

# 地盤解析にみる分岐概念と 非共軸性を考慮した構成方程式の工学的意義

志比利秀, 亀井健史  
島根大学総合理工学部 地球資源環境学科

## Bifurcation concept in geotechnical analysis and the technological significance of a non-coaxial constitutive equation of clay

Toshihide SHIBI and Takeshi KAMEI

*Department of Geoscience, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University*

### Abstract

This paper describes bifurcation concept in geotechnical analysis and the technological significance of a non-coaxial constitutive equation of clay.

In unconfined compression tests, deformation of specimen is uniform in the early stage of loading. Deformation changes from uniform deformation to non-uniform deformation near maximum load. As that time localization of strain leads to failure of specimens through formation of shear bands. Therefore, signs of failure appear before destruction. Bifurcation analysis gives the bifurcation stress ratio, i.e., stress ratio at the onset of non-uniform deformation. Design and construction of civil engineering works using bifurcation stress ratio is safer than using stress ratio at failure.

By incorporating non-coaxiality into the clay model, Both current stresses and current stress rates influence plastic strain. Consequently, clays become easy to simple-shear. Bifurcation stress ratios became small when the clay model incorporating non-coaxiality was used for bifurcation analysis to model deformation of clay under plane strain undrained loading. Deformation analysis which models construction of earthfill on the soft ground using the clay model demonstrates clear transition from localized strain to formation of shear bands.

### 1. はじめに

一般に、構造物が破壊せずに安定を保っているときには、その構造物の真の安全率を推定することは、極めて困難である。しかし、構造物が破壊した瞬間には安全率が 1.0 であったものと考えられ、破壊事例を逆に解析することにより、想定した地盤の強度や計算の過程が妥当であったかを検証することは可能となる。このような観点から、中瀬<sup>1)</sup>は、我が国の軟弱粘性土地盤において港湾構造物を中心としたすべり破壊事例を数多く収集し解析を行った結果を報告した。その結果、一軸圧縮強さ  $q_u$  値の平均値の 1/2 を地盤の非排水せん断強さとし、円弧すべりを仮定した修正フェレニウス法で計算した安全率によって、多くの破壊事例が良く説明できることを示した。以上のようなことから、我が国では、実際の現場の設計において一軸圧縮強さ  $q_u$  値が多く用いられている。

この解析法は、軟弱粘性土地盤を剛塑性的に取扱い、

すべり面上でのせん断応力とせん断強さの極限つりあい状態のみを考えることにより、安全率を求める方法であり、極限平衡法と呼ばれる。したがって、すべり破壊が発生するまで、地盤に変形が生じないものと考えている。

しかしながら、軟弱粘性土地盤は、載荷に伴い鉛直方向（沈下）と水平方向（側方流動）の変位を発生させ、荷重が増大し支持できなくなったときにすべり面を伴って破壊へと至る。近年では、都市内などのように用地幅に制限がある地域や既設構造物に近接した場所に構造物を建設する場合が増加している。このような場合には、軟弱粘性土地盤の破壊のみならず、地盤の沈下や側方流動などの周辺地盤への影響にも注意を払う必要があろう。有限要素法等の数値解析手法は、近年のコンピュータの発達および土の力学的挙動を良く説明できる構成方程式の出現と相まって、土の構成方程式に必要な土質定数を精度よく求めることができれば、地盤の変形挙動をある程度予測することが可能となってきた<sup>2)~8)</sup>。

これまでに挙げたような解析を行うことにより, 軟弱粘性土地盤の支持力を推察することができる. しかしながら, 得られた解析結果は, 建設した構造物の自重による沈下および側方流動現象が原因となり周辺地盤および既設構造物になんらかの悪影響を及ぼす可能性を内包しているものと考えられる.

一方, 粘性土供試体に対して一軸圧縮試験などの要素試験を実施する場合に着目すると, 以下のような現象が観察される. 一軸圧縮試験において供試体に軸方向荷重を載荷し始めると, 載荷荷重が小さな範囲では, 供試体は, 円筒形状を維持しながら軸方向に圧縮され, 半径方向に膨らむ. このとき, 供試体内のひずみは, 場所によらず一様な状態となっている. このような供試体の変形挙動は, 一様変形挙動と考えられる. さらに載荷が進行し, 載荷荷重が最大値近傍に達すると, 供試体は, 円筒形状を維持し続けることが困難となり, 棒の座屈や樽型に膨らむような形状となる場合が多く認められる. このような場合には, 供試体内のひずみは非一様な状態となり, ひずみの局所化が生じる. また, 供試体の変形挙動は, 一様変形挙動から非一様変形挙動へと遷移している. 最終的に, 載荷荷重のピーク値を経た後, 供試体表面にすべり面が発生し, 供試体は破壊へと至る. したがって, 地盤材料の変形・破壊現象は, 一様変形挙動から非一様変形挙動を経て, 最終的に破壊現象に至ることがわかる. 上記の地盤材料の変形・破壊現象の遷移過程を考慮すると, 非一様変形挙動に着目することにより, 破壊時に着目する場合よりも, 地盤材料の安全な支持力を算定できるものと考えられる.

上述のような, 載荷に伴う地盤材料の一様変形から非一様変形へと遷移するときの荷重を求める解析手法として, 有限変形理論に基づいた分岐解析<sup>9)~12)</sup>がある. また, この分岐解析結果から得られる非一様変形時の最大せん断ひずみ<sup>9)~11)</sup>や各応力状態量<sup>11)</sup>(偏差応力, 間隙水圧, 平均有効主応力, 応力比)の分布を用いることにより, すべり面が発生しやすい位置やその形状を予測することが可能である. したがって, 分岐解析を行うことにより, すべり破壊が発生し易い危険箇所を早急に発見することも可能となる.

一方, 粘性土の構成方程式に着目すると, Cam-clay モデル<sup>13)</sup>のように材料を等方的なものとして取り扱ったモデルや材料の異方性を考慮した関口・太田モデル<sup>14)</sup>などの種々の構成方程式が提案されており, それぞれに特徴を有している. 最近では, 非共軸性を導入した粘性土の構成方程式<sup>15)</sup>についても検討が行われており, 室内実験では中空円筒ねじり試験による非共軸性の存在の有無<sup>16)</sup>や分岐解析の結果に及ぼす非共軸性の影響<sup>12)</sup>に関する報告がなされている.

本論文では, 地盤材料に対する分岐解析と粘性土の構成方程式に非共軸性を導入することの有効性について取りまとめを行った.

## 2. 分岐解析

分岐理論においては, 有限変形の取扱いが必要となるので, 必要事項を簡単に説明する. 有限変形理論で用いる応力速度には, 例えば, 以下のものがある.

$$\dot{S}_t = \dot{T} + T(\text{tr}D) - TL^T \quad (1)$$

$$\dot{T} = \dot{T} - WT + TW \quad (2)$$

ここで,  $L$  は速度勾配であり,  $D = (L + L^T)/2$  は変形速度,  $W = (L - L^T)/2$  はスピンを表す.

