

直観的な見方、考え方と展開図の指導例

石 田 美 吉

I はじめに

今回の指導要領の改訂で、図形の領域では、1年で空間図形を中心に直観的な見方、考え方を養い、2、3年で数学的な推論のしかたを学ぶことになった。しかし、直観的な見方、考え方こそ推論の根拠を、あるいは推論の方法を見いだすものとして、推論の土台であることを認識しておかねばならない。従って、特に中学校の段階で、それぞれが独立したものかのような扱いはしてはならないと考える。また、1年では、特に操作ということばが明示されたが、それは、直観を支え、推論の型を整える役割を持っていると考える。そこで、今回はそれらの事に対する私の試論をまとめてみることにした。

II 直観的な見方、考え方の背景

(1) 数学的な思考

数学教育は、既成の体系づけられた数学の伝達ばかりでなく、むしろ、その過程における数学的な思考を育てることが大切である。特に、中学の場合がそうである。

ところで、思考という人間の活動をとらえる場合、次の2つの方向がある。まず、思考そのものは対象を直接感覚器官に映し出すだけのものではなく、対象から受ける種々雑多な情報を、その対象の中に存在する性質として互いに関係、関連づけてとらえようとする働きであるといえる。一方、その関係、関連づけはどのようにしてなされたかその仕方をさぐる働きであるともいえる。もちろん、この2つの方向はそれぞれ独立した面からとらえることもできるが、特に、後者は前者の背景的な立場であり、深いつながりをもっている。

数学の場合について述べると、前者は、対象の中に存在するものを数学としてとらえた場合の、たとえば、集合の考え方とか、関数としての見方とか呼ばれている思考のことをいい、後者は、前者の考え方をつなげ支えている、帰納的思考、類比的思考、演続的思考とかいわれる思考、総じて数学的な推論と呼ばれているものである。そして、一般にはその両者をまとめて数学的な思考として扱っているが、今、ここでは、後者の方について論を展開していく。

(2) 直観的な見方、考え方の位置

数学的な推論には、人を説得する論理がなければならないが、論理は確かにその道を行けば何の障害もなく必ず目標に到達するが、なぜその道を選べば良いか、どうしてその道を見つけたかまでは語ってはくれない。論理的に何かを述べることができる前に、思考の中では発見があり、試行錯誤が繰り返されているはずである。その過程を学習せずにいきなり論理的

に表現したり処理したりすることを学習するのは無理である。指導要領の中では、その過程を1年において、直観的な見方、考え方を養い、数学的な推論の素地を養うよう述べている。実際に、具体的対象の中に普遍的な性質を見いだすには、既習の体験に支えられた見抜く力、すなわち直観が重要である。その力を養う段階を教育的に組織すると、中学1年にあたるということである。一方、教育という立場からしても、論理を解き明かしていくだけでは、他人の主張にただうなづくばかりで、そこには自らの主張が介在しないことになる。わかりきったこととして、ただ認めるというのではなく、生徒自身自らの中から湧きあがった主張となるような手だて、発見する場面が必要であることは言うまでもない。また、未知の場面で自らの力だけを頼りに活動していけるためにも、対象を見抜く直観が大切な役割を果たす。

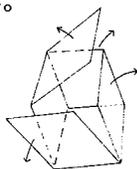
以上のようなことから、直観的な見方、考え方として養わねばならない思考が明らかにされてこよう。そこで、数学的な立場からそれをもう少し深くさぐってみよう。

