連立方程式の指導についての一考察

奥　村　泰　麿

1. は じ め に

図形の論証の授業後、ある生徒が「本当に自分だけの力で証明できたときは、気持ちがいいですね」といってきた。そういうときの生徒の目は輝いている。しかし、反省してみると、教師が「とにかく文句を言わずに覚えなさい。こういうふうにしなさい。」ということもある。佐伯胖氏は「考えることの教育」のなかで、次のように述べている。教育が「やらせの術」になりがちの今日、わたしたちはもう一度ライルのKnowing Howがまぎれもなく知的行為であるべきことを想いうかべておかねばならない。先生の言ったとおりの手順に盲目的に従うのは少なくとも「知的」な行為ではない。いま、自己教育力とか問題解決というようなことを考えていこうとするとき、まずもって「やらせの術」になってはいないかどうか自分の連立方程式の指導を通して考えてみたい。

2. 研究のねらい

本研究では、次の３点にねらいを絞って行った。

(1) 連立方程式の指導における問題点を明らかにする。

(2) その問題点を解決するための具体的な方策を考える。

(3) その方策の有効性を考察する。

3. 研究の対象と方法

本研究は昭和62年度、本校第２学年 180 名を対象にした連立方程式の指導で得た事例をもとに分析する。

4. 研究の結果と考察

(1) 連立方程式の指導における問題点

これまでの自分のしてきた連立方程式の指導を振り返ってみたとき、２つのことが気にかかるので具体的な生徒の解答例で述べてみることにする。

事例１　A君

$$\begin{cases} 2a + b = 4 & \cdots ① \\ 3a + 1 = 4 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{lr} ①\times 3 & 6a + 3b = 12 \\ ②\times 2 & -)\ 6a + 2 = 8 \\ \hline & 3b - 2 = 4 \\ & b = 2 \cdots ③ \end{array}$$

事例２　Bさん

大小２つの自然数がある。
大きい方の数の３倍から小さい方の数をひくと－８となる
大きい方の数と小さい方の数の２倍をたすと９になる
大きい数，小さい数はいくらか。

<table>
<tr>
<td>③を①に代入して
$2a + 2 = 4$
$2a = 2$
$a = 1$</td>
<td>(解答) 大きい方の数をx，小さい方の数をyとすると
$\begin{cases} 3x - y = -8 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$
これを解いて　$(x, y) = (-1, 5)$
$3 \times (-1) - (5) = -8$
$-1 + 10 = 9$ であるから　これは問題にあっている
答　大きい方 −1　小さい方 5</td>
</tr>
</table>

A君にとっては、「加減法は一つの文字を消去するための方法である。」ということでなく、「連立方程式は加減法を使って解くものである。」ということらしい。それまでの指導を反省してみると、連立方程式は加減法より代入法を先に指導すべきであろうとか、加減法はこういう教材を使うと生徒がよく分かるであろうといったことに精力を傾けてきた。しかしその結果どんなにすばらしい指導がされたとしても、このA君のような生徒はあとをたたないであろう。極言するならば、生徒のためを思い、いろいろとすることが実は生徒にとって有難迷惑になっており、生徒一人ひとりにとって大切なものを奪って、結局「やらせの術」になっていた、といえるかもしれない。

もし、中学校では学習しない三元一次連立方程式を１つ練習問題のなかに入れたとしよう。この時生徒はどのように反応するであろうか。いままでの指導では、「先生、こんなのまだ教えてもらっていません。だからできるはずありません。」とか、意欲のある生徒ならば、「こんなのも解いてみたいです。はやく解き方を教えてください。」などという声がかえってきそうである。

Ｂさんの文章題の場合は本当によくみられる。いわゆる吟味を教師が力を入れればいれるほどよく出てくるようにさえ思える。文章題の指導は「いかに立式させるか」ということについては多くの先行研究がある。しかし、この吟味についての研究はほとんどみあたらない。

以上のことから連立方程式の指導における問題点は次のように指摘できる。

- 連立方程式の解き方の指導が教師からの一方的なものになっている。
- 吟味することの意味を理解させていない。

(2)　連立方程式の解き方の指導が教師からの一方的なものにならないための具体的な方策

〔個人学習の場の設定〕

連立方程式の解き方で今、私が育てようとしているのは「自分が解いたことのない問題に挑戦し、できるならば解決してしまう生徒」である。そうなるためには生徒に場と時間を保証してやる必要があると考えた。

そこで連立方程式の単元指導計画のなかに個人学習の場を意図的に設定してみた。場の回数は５回、１回の時間は15分から30分とした。時間の不足する生徒が家庭で継続して取り組めるようにかならず授業の後半に設定した。そして１種類でなく別の方法でも出来ないか考えさせた。それから個人学習探求シートはＢ４更紙の右半分の表と裏に同じ印刷をした。そのシートを二つに折り、中にＢ５のカーボン紙をはさんで記入させた。授業終了時１部を提出し、もう１部はノー