前者は公称応力速度であり, 増分境界値問題の支配方程式(増分釣合式)の記述に適しているが, 客観的な量ではない. この応力速度は, 公称表面力速度  $\dot{s}_t$  および微小面素の単位法線ベクトル  $n$  と次式によって関係付けられる.

$$\dot{s}_t = \dot{S}_t n \quad (3)$$

また, 公称表面力速度とは, ある微小面素  $da$  に表面力  $t$  が働く際の荷重の変化率(物質時間微分)のある微小面素  $da$  に働く表面力速度として求められるものである.

$$\dot{t} da = \{i + (\text{tr}D - n \cdot Dn)t\} da \equiv \dot{s}_t da \quad (4)$$

一方, 後者は共回転応力速度と呼ばれる客観的な量であり, 構成式の客観性を満足させるためによく用いられる.

準静的な変形のある段階において, 平衡状態にある物体の形状, 応力分布および材料の構成則が既知の場合には, 現在の平衡状態を用いて, 境界条件を満足するような次段階の平衡状態が唯一に決定されるか否かを検討することにより, 変形の唯一性が議論できる. いま, 現配置 ( $t = t$ ) において座標  $x_i$  を設定し, 粒子  $x$  が  $\Delta t$  後に  $x + v \Delta t$  へと移動した状態を考える. このとき, 現配置において物体表面  $\Gamma$  の一部  $\Gamma_\sigma$  で  $\dot{s}_t$ , 残りの  $\Gamma_v$  で  $v$  が既知であるとき  $\Delta t$  後の平衡状態を規定する境界値問題は, 以下のとおりとなる.

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \dot{S}_t &= 0 \\ \dot{S}_t n &= \dot{s}_t && \text{on } \Gamma_\sigma \\ v &= \bar{v} && \text{on } \Gamma_v \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで, 物体力はないものと考えており,  $n$  は現配置の物体表面の外向き法線ベクトルを表す. また,  $\dot{s}_t$  は以下のように分けて考える.

$$\dot{s}_t = i + f(v) \quad (6)$$

$i$  は  $v$  と無関係に与えられる部分を表し, 死荷重などがこれに相当する. 一方, 流体圧や摩擦力などのように  $v$  の影響を受けその大きさや方向が変化する荷重は  $f(v)$  に属しており, これらは制御不能と考えられる. 前者は線型であるが, 後者は非線型となる. ここでは, 線型の場

合のみを取り上げることとする。

いま、式(5)を満足する異なった2組の解  $(\dot{S}_i, v)$  および  $(\dot{S}_i^*, v^*)$  が存在するものと考え、それらの解の差  $(\Delta\dot{S}_i, \Delta v)$  は以下の式を満足する必要がある。

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \Delta\dot{S}_i &= 0 \\ \Delta\dot{S}_i \cdot n &= f(\Delta v) \quad \text{on } \Gamma_\sigma \\ \Delta v &= 0 \quad \text{on } \Gamma_v \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式を満足する恒等的に0でない非自明な解が存在する場合には、2組の解が存在することとなり、その状態は分岐点となる。その意味で式(7)を分岐条件式と呼ぶ。分岐解析とは、境界条件を満足するような次段階の平衡状態の唯一性を検討することを意味するものとする。

唯一性が破れる限界点としての分岐点を定めるために、以下の基準を導入する。式(7)<sub>1</sub>に $\Delta v$ を内積して体積積分を施し Gauss の発散定理を用いることにより次式が得られる。

$$0 = \int_V \text{div } \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta v \, dv = \int_{\partial V} \Delta\dot{S}_i \cdot n \cdot \Delta v \, da - \int_V \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta L \, dv \quad (8)$$

ここで、 $\Delta L = \text{grad } \Delta v$  である。式(8)の右辺の表面積分に式(7)<sub>2,3</sub>を考慮すると、

$$\int_{\Gamma_\sigma} f(\Delta v) \cdot \Delta v \, da - \int_V \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta L \, dv = 0 \quad (9)$$

が成立する必要がある。したがって、

$$I[\Delta v] = \int_V \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta L \, dv - \int_{\Gamma_\sigma} f(\Delta v) \cdot \Delta v \, da > 0 \quad (10)$$

が $\Gamma_v$ 上で0となる恒等的に0とはならない任意の $\Delta v$ について成立するならば、 $t = t + \Delta t$ での平衡状態が唯一に定まることとなる。これが Hill<sup>17)</sup> によって与えられた唯一性の十分条件である。

平面ひずみ条件下に置かれた長方形断面を有する粘土供試体を非排水せん断する場合の供試体の変形挙動について考える(図-1)。側面には、一定の圧力を流体圧によって作用させ、上下端面では、摩擦が働かないものとし、変位制御により圧縮(あるいは伸張)するものとする。このような条件下では、供試体は、一様変形挙動を維持しながらせん断される。要素試験として理想的な供試体の変形挙動は、その後の载荷に対しても一様変形を維持しつづけ、最大荷重近傍に達するとすべり面を伴って破壊に至るというものであろう。しかしながら、せん断がある程度まで進行すると、供試体は一様変形挙動から非一様変形挙動へと移行する。その後、供試体は、せん断帯の発生、すべり面の形成を経て、破壊へと至る。

供試体の変形挙動を非線形連続体力学によって表現するためには、解析の対象が占めている領域全体で成立する力の釣合い(増分釣合式)、解析の対象となる材料の応力とひずみの関係(構成方程式)と領域の境界での既