III 直観的な見方、考え方

直観とは、対象から受けるたくさんの情報を、必然的なつながりをもつものどうし関係、関連づけて組み合わせ、対象のもつ本質的なものを見抜こうとする思考の働きであると言えるだろう。ただその場合、着想の仕方はいろいろな場合があって、たとえば、思考の順序が論理的でなく、単発的ででたらめの配列をしている場合だってあり、むしろそういう場合が多く、ことに生徒の思考はそうである。また、対象の構造にはかかわらず、既に獲得した知識を適用しようとしている場合だってあり、対象の本質に迫るには、2歩も3歩も手前であるが、全く的是はずれとはいえず、生徒同志の間では、それが重要な直観を動かすきっかけになることもしばしばである。また、いきなり結論を予測してしまうこともある。かといってでたらめでも思いつきでもいいからただやってみなさい、何かを発見しなさいということが、直観的な見方、考え方ではない。各瞬間、瞬間の活動が、めざすものに向けた推論の下部構造をなすものであって、互いに関連をもった思考活動で、さらには発展的に継続して行ってこそ対象の本質に迫れるのである。そのためには、対象から情報を得ようとする際の着想の視点を明確にしておく必要がある。

(1) 逆思考

まずひとつに、逆思考が働くことが大切である。たとえば、木の立方体という対象に対してまるい木をどう削ってできあがっていったのかとか、透明な板材でできた立方体なら、どういうつなぎ方をしているのかというような、物が構成されている様子を、時間的な流れの中でとらえ、それを逆にたどってみようという働きである。もちろんこの見方は、分析的な思考と呼ばれているものに含まれるだろうが、生徒の認識水準にあわせて、時間的なとらえ方が良いと考える。



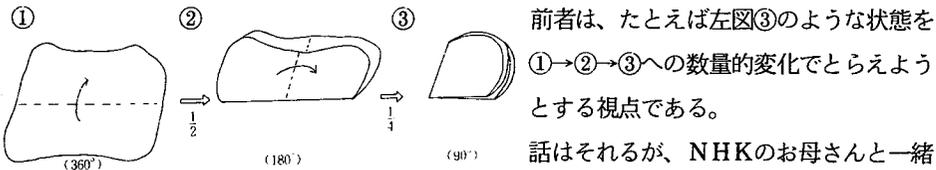
最近視聴覚設備もずい分整ってきているから、可能ならばVTRの逆回しなども、こういう視点もあるということ的印象づける方法であろう。あるいは、理科などに多い教師自身の実演からそれを逆にたどって思考させる方法もある。たとえば左の図のように立方体の辺を切り離して見せ、逆に組み立てを考えさせるのである。

(2) 対比

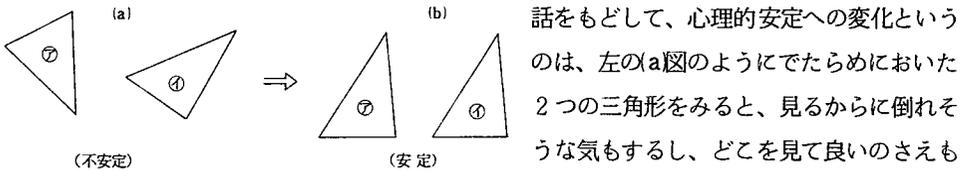
得た情報の間に類いな点はないかと対比させて見る視点も大切である。対象をその構成要素に幾つか分解してみて、その要素間に、普遍的に保存されているもの、そうでないものを比べて見いだす働きである。そうすることによって、情報の過不足が発見され、選択、補充の必要性を感じてくることになる。と同時に、幾分か抽象された姿が直観される。

(3) 変化

また、変化に視点をあてて見るということも大切である。これには、対象自体の変化に視点をあてる場合と、不安定な印象を受ける対象を、安定した印象を持つように変えてやろうとする心理的な変化を求めている場合とがある。



話はそれだが、NHKのお母さんと一緒にという番組の初めに、円や三角形がとびはねたりつぶれて別なものに変わったりするアニメーションがあった。その時は何げなく見ていたのであるが、今は、ああいった映像を生徒達に見せてやりたいなあと思う。それは、変化することに視点をあてた思考の大切さはもちろんであるが、変化の多様性からの思考の深まりとか、次の変化を創造する楽しさというような、思考することの素晴らしさを、生徒達に伝えたい気がする。