トに貼らせた。その提出されたシートに教師は目をとおしてさまざまの考えをその代表の生徒の名前をつけて○○教授式とした。次の時間は各々の教授（生徒）に説明させていくことにした。

実際の個人学習での具体例について問題Aと問題Eの２つについて考察してみる。

> 問題A　鶴と亀があわせて12匹います。足の数は合計38本です。さて、鶴と亀はそれぞれ何匹いるでしょうか。

あるクラス（45名）での正答総数は79個であった。文字式を利用せずに表などで求めたものが50個である。１つの文字を利用して成功したものが20個である。２つの文字を利用して成功したものは９個であった。この９個の中からいくつかを紹介してみる。便宜上、鶴ｘ匹、亀ｙ匹とする。そしてｘ＋ｙ＝12、２ｘ＋４ｙ＝38の二式を立式した後である。

松井教授式

$x=12-y$
$y=12-x$

$2(\underline{12-y})+4(12-x)=38$
$2y+4x=34$

ｘのことだから　これじゃなくて

$2x+4(12-x)=38$

$x=5$
$12-5=7$

つる５羽
かめ７匹

新宮教授式

$4y+2x=38$
$(4y+2x)\div 2=38\div 2$
$2y+x=19$
$x+y=12$ だから
$(2y+x)-(x+y)=y$ だから
$19-12=7$

$y=7$　$x=5$

石原教授式

$x+x+y+y+y+y=38$
で
$x+y=12$ がわかっているから
ペアをつくっていくと…
$x+x+y+y+y+y=38$
ｘ＋ｙのペアが２組できる。
のこりが $y+y=14$ になり
ｙを解くと $y=7$
ｙを代入して $x+7=12$
ｘを解くと $x=5$ になる。
$\langle x=5,\ y=7 \rangle$

松井教授式は代入法に気が付くステップがよく分かる。数学教師はまずしないことである。しかし１つの文字を消去することの意味を笑いながらも生徒達はつかんでいた。

新宮教授式は1/2倍したところもおもしろいが、筆算の形に気づかない素朴な加減法がよく表れている。

石原教授式は代入法と加減法の中間のような方法でなかなかおもしろい。これなどはその生徒が説明した時にクラスで思わず「ほーう。」という感嘆の声がもれた。

> 問題E　あるキャラメル２箱とあるチョコレート３箱で950ｇです。同じキャラメル５箱と同じチョコレート４箱では1,780ｇです。キャラメル１箱、チョコレート１箱はそれぞれ何ｇですか。

この問題は連立方程式の代入法、一方の式だけを数倍して解く加減法までを学習した後に取り組ませたものである。

園山教授式

$$\begin{cases} 2x+3y=950 & \cdots ① \\ 5x+4y=1780 & \cdots ② \end{cases}$$

①を$\frac{5}{2}$倍して

$$5x+\frac{15}{2}y=950\times\frac{5}{2}$$

これはやめて

①を5倍して　$10x+15y=4750 \cdots ①'$

②を2倍して　$10x+8y=3560 \cdots ②'$

坂上教授式

$$\begin{array}{rl} 5x+4y=1780 & \cdots ① \\ -)\ 2x+3y=950 & \cdots ② \\ \hline 3x+y=830 & \cdots ③ \end{array}$$