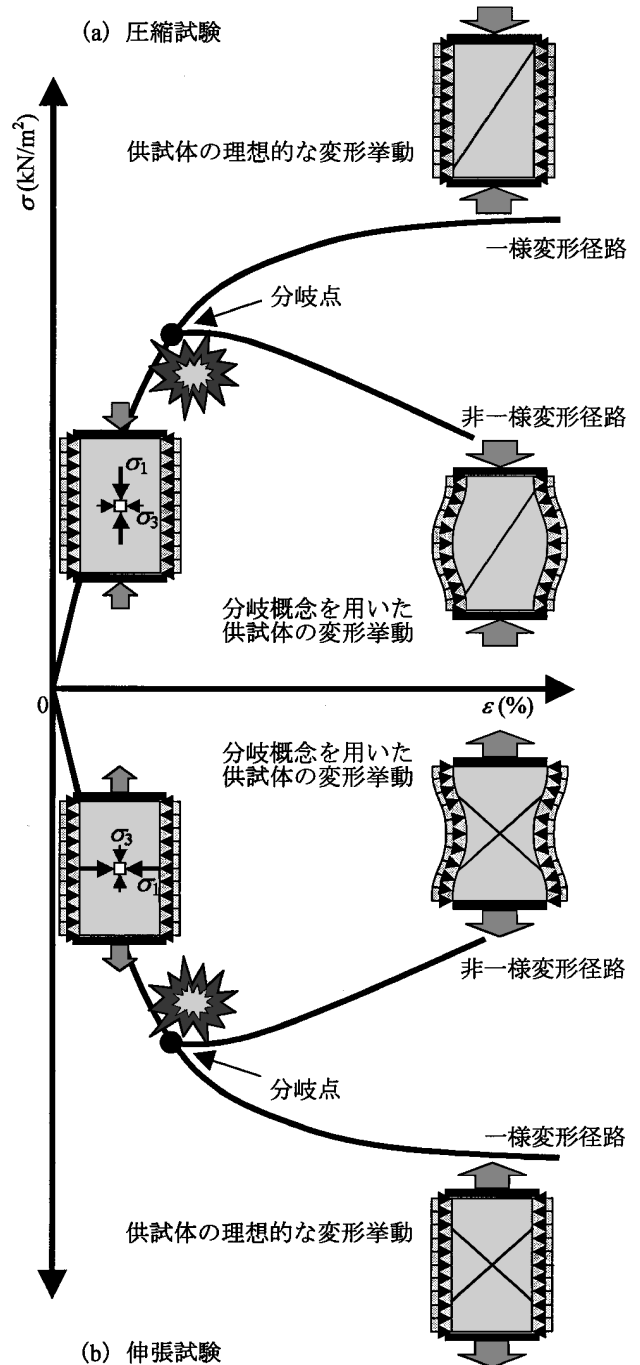


図-1 要素試験における応力-ひずみ関係と分岐概念

知量の情報(境界条件)が必要となる。また、供試体の変形挙動は、増分釣合式と構成方程式を境界条件下で整理し、境界条件を満足するような次段階への平衡状態を求めることによって追跡することができる。

上述のような条件下では、上下方向に圧縮される一様変形挙動は、常に境界条件を満足するような次段階の平衡状態となる。载荷の初期では、境界条件を満足するような次段階の平衡状態は、唯一に決定され、その変形挙動は一様変形挙動を示す。しかしながら、载荷がある程度まで進行すると、境界条件を満足するような次段階の平衡状態の唯一性が破れ、非一様変形挙動も発生しうる

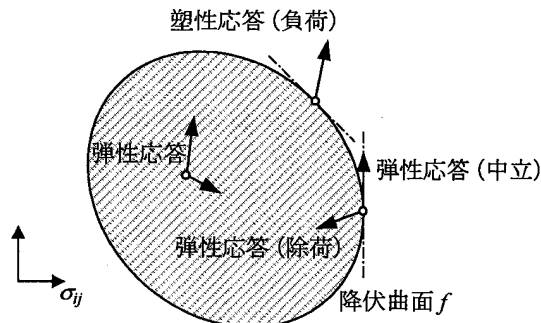


図-2 降伏曲面と負荷, 除荷, 中立の区別

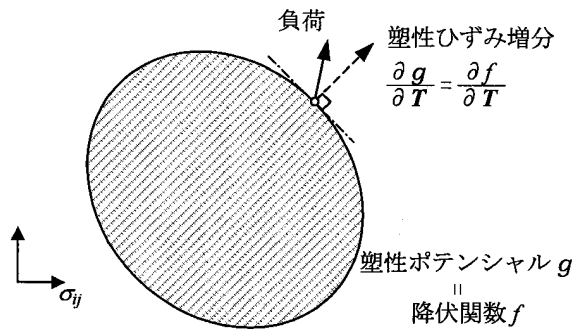


図-3 関連流動則と塑性ひずみ増分

状態となる。すなわち、非一様変形挙動が発生する場合には、変形挙動の分岐現象が発生していることとなる。以上のことから、地盤材料に対して分岐解析を行うことにより材料が一様変形を維持できる限界荷重が明らかとなる可能性が示唆される。

また、分岐解析を行えば、非一様変形挙動が明らかとなるので、供試体内のひずみ分布や構成方程式と関連付けることにより応力分布なども明らかとなる。それらの分布性状から供試体の破壊時に形成されるすべり面の発生位置やその形状を予測することも可能となる。

### 3. 土の構成方程式

正規圧密粘性土の代表的な構成方程式の一つとして、Cam-clay モデル<sup>13)</sup>がある。このモデルは、4つの土質定数 ( $e$ : 間隙比,  $\lambda$ : 自然対数表示による圧縮指数,  $\kappa$ : 自然対数表示による膨潤指数,  $M$ : 限界状態での応力比) により圧密・せん断挙動を統一的に表現できるという特徴を有している。このモデルでは、全ひずみが弾性ひずみと塑性ひずみの直和により表現できるものと仮定し、弾性部分にはフックの法則、塑性部分にはドラッカーの弾塑性体理論 (降伏曲面の凸面性, 関連流動則) が用いられている。

降伏曲面とは、弾塑性材料の弾性限界を規定するものである (図-2)。弾塑性材料は、降伏曲面の内側、降伏曲面上であっても降伏曲面の内向き (除荷) および降伏曲面に沿う向き (中立) の応力増分が与えられる場合には弾性的な変形挙動を示し、降伏曲面上において外向き

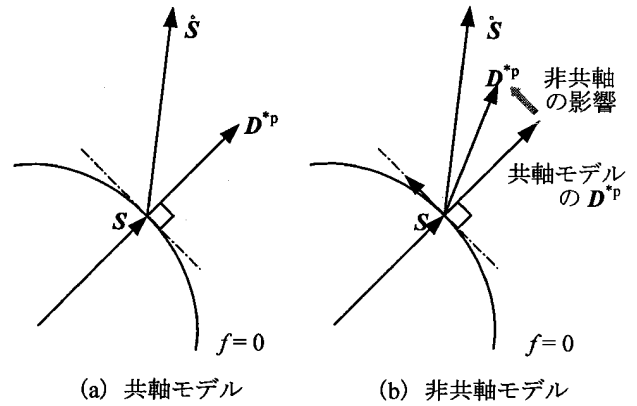


図-4  $D^{*p}$  の概念

(負荷) の応力増分が与えられる場合には弾塑性的な変形挙動を示す。

Cam-clay モデルの降伏曲面は、有効 Cauchy 応力の不変量 ( $p' = -(\text{tr } T)/3$ ,  $q = \sqrt{3} S \cdot S/2$ ) を用いることにより、次式によって表現できる。なお、 $S$  は有効 Cauchy 応力の偏差成分を表す。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \ln \frac{p'}{p_0} + D\eta + v^p = 0 \quad (11)$$

ここで、 $p'_0$  は先行圧密応力、 $\eta = q/p'$  は応力比であり、 $v^p$  は塑性体積ひずみを表す。また、 $D = (\lambda - \kappa) / \{M(1 + e)\}$  は、ダイレイタンシー係数<sup>18)</sup>である。

流動則に従う塑性論では、塑性ひずみ増分を表すために、塑性ポテンシャルを仮定する (図-3)。このとき、塑性ひずみ増分の方法は、塑性ポテンシャルと直交する。Cam-clay モデルでは、塑性ポテンシャルと降伏関数を同一のもののみならず関連流動則 (図-3) を採用している。したがって、変形速度  $D$  の塑性成分  $D^p$  は、次式のように書き表せる。なお、 $D^{*p}$  は、 $D^p$  の偏差成分を表す。

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} \left\{ \frac{S_{kk}}{2\bar{\tau}} T_{kk}^{\circ} - \frac{1}{3} \bar{\beta} T_{kk}^{\circ} \right\} \quad (12)$$

$$D_{kk}^p = -\frac{\bar{\beta}}{h} \left\{ \frac{S_{kk}}{2\bar{\tau}} T_{kk}^{\circ} - \frac{1}{3} \bar{\beta} T_{kk}^{\circ} \right\} \quad (13)$$

