# 退化した二次曲面の正規形に就いて

新　谷　三　郎

## 直交軸に關する二次曲面

$$f(x,\ y,\ z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}zx+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\ \left[a_{ik}=a_{ki}\right]$$

に於て直交軸の變換

$$\begin{cases} x=l_1X+l_2Y+l_3Z+x_0 \\ y=m_1X+m_2Y+m_3Z+y_0 \\ z=n_1X+n_2Y+n_3Z+z_0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l}(x_0y_0z_0)\ \text{は新原点} \\ l_1m_1\cdots\text{は方向余弦}\end{array}\right)$$

を行うた時係数の行列式

$$H=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\ \text{及}\ A=H_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が不変である事は周知である*。そこで直交軸に関し $\rho$ を任意の正実数とし

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz-\rho\ (x^2+y^2+z^2)\ \text{及}\ a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}-\rho\ (x^2+y^2+z^2)$$

に廻転

$$\begin{cases} x=l_1X+l_2Y+l_3Z \\ y=m_1X+m_2Y+m_3Z \\ z=n_1X+n_2Y+n_3Z \end{cases}$$

を施すならば

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix}=-\rho^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\ \rho^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})\ \rho+A$$

$$\text{及}\ \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=-a_{44}\rho^3+(\underset{33}{H_{22}}+\underset{33}{H_{11}}+\underset{22}{H_{11}})\rho^2-(H_{11}+H_{22}+H_{33})\rho+H$$

が不変であるが茲に $\rho$ は全く任意であるから廻転に関しては

$$a_{11}+a_{22}+a_{33},\ a_{44},\ A_{11}+A_{22}+A_{33},\ \underset{33}{H_{22}}+\underset{33}{H_{11}}+\underset{22}{H_{11}},\ H_{11}+H_{22}+H_{33},\ H_{44}=A,\ H$$

の不変性が得られる。然るに平行移動

$$\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \\ z=Z+z_0 \end{cases}$$

---

* 高木貞治　代数学講義 p. 362　浅野啓三　線型代数学提要　p. 81

に対しては二次項の係数, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ は明に不変であるから，廻転と平行移動とを組合せた任意の座標変換に対しては

$$a_{11}+a_{22}+a_{33},\qquad A_{11}+A_{22}+A_{33},\qquad A,\qquad H$$

の不変性を得る。

特に　1) $H=0$　　$H_{44}=A=0$

の如き特殊の場合卽二次曲面が退化 (degenerate) する場合には任意の座標変換に対し

$$H_{11}+H_{22}+H_{33}\qquad ※$$

の不変なる事が示され，又

2) $H=0$　$H_{11}=H_{22}=H_{33}=H_{44}=0$　$A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$

の如き特殊の場合には

$$H_{\substack{22\\33}}+H_{\substack{11\\33}}+H_{\substack{11\\22}}$$

の不変性も得られる。次に之を証明する。

証明　先ず 1) の場合

$$O=H\cdot H_{\substack{ii\\44}}=\begin{vmatrix}H_{ii} & H_{i4}\\ H_{4i} & H_{44}\end{vmatrix}=-H_{i4}^{2}\ \text{より}^{*}\ H_{i4}=0\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

上式※は座標軸の廻転に対して不変な事は分っているから，平行移動に対して不変な事を示せばよい。

平行移動〔$x=X+x_0$　$y=Y+y_0$　$z=Z+z_0$〕

に対して $H_{11}$ は次の如く変化する。

$$\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}\\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{32}z_0+a_{42} & a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{43} & f(x_0y_0z_0)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}\\ a_{12}x_0+a_{42} & a_{13}x_0+a_{43} & (a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})x_0\\ & & +(a_{41}x_0+a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44})\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{21}x_0+a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{31}x_0+a_{34}\\ a_{12}x_0+a_{42} & a_{13}x_0+a_{43} & (a_{11}x_0+a_{14})x_0+(a_{41}x_0+a_{44})\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{21}x_0+a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{31}x_0+a_{34}\\ a_{12}x_0 & a_{13}x_0 & (a_{11}x_0+a_{14})x_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{21}x_0+a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{31}x_0+a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{41}x_0+a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{21}\\ a_{32} & a_{33} & a_{31}\\ a_{12} & a_{13} & a_{11}\end{vmatrix}x_0^2+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{12} & a_{13} & a_{14}\end{vmatrix}x_0+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{21}\\ a_{32} & a_{33} & a_{31}\\ a_{42} & a_{43} & a_{41}\end{vmatrix}x_0+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=H_{44}x_0^2-H_{41}x_0-H_{14}x_0+H_{11}=H_{11}$$