だから　$y=830-3x \cdots ③'$

③'を②に代入する

$$2x+3(830-3x)=950$$

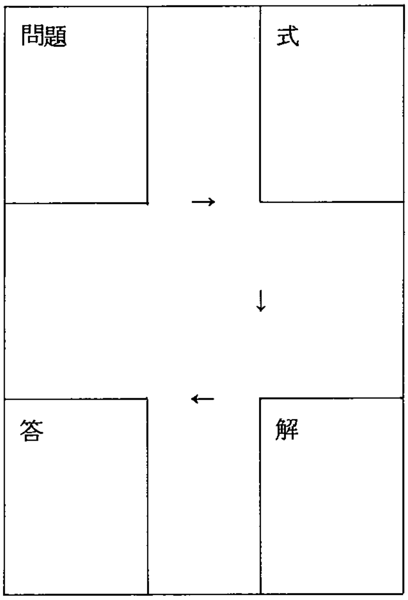
$$x=220 \cdots ④$$

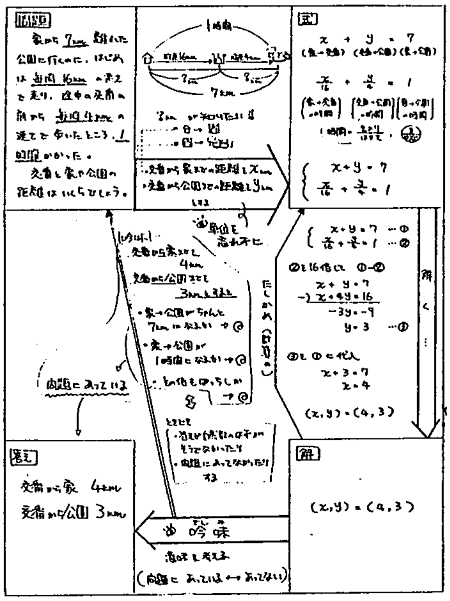
園山教授式はそれまでの方法から5/2倍するという自然な考え方をしている。そしてやりかけてみて、新しい方法に気づいたことがよく分かる。

坂上教授式は「これは代入法でしょうか。加減法でしょうか。」という教師の問いかけによって、生徒はあらためて１つの文字を消去するための方法ということを意識することができた。

(3)　吟味することの意味を理解させるための方策〔十字ノート〕

これは現実の世界と数学の世界との関係を把握させることが文章題を吟味することの意味を理解させるために必要であると考えてとりいれたものである。具体的な形式とそれを使用した場合の例をあげてみる。



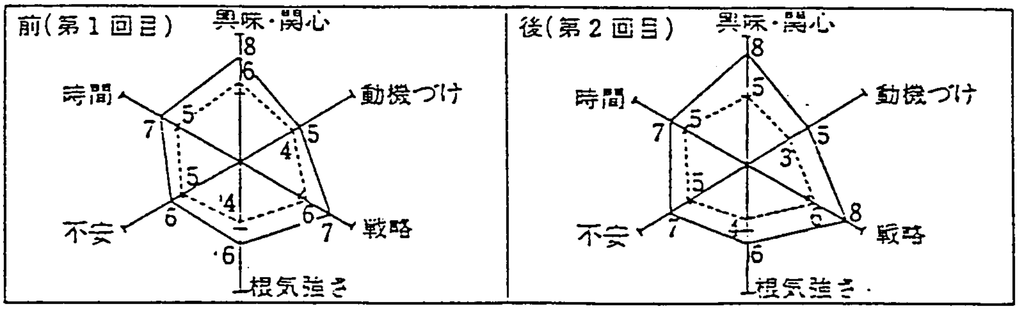


(4)　これらの方策の有効性をたしかめる方法

①　個人学習の場の有効性

この有効性については島根大学助教授の伊藤俊彦氏らによって作成された数学の問題解決にたいする態度尺度（ＭＰＳＡＳ）（資料参照）によって調べることにした。伊藤氏らの先行研究によってこのＭＰＳＡＳの信頼性は確かめられている。さらに因子分析の結果このＭＰＳＡＳは、次の６因子をもつことがわかっている。それは問題解決への興味・関心、問題解決への動機づけ、問題解決への戦略、問題解決への根気強さ、問題解決への不安、問題解決への時間である。このＭＰＳＡＳを個人学習をする前と後の２回実施して６つの因子がどう変化するかみることにした。その際、全数を調べず、この単元がおわり一カ月後に個人学習の問題Ａの数値をかえて、できるだけ多くの方法で解くように取り組ませ、５つ以上の方法で解いた生徒を上位群、１つ以下の方法で解いた生徒を下位群とした。そして群ごとに調べることにした。また授業では扱わない三元一次連立方程式を定期テストに１問出題し、生徒の取り組みも調べた。

ＭＰＳＡＳの結果はつぎのようになった。ただし、この表はＭＰＳＡＳの負の質問項目の応答は逆にし、２つの群別に各因子ごとの合計得点を求めて、伊藤氏らによって標準得点化された尺度から10段階の段階点として示したものである。上位群を――線とし、下位群を……線であらわした。



この結果、２つの群はどの因子においても大きな差があることがわかる。上位群においては、問題解決への戦略と問題解決への不安の２因子において好ましい方向への変化がみられた。すなわち、問題解決の場を設定することは多様な解決法を身につけた生徒（もしかしたらはじめから身につけていた生徒）にとってはある面では有効な方法といえる。ところが下位群の生徒にとっては問題解決への興味・関心と問題解決への動機づけの面で問題が残った。

三元一次連立方程式への取り組みは次のようになった。１番成功率の低かったクラスの場合、45名の中で取り組んだ生徒は17名で、その中で完全に成功した生徒は７名で一部成功した生徒は４名であった。定期テストだったため、時間の関係で最初から取り組めなかった生徒が多く残念であった。