ここで、 $\bar{\tau} = \sqrt{S \cdot S/2}$  である。また、 $\bar{\beta} = (M - \eta) / \sqrt{3}$  は限界状態への隣接度を表す関数であり、 $h = (\bar{\beta} / \sqrt{3D}) p'$  は硬化係数を表す。なお、式(13)より  $D^{*p}$  の主軸と  $S$  の主軸が一致していることがわかる (図-4(a))。偏差応力の主軸と変形速度の塑性偏差成分の主軸が一致する (共軸) という意味で、この Cam-clay モデルを共軸 Cam-clay モデルと呼ぶ。以下、簡単に共軸モデルと呼ぶこととする。

とくに、平面ひずみ非排水条件下での粘性土の変形挙動に限定する場合には、共軸モデルの構成方程式は、以下のとおりとなる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{11}^i - \dot{T}_{22}^i &= 2\mu^*(D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}_{12}^i &= 2\mu D_{12} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \tilde{G} \quad (15)$$

ここで、 $\mu^*$ 、 $\mu$ は、それぞれ45°せん断係数および単純せん断係数であり、 $\tilde{h} = \tilde{K}\tilde{\beta}^2 + h$ を表す。また、 $\tilde{K} = \{(1+e)/\kappa\}p'$ は体積弾性係数、 $\tilde{G} = 3(1-2\nu)\tilde{K}/\{2(1+\nu)\}$ はせん断弾性係数を表している。なお、 $\nu$ はポアソン比である。

一方、変形速度の塑性成分が現在の応力状態以外に、応力速度の影響も受けるものと考え、変形速度の塑性成分に応力速度の影響（非共軸項）を付加したモデルが提案されている<sup>15)</sup>。Cam-clayモデルに非共軸項を付加したモデルは、非共軸 Cam-clay モデルと呼ばれており、 $D_{kk}^p$ は共軸モデルと同様の式となるが、 $D_{ij}^{*p}$ は次式で与えられる。

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} \left\{ \frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{T}_{kl}^i - \frac{1}{3} \bar{\beta} \dot{T}_{kk}^i \right\} + \frac{1}{h_1} \left( \dot{S}_{ij} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{2\bar{\tau}^2} \dot{S}_{kl} \right) \quad (16)$$

ここで、 $h_1 = (\bar{\beta}/\sqrt{3}A)p'$ は第2硬化係数と呼ばれる。Aは非共軸パラメータと呼ばれ、非共軸性の程度を表しており、Aの増加に伴い非共軸の程度が増大する。一方、Aの減少に伴い非共軸の程度も減少し、とくにA=0の場合

合には、非共軸モデルと共軸モデルは一致する(図-4(b))。

このような材料の非共軸性について、砂を対象とした試験結果に基づいて検討する。各主応力値を一定に保ち、主応力方向のみを回転させた場合の実測値が図-5である<sup>19)</sup>。ここでは、 $\tau_{xy} = 0$ のもとでA点までせん断した後、x-y面内で主応力方向を $\psi = 0^\circ \rightarrow 90^\circ$ まで回転し、その後 $\psi = 90^\circ \rightarrow 0^\circ$ まで戻している。このような試験の応力径路は、 $(\sigma_x - \sigma_y)/2 \sim \tau_{xy}$ 座標で原点を中心とする半円で表される。同図中の線分は、各応力状態の場合の $(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)/2 \sim d\gamma_{xy}$ 関係で示したひずみ増分の方向と大きさを表す。したがって、線分が原点から半径方向へと向かう場合には主ひずみ増分方向と主応力方向が一致することとなる。 $\psi = 0^\circ \rightarrow 90^\circ$ の場合、初期には共軸性が認められるが、主応力方向が回転するのに伴い、主ひずみ増分方向が主応力方向と異なり始め、非共軸になることがわかる。また、 $\psi = 90^\circ \rightarrow 0^\circ$ に戻す場合には、弾性ひずみが非常に小さいことから、主ひずみ増分の大部分が塑性ひずみとみなせるが、主ひずみ増分方向と主応力方向の間に共軸性は認められない。このような実測値の傾向は、塑性ひずみ増分方向と主応力方向が一致する共軸モデルでは、表現することができない。

4. 分岐解析結果に及ぼす非共軸性の影響

長方形断面を有する粘土供試体の供試体が平面ひずみ非排水せん断を受ける場合の変形挙動について考える。境界条件は、以下のように仮定した。側面では、一定の圧力を流体圧によって作用させ、上下端面では、摩擦が働かないものとし、変位制御により圧縮（あるいは伸張）するものとする(図-6)。なお、対象とした粘土の土質定数<sup>20)</sup>は、表-1に示すものを用いた。非共軸パラメータの値に関しては、有限変形弾塑性理論を用いたせん断帯形成理論<sup>15)</sup>や分岐解析による数値実験の結果<sup>12)</sup>に基づいて決定した。供試体は、載荷に伴い、供試体寸法比(高さ/幅)H/Bを変化させ、最終的にH/B=2.0<sup>21)</sup>のときに一様変形挙動から非一様変形挙動へと移行するものと仮定する。また、仮定した非一様変形の概形は、側面の変形形状の波数が(m×正弦波の半波長)で表される(図-7)。

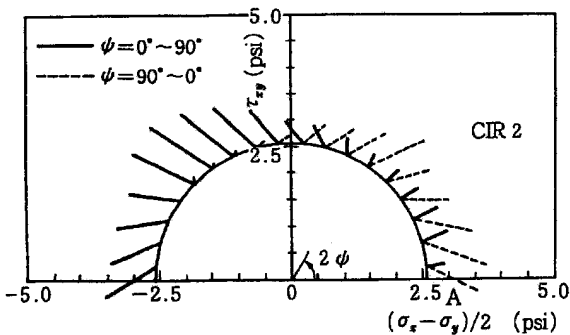


図-5 主応力軸回転試験の応力径路とひずみ増分方向の実測値<sup>19)</sup>

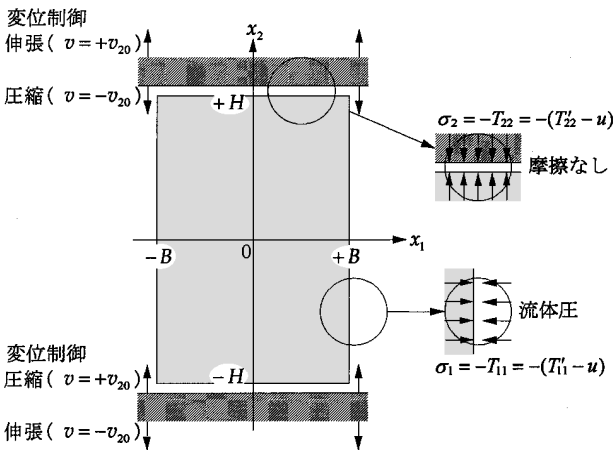


図-6 分岐時の境界条件

表-1 本解析に用いた土質定数<sup>15), 20)</sup>

$\lambda$	=	0.231
$\kappa$	=	0.042
$\nu$	=	0.333
$e$	=	1.5
$M$	=	1.43
$A$	=	0.01(0)*

\*共軸モデルの場合はA=0, 非共軸モデルの場合はA=0.01.