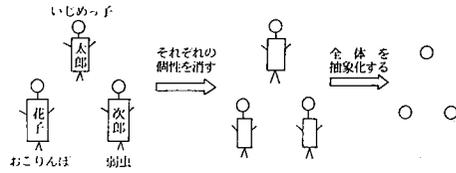


わからないような心理的な不安定な状態にあるといえる。しかし、(b)図のように、倒れないどっしりした位置に置きかえると、「あっ、合同ではないか。」という直観も直ちに導きだされるであろう。このように、心理的に安定して思考ができるように、対象を変化(ここでは移動)させて見ることも直観的な見方、考え方を引きだす大切な視点である。

この2つの変化という視点では、消えた、ふえた、へったというような質的変化と、右に動かした、重なった、大きくなった、小さくなったというような変換(合同、相似)の考え方が根底にあるが、そこまで細かく分析し、理論づけることはしないで、今までの生活経験の中から生まれてくる単純な見方を大切にしていくことが必要である。

(4) 集合

また、集合として視点も大切である。対象の中にあるいろいろな要素は、もとはそれぞれが違う色の服を着ている。そんな時、それぞれの個性、特色は消して、全く同格の要素として扱うという見方である。次の図では、3人の子どもはそれぞれが、個性、特色を持っている。しかし、数量に関する問題であるなら、それぞれの個性は必要なく、また、人である必要もない



わけで、集合としてとらえれば、3個のおはじきでも良いわけである。

このように、対象を、ある程度抽象化した集合としてとらえる視点も大切である。それと、ここでは、ずっと先にある抽象化された

集合への見通しを持った見方がより好都合である。

(5) 対応

(3)で述べたことを重ねるところがあるが、対象をある程度抽象した集合としてとらえ、それをより適切な数学的な構造をもった集合に変換させていくことが、抽象化の根本である。それには、対象の集合の中にある要素を、もっと抽象化した要素と対応させていくような視点を持つことが大切である。

以上述べたような視点で対象を見抜いていく姿勢があつてこそ、対象の本質に迫れる情報が得られると考える。が、しかし、これらの視点が、意識の中で明確になされるということは少ないであろう。

これは、聞いた話で全くなるほどと思う話であるが、ある講演を録音して、帰ってからそのテープを聴いてみると、講演会の時には聞こえなかったイスの音とか、外の車の音とか、うるさいくらいにはいっていたということや、ある絶好の被写体をカメラでとらえて、いい気持ちで現像してみたところ、その時には目にもとまらなかった色の悪い樹木が一本あったりするという話がある。考えてみるに、これは、人間がひとつの情景を見る時には、どこか好ましい印象でとらえたところを全体から浮かして見ていて、一方で、他の部分は情景の中から沈めてしまっているというよい例であろう。しかも、どこを浮かして、どこを沈めるなどということを明確に意識する者は芸術家を除いては、普通はいないであろう。しかし、それでもちゃんと講演は理解するし、被写体自体はよい記念になるわけである。

話をもとにもどせば、この対象のどこどこを浮かして、どこを沈めれば、先に述べた視点で対象を見ることができるとか、あるいは、どういう視点でとらえるべきかすら、意識の中では明確にされなくても、過不足をうまく選択、補充をしているのである。

先行体験に裏づけられた知識と、(1)から(5)のような視点とがあいまって、明確には意識されないが、対象の本質に迫った情報を得るまでの一連の思考活動をさして、直観的な見方、考え方と呼ばれるものであると考える。

IV 直観的な見方、考え方からの発展

Ⅲ であげた5つの視点は、それぞれが単発的に独立しているのではなく、飛び越すことはあっても(1)から(5)に向けて順に思考が流れていく図が描けることと思う。そして、その瞬間、瞬間に直観から思考が生まれ、それらは絶えずかわりを持ちながら連続的に発展していき、次第に抽象の度合いを強めていく。そういう過程があつてこそ、推論の進むべく道がおのずと開けてくること

になる。この点では、推論の下部構造を直観的な見方、考え方が築いているといえよう。

一方、直観の根拠となっている先行体験を明らかにしようとか、その直観を導きだしたのは、対象をどういう視点からとらえていたからなのか明らかにしようという姿勢は、それだけで小さな推論とすることができる。また、連続的に発展していく思考の展開する筋を明らかにしていく態度も含めて、推論の素地を養う過程であるともいえる。