② 十字ノートの有効性

この有効性については、まず今回の研究では、吟味の意味を理解しているかどうかの表れをレベル０～４まで設定することを試みることにとどめた。そしてつぎのように設定した。

レベル０……解を求めたままでよしとしている
レベル１……解を問題の文の求めたいものに単に置き換えている
レベル２……解の集合のなかから答えとなりうる部分集合を取り出している
レベル３……レベル２の部分集合から問題の文脈に照らし、答えをしぼっている
レベル４……式から解は同値関係であるが立式のとき同値関係がくずれ、そのため問題にかえって考えるという吟味の意義をつかんでいる。

5. 今後の課題

まず、個人学習では時間と場だけでは下位群の生徒には不十分であるからそれをどう解決すればよいか。さらに吟味については連立方程式の文章題だけでなく、各単元の特質をいかした３年間のつながり、その視点にもとづいて、各単元での文章題指導の力点を整理しておかなければならない。また、すこし取り入れている生徒自身による文章題作りの有効性についても調べてみたい。

6. 参考文献

(1) 佐伯胖：考えることの教育、国土新書、1982、P 157
(2) 伊藤俊彦他：島根のへき地校における算数・数学教育研究（Ⅱ）、1986
(3) 西田雄行：実証的な教育研究の進め方と論文の書き方、東洋館、1986

7. 資　　料

MPSAS

出席番号　　　　男・女

算数・数学の問題解決についての文があります。あなたの思った通りに、答えてください。検査の結果は、あなたの学校の成績には関係ありません。
答え方：各文については、以下に示すような５つの数字がついています。自分があてはまると思う番号に○をつけてください。

* 全くあてはまらない ………………………… 0
* あまりあてはまらない ………………………… 1
* どちらともいえない ………………………… 2
* 少しあてはまる ………………………… 3
* とてもよくあてはまる ………………………… 4

(1) 算数・数学の問題を解く時、図や表をかいて考えることは時間のむだです。	0－1－2－3－4
(2) 私は、算数・数学の問題を解くのはたいくつで、うんざりします。	0－1－2－3－4
(3) 私は、パズルを解くことが楽しいです。	0－1－2－3－4
(4) 私は、算数・数学の問題を解く時、失敗することを恐れずに、挑戦してみます。	0－1－2－3－4
(5) 私は、算数・数学の問題を解く時、思いつくままにときます。	0－1－2－3－4
(6) 多くの算数・数学の問題を解く時、私は時間がかかります。	0－1－2－3－4
(7) 私は、数学の問題を解いた後、本当にその答えがあっているか、その答えをたしかめます。	0－1－2－3－4
(8) 私は、算数・数学の問題をむずかしい課題というよりも、ゲームのようなものであると思います。	0－1－2－3－4
(9) 私は、算数・数学の問題を解こうとする時、見通しをたてて考えることができません。	0－1－2－3－4
(10) 私は、むずかしい問題に出会った時、自分で考えるよりは、だれかに教えてもらいたい。	0－1－2－3－4
(11) 新しいタイプの算数・数学の問題を解こうとすることは、私をわくわくさせます。	0－1－2－3－4
(12) 私は、同じ問題を解くのに、いろいろなやり方があることをみつけます。	0－1－2－3－4
(13) 問題をどうやったら正しく解けるかわからない時は、それと似たような別の問題を考えてみます。	0－1－2－3－4
(14) 私は、一つの問題を解く時、長く考えることができません。	0－1－2－3－4
(15) 数人の友達が算数・数学の問題を解くことはおもしろいと言っていることが、私にはわかりません。	0－1－2－3－4
(16) 人は、私のことを、算数・数学の問題を解くのに不安を持っていると言うでしょう。	0－1－2－3－4
(17) 私は、問題が正しく解けないならば、解けるまでがんばります。	0－1－2－3－4
(18) 私は、むずかしい算数・数学の問題を解きたくありません。	0－1－2－3－4
(19) 算数・数学の問題は、とてもおもしろいです。	0－1－2－3－4
(20) 私は、算数・数学の問題に対して、良い感情を持っています。	0－1－2－3－4
(21) 私は、授業以外で、算数・数学の問題について考えることはありません。	0－1－2－3－4
(22) 私は、いっしょうけんめい勉強しているのに、数学の問題を解く時、不安になります。	0－1－2－3－4
(23) 算数・数学で学ぶ多くの公式が、問題を解くのをむずかしくさせています。	0－1－2－3－4
(24) 私は、むずかしい算数・数学の問題を解かなければならないと考えると、いらいらします。	0－1－2－3－4
(25) 私は、十分な時間があれば、ほとんどの数学の問題を解くことができると思います。	0－1－2－3－4