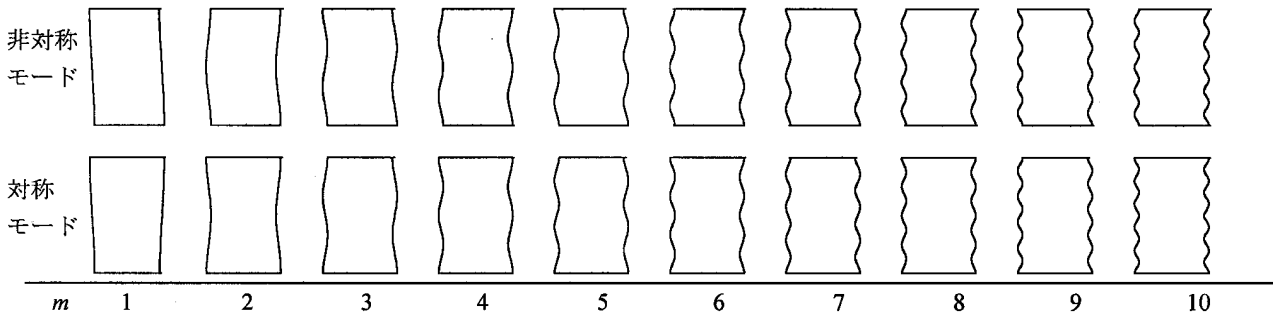


図-7 変形モード概形例

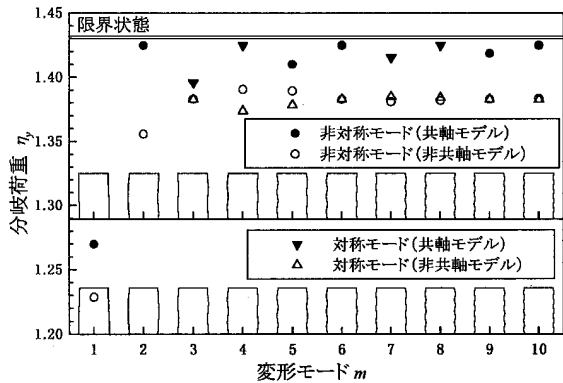


図-8 分岐荷重と変形モードの関係<sup>10)</sup> (圧縮試験)

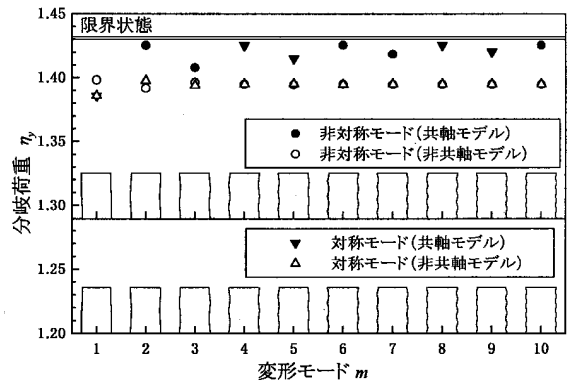


図-9 分岐荷重と変形モードの関係<sup>22)</sup> (伸張試験)

圧縮試験を行った場合の分岐解析結果を図-8 に示す。共軸モデルを用いた場合には、仮定した変形モードの半程度程度の非一様変形挙動(非対称モード  $m = 1, 2, 5, 6, 9, 10$ , 対称モード  $m = 3, 4, 7, 8$ ) しか発生する可能性が認められない。これは、材料力学的性質よりも幾何学的性質によるものと考えられる。また、その分岐荷重は、偶数次変形モードの場合には、限界状態近傍 ( $M = 1.43$ ) となる。一方、奇数次変形モードの場合には、分岐荷重は、 $\eta_y = 1.27 (m = 1)$  から変形モード次数の増加に伴い増加し限界状態 ( $M = 1.43$ ) に漸近する。したがって、1次や3次などの小さな奇数次の変形モードの分岐荷重が他の変形モードの分岐荷重より非常に小さいことから、高次の変形モードが発生する可能性は、小さな奇数次の変形モードの場合と比較して、低いものと推察される。

一方、非共軸モデルを用いた場合には、共軸モデルを用いた場合より、全体的に各変形モードに対する分岐荷重が低下する。また、 $m = 1, 2$  の対称モードを除くすべての変形モードに対応した非一様変形挙動が発生することがわかる。これは、非共軸性を考慮することにより材料力学的性質が幾何学的性質よりも大きく現れた結果と考えられる。非対称1次変形モードの分岐荷重 ( $\eta_y = 1.23$ ) は、その他の変形モードの分岐荷重と比較して非常に小さな値となっており、この点に関しては共軸モデルの場合と同様である。しかしながら、その他の変形モードの分岐荷重は、ほぼ一定値 ( $\eta_y = 1.37$ ) であり、非対称1次変形モードの非一様変形挙動が発生しなかった場合に

は、種々の変形モードが発生する可能性が考えられる。

図-9は伸張試験を行った場合の分岐荷重と変形モードの関係を示している。共軸モデルを用いた場合には、 $m = 3, 4, 7, 8$  の非対称モードと  $m = 1, 2, 5, 6, 9, 10$  の対称モードの分岐荷重しか存在せず、圧縮試験の場合と同様に、非一様変形挙動が制限されていることがわかる。また、その分岐荷重は、偶数次変形モードの場合には、限界状態近傍 ( $M = 1.43$ ) となり、奇数次変形モードの場合には、 $\eta_y = 1.39 (m = 1)$  から変形モード次数の増加に伴い増加し限界状態 ( $M = 1.43$ ) に漸近する。

一方、非共軸モデルの場合には、共軸モデルの場合と比較して、分岐荷重は低下していることがわかる。その値は、変形モードの違いによらず、1.40程度となった。なお、仮定したすべての変形モードにおいて、分岐荷重が認められた。

圧縮試験の場合と伸張試験の場合の最小分岐荷重を比較すると、伸張試験での最小分岐荷重は圧縮試験でのそれより大きいことがわかる。また、伸張試験の場合の分岐荷重は、圧縮試験の場合より、全体的に大きい。このような傾向は、共軸モデルと非共軸モデルの違いによらず認められた。したがって、分岐現象は、伸張試験より圧縮試験の場合に発生しやすいものと推察される。

供試体がせん断破壊する場合には、せん断破壊が発生する場所においてせん断ひずみが卓越しているものと考えられる。また、土の応力状態量と破壊現象は密接な関係にある。例えば、偏差応力  $q$  は、土に作用しているせ