V 操作的活動

新指導要領の中学1年のところには、直観的な見方、考え方にあわせて、操作的活動ということばがもりこまれた。直観的な見方、考え方の指導例を展開する前に、操作的活動について少し触れることにする。

(1) 直観と操作的活動

数学的思考の特徴は、具体がもっているイメージから独立した、抽象的な情報を扱うという点である。が、具体的な生活場面からの心理的距離が、あまりに遠く離れすぎると、その問題場面が十分に掌握できずに、直観も働いてこない。しかし、中学1年では、ある程度の抽象性が要求されており、問題場面との心理的距離には範囲が限定されることになる。そこで、直観が十分に働くように、具体的な生活場面を問題場面にひきあげるような活動を行うわけである。それが、操作的活動と呼ばれているものであると考える。

その操作的な活動とは、そういう意味からして、Ⅲで直観的な見方、考え方の視点として述べた諸活動自体をさしているといえよう。

そして、操作的活動を通して、直観が十分に働くよう情報を整えるわけである。

(2) 推論と操作的活動

Ⅳで述べたように、ただ単発的な直観ばかりでなく、数学的な推論の素地となるように配慮することが必要であるが、そこでは、主観的な立場から直観をひきだすような操作を行う、と同時に、客観的な立場から、それを絶えず観察し続け、常に思考全体を刺激しつつ、推論の出発点として、条件をそろえ、発見を連続した形に整えるような側面からの操作も大切である。

また、逆に、直観を得た場面に立ち止まって、それを、時には観点を変えて、実験、実証しようという操作も大切である。

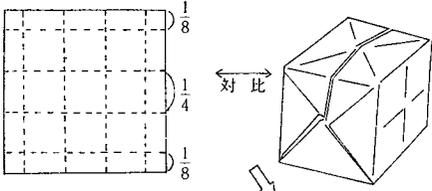
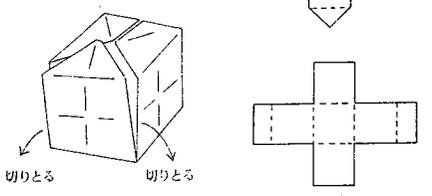
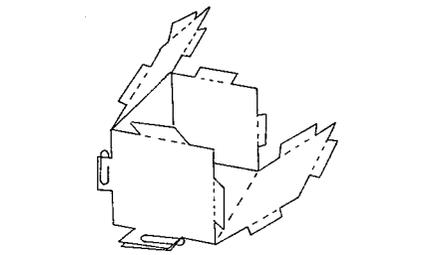
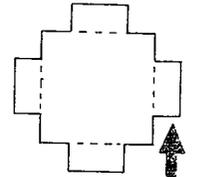
(3) 直接的な操作と思考操作

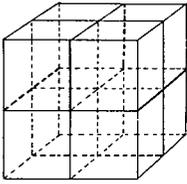
(1)(2)では、実物のモデルを扱う直接的操作と、思考の中にモデルがあったり、認知したものの自体を思考する中で変容させていくような思考操作とを区別なく用いてきたが、中学生の認識の発達段階からは、後者の方をより多く扱っていく必要がある。

VI 立方体の展開図の指導例

直観的な見方、考え方の視点を養うために、最も基本的な図形の一つである立方体を選び、作ったり、こわしたりという操作の中で、視点をどういうところにおいて見ると直観に結びつくのかということを体験的に学習させたい。一方、風船とか、開く立体とかいう遊び的な要素を取り入れ、図形への興味、関心をひきだし、直観が働きやすいように考えた。