卽ち此の場合 $H_{11}$ は不変である。$H_{22}$, $H_{33}$ に就いても同様であるから

$$H_{11}+H_{22}+H_{33}$$

---

* 藤原松三郎　代数学第一巻 p. 395 Jacobi の定理による。Kowalewski Determinantentheorie p. 81

は平行移動に対しても廻転に対しても不変である。

2) の場合，先ず $A=0 \quad A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$ から

$$0=A\cdot A_{\substack{ii\\kk}}=\begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ki} \\ A_{ki} & A_{kk}\end{vmatrix}=-A^2_{ik} \quad \therefore A_{ik}=0 \ (i,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

又 $H_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=0$ 及 $A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0$ から

$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}=0$ を得　　$H_{22}=A_{22}=0$ から

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43}\end{vmatrix}=0$ を得　　$H_{33}=A_{33}=0$ から

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42}\end{vmatrix}=0$ を得る

偖平行移動によって $H_{\substack{22\\33}}$ は次の如く変化する

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} \\ a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} & f(x_0y_0z_0)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} \\ a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} & \begin{matrix}(a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24})y_0+(a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34})z_0 \\ +(a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44})\end{matrix}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} \\ a_{12}y_0 & (a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24})y_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} \\ a_{13}z_0 & (a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34})z_0\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1}z_0+a_{13}z_0+a_{14} \\ a_{14} & a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44}\end{vmatrix}$$

$A_{ik}=0$ を使用すれば

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{12}y_0 & a_{24}y_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{13}z_0 & a_{34}z_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} \\ a_{14} & a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44}\end{vmatrix}$$

然るに $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43}\end{vmatrix}=0$ であるから，

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44}\end{vmatrix}=H_{\substack{22\\33}}$$

即 $H_{\substack{22\\33}}$ は此の場合平行移動に対して不変である。$H_{\substack{11\\33}}$，$H_{\substack{11\\22}}$ も同様であるから

$$H_{\substack{22\\33}}+H_{\substack{11\\33}}+H_{\substack{11\\22}}$$

は廻転に対しては勿論此の場合は平行移動に対しても不変となる。　（證明終）

二次曲面の方程式を正規形（canonical form）に直す実際の方法は多くの成書に記載してあるから* 以下單に正規形の係数を不変式から出して見る殊にその退化した場合の形は従来の書物には見えない様に思われる。

今 $H$ 及 $A$ なる行列式を形作る行列（matrix）の階数（rank）を夫々〔$H$〕及〔$A$〕で示す事にする。

$3\leqq$〔$H$〕$\leqq 4$　　〔$A$〕$=3$　　なる場合

$f=0$ なる二次曲面は適当な直交軸の変換によって

$$c_{11}X^2+c_{22}Y^2+c_{33}Z^2+c_{44}=0$$

となり，$c_{11}$，$c_{22}$，$c_{33}$ は判別三次方程式

---

* 田中正夫空間解析幾何学 p. 354

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

の三実根である事は成書に記載してある*通りである。又 $c_{44}$ は $H$ 及 $A$ の不変性から

$$H=\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix} \quad 0 \neq A=\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} \quad \therefore c_{44}=\frac{H}{A}$$

$\therefore [H]=4$ ならば　$c_{11}X^2+c_{22}Y^2+c_{33}Z^2+H/A=0$

$[H]=3$ ならば　$c_{11}X^2+c_{22}Y^2+c_{33}Z^2=0$

$[H]=4$　$[A]=2$　なる場合

矢張適当なる座標変換によって $f=0$ は

$c_{11}X^2+c_{22}Y^2+2c_{34}Z=0$

に変る，$c_{11}\neq 0$, $c_{22}\neq 0$, 0 は $D(\lambda)=0$ の三実根で $c_{34}$ は不変式

$$H=\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 \end{vmatrix} \text{ から}$$

$$c_{34}=\pm\sqrt{\frac{-H}{c_{11}\,c_{22}}}=\pm\sqrt{\frac{-H}{\begin{vmatrix} c_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{vmatrix}}}=\pm\sqrt{\frac{-H}{A_{11}+A_{22}+A_{33}}}$$