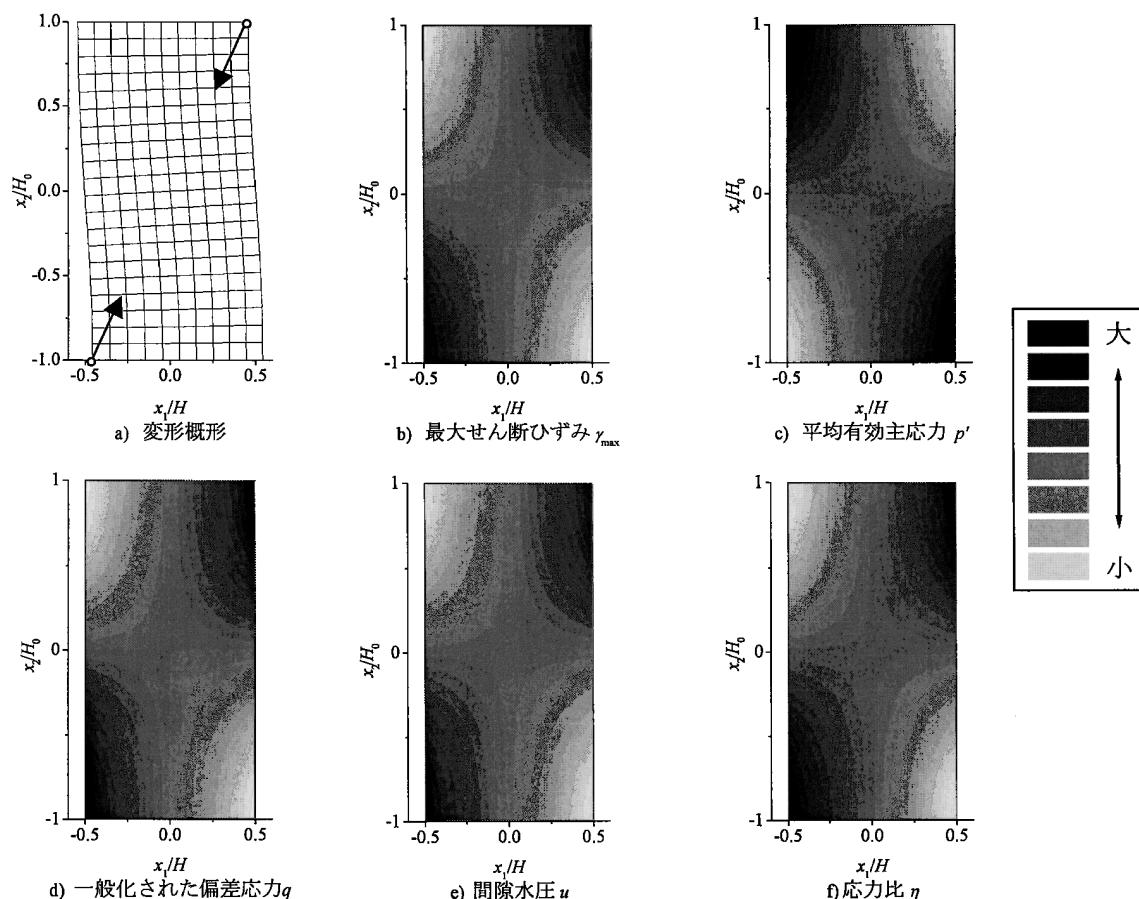


図-10 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布<sup>11)</sup> (圧縮試験・非共軸モデル・非対称1次変形モード)

ん断力と考えられることから、この値が増加することにより粘土は破壊へと至る。非排水条件下では、平均有効主応力  $p'$  の減少と間隙水圧  $u$  の増加は対応している。したがって、土を摩擦性材料と考えると、 $p'$  の減少（すなわち、 $u$  の増加）に伴い土のせん断強さは低下する。応力比  $\eta$  は、土に作用しているせん断力と土のせん断強さの両方を考慮した指標となり、この値が大きいほど、土は限界状態に近いこととなる。

上記の最大せん断ひずみおよび応力状態量と破壊現象の関係を考慮すると、分岐解析から得られる非一様変形挙動後の供試体内の最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布性状に着目することにより、非一様変形挙動後に供試体内に形成されるすべり面の発生位置およびその形状を予測することが可能となる。ここでは、圧縮試験および伸張試験のそれぞれにおいて、最も発生しやすい変形モードの場合を考える。

図-10 は、圧縮試験において非対称1次変形モードが発生する場合の変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布を示している。なお、構成方程式には、非共軸モデルを用いた。

供試体上端部が左側へ、下端部が右側へと変形するよ

うな場合には、供試体上端部右側および下端部左側において、最大せん断ひずみが顕著に増大していることがわかる。したがって、図-10(a)のような変形形態をとる場合には、すべり面は、供試体上端部右側および下端部左側から発生し始め、その両者を結ぶように形成されるものと推察される。最大せん断ひずみの分布性状から予測されたすべり面の形態は、実際の三軸圧縮試験等の室内実験で観察されるそれと非常に類似している。また、このようなすべり面予測は、応力状態量の分布性状からも同様に行うことができる。なお、共軸モデルと非共軸モデルの違いは、各分布性状に影響を及ぼさなかった。

伸張試験において対称1次変形モードが発生する場合の変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布を図-11に示す。なお、共軸モデルと非共軸モデルが各分布性状に及ぼす影響は、ほとんど認められなかったため、ここでは非共軸モデルの結果を示す。

供試体上端部が膨らみ、下端部が絞り込まれるような変形する場合には、供試体下端部中央において、最大せん断ひずみが顕著に増大していることがわかる。したがって、図-11(a)のような変形形態をとる場合には、すべり面は、供試体下端部中央から発生し始め、図中矢印の

