,1)$ なる点を考え之と原点とで作られる平行体（之を Γ' 系の単位平行体と假に名づけよう）の体積を Γ' 系の尺度で表せば***

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\cdots0\\ 0 & 1 & 0\cdots0\\ \cdots\cdots & & \\ 0 & 0\cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}\times\kappa'\quad 0<\kappa'\leqq 1$$

茲に κ' は Γ' が直交軸であれば，$\kappa'=1$ である。同じ $P_1,\ P_2,\cdots P_n$ を Γ で表せば $(a_{11}a_{21}\cdots a_{n1})$ $(a_{12}a_{22}\cdots a_{n2})\cdots(a_{1n}a_{2n}\cdots a_{nn})$ となる。よって同じ平行体の体積を Γ 系の尺度で表せばその符号をも入れて（換言すれば Γ' を正系とする時 Γ 系が正系であるか負系であるかをも考慮して）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots\cdots a_{n1}\\ a_{12} & a_{22}\cdots\cdots a_{n2}\\ \cdots\cdots & \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\times\kappa\qquad 0<\kappa\leqq 1$$

となる。今 Γ 系に於て単位平行体を考え之を Γ 系の尺度で表わせば明に

$$\begin{vmatrix} 1 & 0\cdots\cdots0\\ 0 & 1\cdots\cdots0\\ \cdots\cdots & \\ 0 & 0\cdots\cdots1 \end{vmatrix}\times\kappa=\kappa$$

である。故に

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{\Gamma'\text{系の単位平行体}}{\Gamma\text{系の単位平行体}}$$

であって，之が A の幾何学的意義である。次に原点 0 を共有する他の座標系 $(0-t_1\ t_2\cdots t_n)$ を考え之を Γ'' とする Γ' との間の変換式は

$$\left.\begin{aligned} x_1&=b_{11}t_1+b_{12}t_2+\cdots\cdots+b_{1n}t_n\\ x_2&=b_{21}t_1+b_{22}t_2+\cdots\cdots+b_{2n}t_n\\ &\ \vdots\\ x\ &=b_{n1}t_1+b_{n2}t_2+\cdots\cdots+b_{nn}t_n \end{aligned}\right\}\quad B=\left|c_{ik}\right|\neq 0$$

---

* Cauchy; Jour. l'école polyt. cah XVII 1815

** Weber-Wellstein; Elementarmathematik I. p. 309

*** 中村幸四郎　解析幾何学　p. 83

Γ'' と Γ との間の変換式は

$$c_{ik}=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{i\lambda}b_{\lambda k}$$

とおく事により

$$\left.\begin{aligned}y_1&=c_{11}t_1+c_{12}t_2+\cdots\cdots+c_{1n}t_n\\y_2&=c_{21}t_1+c_{22}t_2+\cdots\cdots+c_{2n}t_n\\&\vdots\\y_n&=c_{n1}t_1+c_{n2}t_2+\cdots\cdots+c_{nn}t_n\end{aligned}\right\}C=|c_{ik}|$$

$$\therefore\ C=\frac{\Gamma''\text{ 系の単位平行体}}{\Gamma\text{ 系の単位平行体}}$$

$$=\frac{\Gamma'\text{ 系の単位平行体}}{\Gamma\text{ 系の単位平行体}}\times\frac{\Gamma''\text{系の単位平行体}}{\Gamma'\text{系の単位平行体}}$$

$$=\quad A\quad\times\quad B$$

$$\therefore\ C=A\times B$$

之即ち行列式の乗法定理である。

終