で与えられる。但複号は新軸の方向による事無論である。又分母は $c_{11}\ c_{22}$ で零でない事は $D(\lambda)$ の性質からも分るが，直接には $A=0$から $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ は異符号で無く $[A]=2$ から $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$ でない事が分るのである。

$$\therefore c_{11}X^2+c_{22}Y^2\pm 2\sqrt{\frac{-H}{A_{11}+A_{22}+A_{33}}}Z=0$$

$2\leqq[H]\leqq 3$　$[A]=2$　ならば $f=0$ は

$c_{11}X^2+c_{22}Y^2+c_{44}=0$

となる。此の時 $c_{11}\neq 0$, $c_{22}\neq 0$, 0 は $D(\lambda)=0$ の三実根であるが $H=0$, $A=0$ であるから $H_{11}+H_{22}+H_{33}$ が不変となる。

$$\therefore H_{11}+H_{22}+H_{33}=\begin{vmatrix} c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}$$

$$c_{44}=\frac{H_{11}+H_{22}+H_{33}}{c_{11}\,c_{22}}=\frac{H_{11}+H_{22}+H_{33}}{\begin{vmatrix} c_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{vmatrix}}=\frac{H_{11}+H_{22}+H_{33}}{A_{11}+A_{22}+A_{33}}$$

茲でも亦分母は零では無い。

$[H]=3$ の時は　$c_{11}X^2+c_{22}Y^2+\dfrac{H_{11}+H_{22}+H_{33}}{A_{11}+A_{22}+A_{33}}=0$

$[H]=2$ の時は　$c_{11}X^2+c_{22}Y^2=0$

$[H]=3$　$[A]=1$ ならば $f=0$ は

$c_{11}X^2+2c_{24}Y=0$

となる。$c_{11}\neq 0$ は $D(\lambda)=0$ の単根で 0 はその二重根である。$c_{24}$ は

$$H_{11}+H_{22}+H_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{24} \\ 0 & c_{42} & 0 \end{vmatrix} \text{ から求める。}$$

* 既掲の田中空間解析幾何学 p. 327，高木代数学 p. 389

$$\therefore c_{24}=\pm\sqrt{\frac{-H_{11}-H_{22}-H_{33}}{c_{11}}}=\pm\sqrt{\frac{-H_{11}-H_{22}-H_{33}}{c_{11}+0+0}}=\pm\sqrt{\frac{-H_{11}-H_{22}-H_{33}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}}$$

$A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$ から $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ は異符号ではなく，又〔$A$〕$=1$ から $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$ では無い。

$$\therefore c_{11}X^2\pm2\sqrt{\frac{-H_{11}-H_{22}-H_{33}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}}Y=0$$

複号は新Y軸の方向による。

$1\leqq$〔$H$〕$\leqq 2$ 〔$A$〕$=1$ の場合 $f=0$ は

$$c_{11}X^2+c_{44}=0$$

となる $c_{11}\neq 0$ は $D(\lambda)=0$ の単根 0 は二重根であるが，此場合は，$H=0$ $H_{11}=H_{22}=H_{33}=H_{44}=0$ $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$ であるから，$H_{\substack{11\\22}}+H_{\substack{11\\33}}+H_{\substack{22\\33}}$ が不変なる場合である。

$$H_{\substack{11\\22}}+H_{\substack{11\\33}}+H_{\substack{22\\33}}=\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & c_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & c_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_{11} & 0\\0 & c_{44}\end{vmatrix}$$

$$\therefore c_{44}=\frac{H_{\substack{11\\22}}+H_{\substack{11\\33}}+H_{\substack{22\\33}}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}$$ 勿論分母は零でない。

〔$H$〕$=2$ の時は　$c_{11}X^2+\dfrac{H_{\substack{11\\22}}+H_{\substack{11\\33}}+H_{\substack{22\\33}}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}$

〔$H$〕$=1$ の時は　$c_{11}X^2=0$

〔$A$〕$=0$ ならば最早有限距離の二次曲面ではない。

終