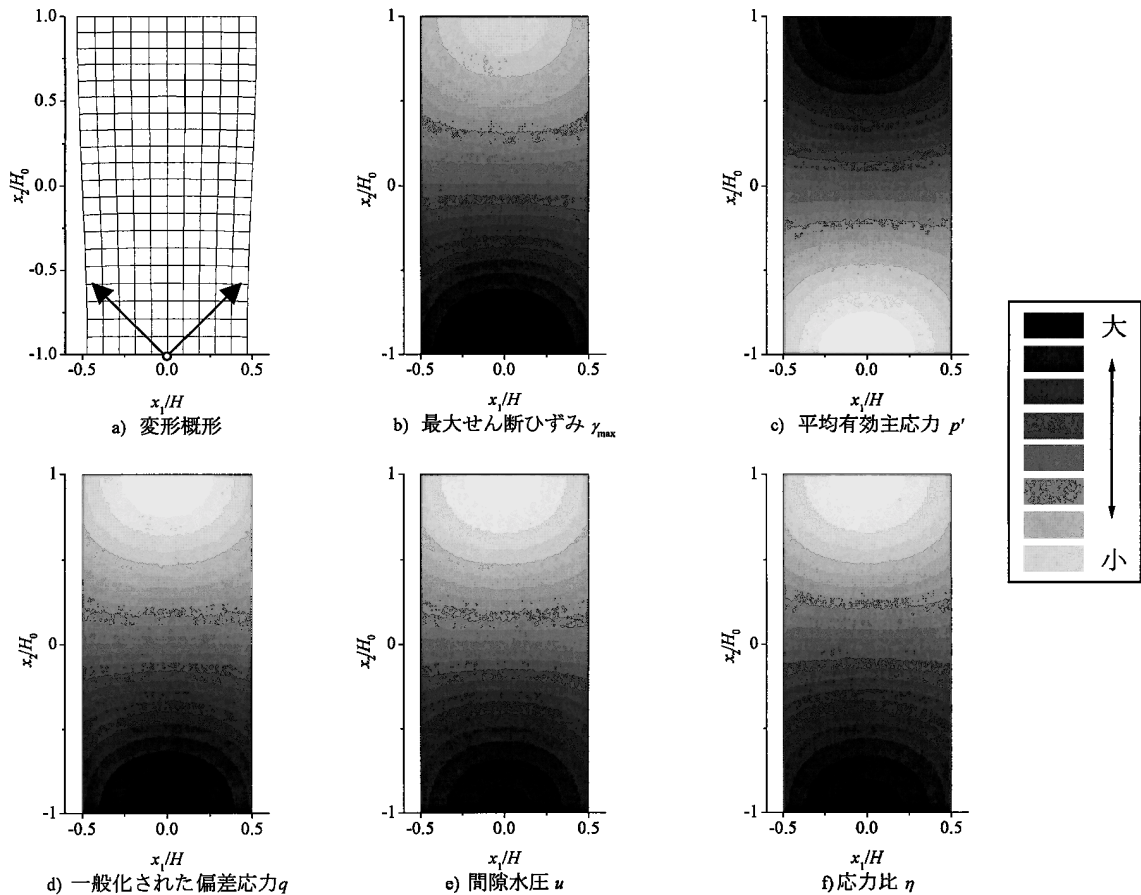


図-11 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布<sup>23)</sup> (伸張試験・非共軸モデル・対称1次変形モード)

方向へと進展するものと推察される。実際の三軸伸張試験等の室内実験においても、分岐解析結果から予測されたすべり面と同様のものがよく観察される。また、応力状態量の分布性状からも、同様のすべり面予測が可能である。

### 5. 非共軸性を考慮した構成方程式を用いた地盤変形解析

構成方程式に非共軸性を導入した場合には、共軸性を有する構成方程式を用いた場合より、土の単純せん断剛性が荷重に伴って大きく減少するため、単純せん断変形が発生しやすくなる。ここでは、有限変形有限要素法を用いて、均一地盤に段階的な盛土荷重を作用させた場合を想定した変形解析を行った。

まず、解析条件を説明する。深度 8m に基盤が存在し、それ以上には均一な粘土地盤が広がっているモデル地盤を考える。解析領域は、深さ 8m、幅 32m の長方形領域とし、4 節点アイソパラメトリック要素を用いて、全要素数 128 個、全節点数 153 個に分割した (図-12)。変位境界条件として、底面で鉛直変位を固定し、両側面で水

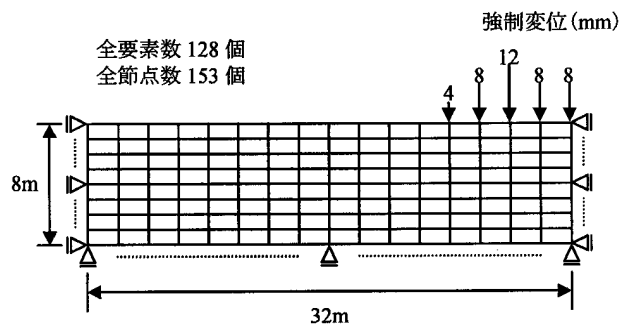


図-12 モデル地盤の有限要素分割図および境界条件

平変位を固定した。本解析では、簡易的に、盛土荷重を図中に示すような強制変位を各ステップに与えることにより表現する。上面の自由表面は、応力境界条件を考えている。なお、水理境界条件に関しては、完全非排水状態を考えている。なお、本解析でも、表-1 に示す土質定数を用いた。なお、地盤内には、土被り圧に対応する応力が等方的に作用している状態を初期状態とする。

図-13 に盛土荷重に伴う地盤の変形および地盤内の最大せん断ひずみ ( $\gamma_{max}$ ) の分布の遷移を示す。図中、(a) ~ (d) は共軸モデルを用いた場合の解析結果であり、(e)



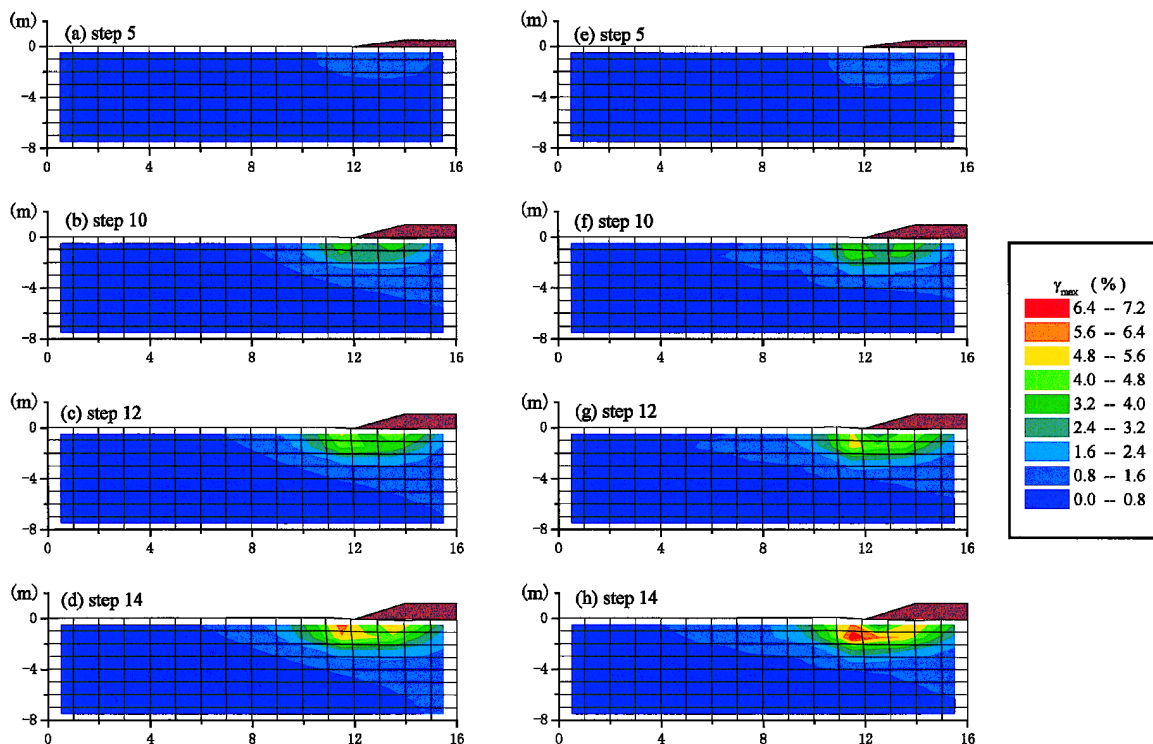


図-13 盛土載荷に伴う地盤の変形および地盤内の最大せん断ひずみ分布の遷移  
 ((a)～(d) 共軸モデル, (e)～(h) 非共軸モデル)

～(h)は非共軸モデルによる解析結果を示している。

まず、共軸モデルを用いた場合に注目する。step 数の増加、すなわち盛土載荷の進行に伴い盛土直下の地盤は沈下し、盛土法尻前方では僅かにヒービングが発生している。とくに、その現象は、step 14において明瞭に確認できる。また、法尻直下の水平変位に着目すると、step 5では表層から深度 2m 程度までの範囲で変位が発生しており、最終的に step 14 では深度 5m 程度までの地盤で側方流動現象が認められる。