配当時間 3時間

直観的な見方・考え方	操作的活動（学習過程）	指導上の留意点
<p>(1) 逆思考、変化、対比という視点を養う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・保存されているものとそうでないものを比べる視点を養う。 （折り線や折り線で囲まれた図形の保存を考える。 ・情報の過不足を対比する視点を養う。 （余分な重なりは切り離し情報を整理する。 ・安定を求めて変化させていく視点を養う。 （すっきりとした形の展開図の良さを知る。 立方体の性質を保存した方展開図の方が心的に安定することをとらえる。 ・実際に変化させていく視点を養う。 ・逆思考の視点を養う。 （平面から立方体を折ったことと、立方体を切って平面にもどしたことの根本は逆思考にあることをとらえる。 	<p>①折り線をつけて立方体を折る（資料1）</p> <p>②折り線だけを入れた正方形と折った立方体を比較し展開図を予想する。</p>  <p>③実際に重なっている余分な部分を切りとり調べる。</p>  <p>④立方体の性質（6つの合同な正方形）を表すような展開図に再構成する。</p> <p>⑤6枚の正方形をつなぎあわせていろいろな展開図をつくる。（資料2）</p> <p>⑥立方体の辺を切り開き（クリップをはずす）展開図にする。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・クラスの女子の半数は風船を折ったことがある。 ・余分な重なりを除いて考えるように指示すると良い。 ・辺を切り開くと1つの辺から2本の線分が生まれていることをここでとらえて後に生かすことも考えられる。 （上のような正方形を用意し矢印の所どうしをクリップで止める。 ・1枚の正方形の位置を移動させながら空間図形を想像させる。 ・ここでは11通りの展開図を全部扱うことまでしない。 