地盤内の最大せん断ひずみは、載荷初期には、盛土直下（左から 10.5～15m、表層から深度 2.5m 程度の範囲）において蓄積されており、とくに左から 13.5m 程度の表層付近（最大の沈下量を用いた位置の近傍）において  $\gamma_{max}$  値が最も大きくなっている（図-13(a)）。その後、載荷の進行に伴い、最大せん断ひずみが大きな値を示す領域は、左から 12.5m 程度の表層付近を中心として楕円状に広がっていく（図-13(b), (c)）。また、 $\gamma_{max}$  値の最大値は、step 5 から step 12 と載荷が進行するのに伴い、主働域の盛土直下よりも受働域の盛土法尻の前方付近（左から 11.5m 程度）において大きくなる。最終的に、step 14 では、最大せん断ひずみが大きな値（ここでは、 $\gamma_{max} > 4.8\%$ ）を示す円弧状の領域が形成されていることがわかる（図-13(d)）。

つぎに、非共軸モデルを用いた場合について検討を行

う。共軸モデル同様、盛土載荷に伴う地盤の沈下と側方流動現象が発生しているのがわかる。とくに、盛土法尻前方では、明瞭なヒービング現象が step 12 の段階で確認できる。また、法尻直下の水平変位量も共軸モデルの場合より僅かに大きいように見受けられる。

地盤内の最大せん断ひずみ分布の遷移に着目すると、載荷初期に最大せん断ひずみが蓄積される領域は、共軸モデルの場合の領域とほぼ同じであるが、法尻前方直下において僅かに深い深度（3m 程度）まで広がっている（図-13(e)）。載荷の進行に伴い、載荷初期において  $\gamma_{max}$  値が最大であった主働域の盛土直下のよりも、受働域の盛土法尻の前方付近（左から 11.5m 程度）で  $\gamma_{max}$  値は最大となる（図-13(f), (g)）。その値は、共軸モデルの場合より大きな値となった。載荷の進行に伴う最大せん断ひずみが大きな値を示す領域の拡大傾向は、共軸モデルの場合と同様であるが、盛土法尻前方付近（左から 11m～13m）では、より深い深度まで広がっていることがわかる。最終的に、 $\gamma_{max} > 4.8\%$ を示す領域が円弧状に繋がりが、共軸モデルの場合より明瞭な帯状の領域へと収束していることがわかる（図-13(h)）。

また、step 14 での  $\gamma_{max}$  値が 0.8～1.6%の領域に着目すると、共軸モデルの場合には、底面にまで達しているが、非共軸モデルの場合には、底面に達していない。前述したように、非共軸モデルを用いると、共軸モデルより単

純せん断変形が発生しやすくなる。したがって、上部から応力が作用しても、浅層で純せん断変形が発生することにより応力が解放されることが考えられる。その結果、上部から作用した応力は、深層にまで作用しない可能性がある。

以上のことから、非共軸モデルを用いた場合には、共軸モデルを用いた場合よりも、早期に明瞭な破壊形態を予測できる可能性が示唆された。

## 6. 結論

地盤材料に対する分岐解析と非共軸性を考慮した構成方程式の工学的な有効性について取りまとめた。以下に主要な結論を列記する。

- 1) 地盤材料の変形挙動に分岐概念を取り込むことにより、破壊の前兆現象となる非一様変形挙動を捉えることが可能となり、限界応力よりも安全な分岐荷重を求めることができる。
- 2) 材料の非共軸性を考慮することにより、非共軸性を考慮しない、いわゆる共軸の場合に比べて、幾何学的性質より材料力学的性質が変形挙動に強く表わることが示唆された。
- 3) 有限要素法による地盤解析に非共軸性を考慮した構成方程式を用いることにより、盛土建設に伴う地盤の破壊現象を早期かつ明瞭に予測できる可能性を示唆した。

## 参考文献

- 1) Nakase, A.: The  $\phi = 0$  analysis of stability and unconfined compression strength, *Soils and Foundations*, Vol.7, No.2, pp.33-45, 1967.
- 2) Nakase, A., Kamei, T. and Kusakabe, O.: Constitutive parameters estimated by plasticity index, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.114, No.7, pp.844-858, 1988.
- 3) Kamei, T.: Dilatancy characteristics of normally consolidated cohesive soils, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.1, pp.165-172, 1989.
- 4) 亀井健史, 阪上最一: 弾粘塑性モデルを用いた盛土基礎地盤の沈下解析, 土と基礎, Vol.41, No.2, pp.23-28, 1993.
- 5) Kamei, T. and Sakajo, S.: Evaluation of undrained shear behavior of  $K_0$ -consolidated cohesive soils using elasto-viscoplastic model, *Computers and Geotechnics*, Vol.17, No.3, pp. 397-417, 1995.
- 6) Kamei, T.: Experimental and numerical investigation of the undrained shear characteristics of undisturbed clay, *Earth Science (Chikyu Kagaku)*, Vol.50, No.3, pp.213-222, 1996.
- 7) Sakajo, S. and Kamei, T.: Simplified deformation analysis for embankment foundation using elasto-plastic model, *Soils and Foundations*, Vol.36, No.2, pp.1-11, 1996.

- 8) Kamei, T. and Sakajo, S.: A deformation analysis of deep foundation under embankment using an elasto-viscoplastic model, *Journal of the Japan Society of Engineering Geology*, Vol.39, No.2, pp.183-192, 1998.
- 9) Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, *Proceedings of the International Symposium Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Nagoya, pp.9-14, 1997.
- 10) 志比利秀, 矢富盟祥, 亀井健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘性土の分岐荷重に及ぼす影響, 土木学会論文集, No.666/III-53, pp.181-192, 2000.
- 11) 志比利秀, 亀井健史, 松森将樹: 分岐解析結果に基づいた分岐荷重近傍における力学的状態量の評価, 地盤と建設, Vol.18, No.1, pp.19-25, 2000.
- 12) 志比利秀, 亀井健史, 東原聡子: 非共軸パラメータの違いが分岐荷重に及ぼす影響, 土木構造・材料論文集, No.16, pp.159-167, 2000.
- 13) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A.: Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, pp.211-240, 1963.
- 14) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Proceedings of 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Specialty Session 9, pp.229-239, 1977.
- 15) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial CAM-CLAY model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 16) 辰巳雅俊, 高木智哉, 飯塚 敦, 河井克之: せん断に伴う応力-塑性ひずみ増分の非共軸性, 第37回地盤工学研究発表会講演発表集, pp.247-248, 2002.
- 17) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.6, pp.236-249, 1958.
- 18) Ohta, H.: Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, *Doctor Engineering Thesis*, Kyoto Univ., 1971.
- 19) 地盤工学会編: 地盤工学ハンドブック, pp.114-115, 1999.
- 20) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, *Proceedings of 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Vol.1, pp.289-292, 1977.
- 21) 例えば, 土質工学会編: 土の試験実習書 (第二回改訂版), pp.133-158, 1991.
- 22) 志比利秀, 亀井健史, 矢富盟祥: 粘性土の平面ひずみ非排水伸張試験における分岐解析とその圧縮試験との比較, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5, pp.357-366, 2002.
- 23) 志比利秀・亀井健史・西開地一志: 平面ひずみ非排水伸張試験における分岐時の供試体内応力状態の評価, 第47回地盤工学シンポジウム審査論文集, pp.91-98.