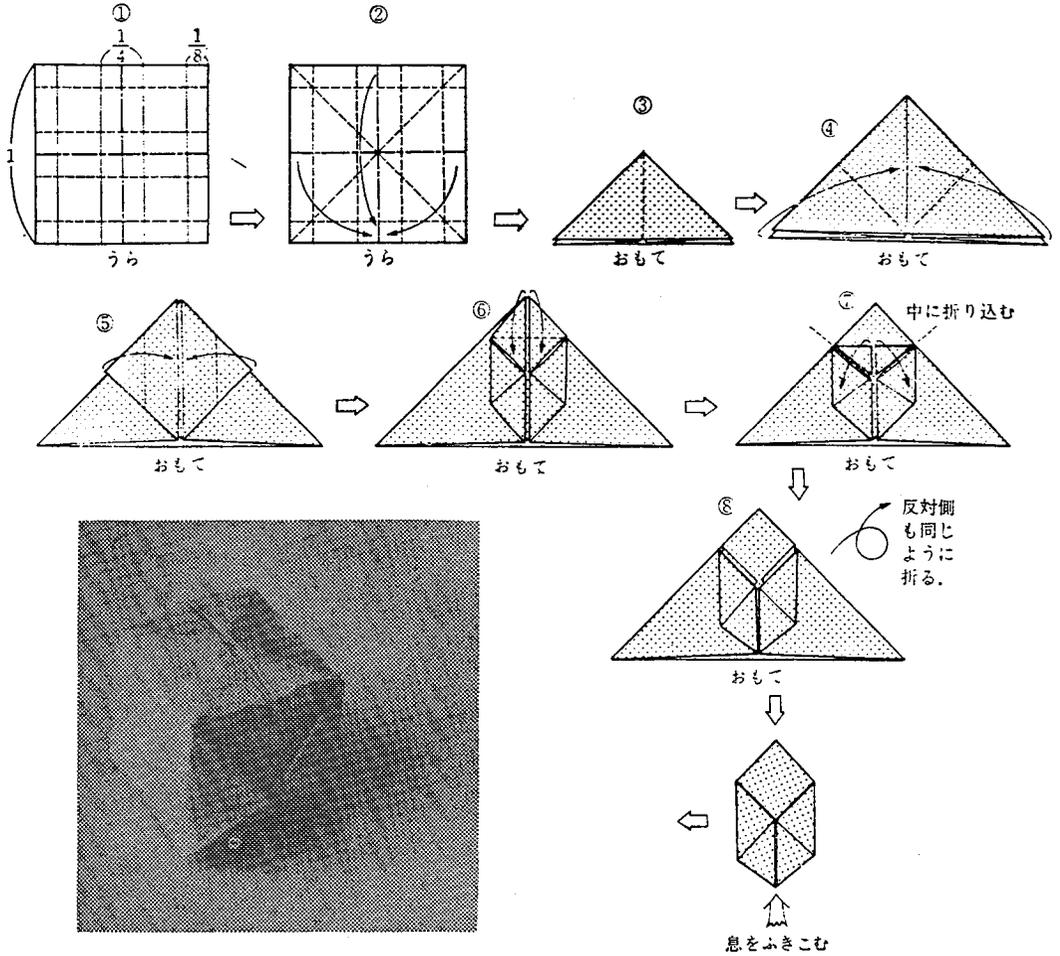
直観的な見方、考え方	操作的活動（学習過程）	指導上の留意点
<p>(2) 集合や対応の視点を養う。</p> <ul style="list-style-type: none"> 変化に応じて集合でとらえる視点を養う。 <p>（変化した辺とそうでない辺との集合に類別する。</p> <ul style="list-style-type: none"> 数学的な構造をもつ集合と対応させる視点を養う。 <p>（要素の個数の関係を調べる。</p> <p>(3) 推論へ発展させていく考え方を養う。</p> <ul style="list-style-type: none"> 対応づけたり、補集合としての扱いや、一般性を見いだしたり一段飛躍した直観を求めると同時に考え方の根拠と筋道を明らかにしていく態度を養う。 直接的な操作から思考操作へ移る態度を養う。 <p>(4) 直観的な見方、考え方の視点を大切にしながら思考操作を直接的な操作を個に応じて組み合わせる課題解決を行う。</p>	<p>⑦立方体を辺にそって辺り開くとき変化したものを集合として類別する。</p> <p>⑧数量的な処理をする $(\text{切った辺}) : (\text{切ってできた線分}) = 1 : 2$ $n(\text{切った辺の集合}) = n(\text{立方体の辺の集合}) - n(\text{切らない辺の集合})$</p> <p>左の図で{a, b, c}と{e, f, g}はともに底面の正方形4辺のうち3辺を切ったもので{d}は側面を切ったものであることから $(4 - 1) \times 2 + 1$</p> <p>⑨ ⑤⑥の操作を⑧をもとに、思考する中で行う。</p> <p>⑩ 自由に開く立体を製作する。 8つの立方体を積み重ねて1つの立方体をつくり、いろいろに開くように、つなぐ所を考える。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 課題は「いくつの辺を切り開くとよいか。」という与え方をする。 対応の考え方である。 補集合の考え方がある。 一般にN角柱では $(N - 1) \times 2 + 1$ 思考操作をしてから直接的操作で検証していく。  <p>太線の所をつなぐ</p>

VII おわりに

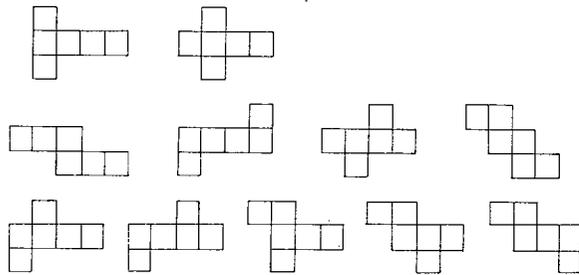
果して、この考え方が的を得ており、このような指導は効果があるのか、評価の観点も含めて今後への課題が山積みされている。

試論でおぼろしい限りですが、先生方のご批評がいただければ幸いです。

資料(1) 立方体の折り紙 (折り紙と数学・堀井洋子著)



資料(2) 立方体の展開図



- 参考文献
- ・ 新中学校数学指導講座 5 図形
 - ・ 折り紙と数学
 - ・ 数学的見方 考え方
 - ・ 教育学講座 11 算数・数学教育の理論と構造
 - ・ 新算数指導講座 7 量と測定・図形 (高学年)
 - ・ 数学資料図解大事典 図形編

堀井洋子・著
松原元一・著
赤 堀也・編著